René THOM

MATHEMATIQUES MODERNES ET MATHEMATIQUES DE TOUJOURS
in " Pourquoi la Mathématique?" Edition 10/18 (1974)

L'historien futur des mathématiques ne manquera pas de s'étonner de voir l'ampleur prise dans les années 60 par le mouvement dit des mathématiques modernes. Ce mouvement semble avoir atteint maintenant son amplitude maximum, et les premiers symptômes; de reflux., dus à une salubre réaction, commencent à s'entrevoir. J'aimerais, dans un bilan peut-être prématuré, exposer ce qui, de ce mouvement, doit être retenu, remis à sa vraie place , ou purement et simplement, être éliminé. Il est inutile, dans un pareil débat, de dissimuler la part des préjugés, de partis pris personnels, qui ne peuvent manquer d'influer sur le jugement. C'est qu'il ne s'agit pas là de science, ni même de technique pédagogique, mais d'un domaine où la sensibilité personnelle du mathématicien ne peut manquer de jouer un rôle essentiel. Seuls les esprits dogmatiques (et il n'en manque pas chez les modernistes) peuvent croire qu'il y a, dans ces questions une vérité susceptible d'être logiquement établie, devant laquelle on doive nécessairement s'incliner. Je vois donc dans cet exposé un plaidoyer à verser au débat, et non une démonstration dont on ne sait fort bien qu'elle ne peut exister.

Le mouvement dit des Mathématiques Modernes a une origine et une composition fort complexe. On peut dire, grosso modo, qu'il se fixe deux objectifs fondamentaux :

a) La *rénovation pédagogique* de l'enseignement mathématique. On reproche à l'enseignement traditionnel son didactisme, voire son dogmatisme, particulièrement sensible, assure-t-on, dans l'enseignement de la géométrie euclidienne. On se propose de lui substituer un enseignement moins directif, plus libre, plus constructif, orienté avant tout vers l'heuristique, et de nature à susciter davantage l'intérêt et l'activité individuelles de l'élève.
b) La *modernisation des programmes*.

La mathématique ayant — nous dit-on — considérablement progressé depuis Cauchy, il est anormal qu'en de nombreux pays les programmes n'aient pas suivi. En particulier, l'introduction dans l'enseignement des grandes «structures » mathématiques est de nature à simplifier cet enseignement, puisqu'on met là en évidence le» schémas universels qui gouvernent la pensée mathématique.

On observera que de ces deux objectifs, aucun n'est à proprement parler « moderne », ni même récent. Le souci d'enseigner les mathématiques de manière heuristique ou créative ne date pas d'hier. Il est directement issu de la pédagogie rousseauiste, et on pourrait dire, sans nulle exagération, que le Socrate du Menon a donné à son petit esclave une leçon de pédagogie heuristique dont. bien des théoriciens modernes peuvent encore s'inspirer. Quant aux progrès des mathématiques qui nécessiteraient une refonte des programmes, il n'est que devoir l'embarras et l'indécision des - théoriciens modernistes pour dater la prétendue révolution des mathématiques qu'ils invoquent si volontiers : Évariste Galois, fondateur de la théorie des groupes, Weierstrass, père de la; rigueur en analyse, Cantor, créateur de la théorie, des ensembles, Hilbert, axiomaticien des fondements de la géométrie, Bourbaki, présentateur systématique de la mathématique contemporaine, autant de noms invoqués pêle-mêle et sans grande rigueur théorique pour justifier le modernisation des programmes.

Il n'est guère possible de contester aux objectifs a) et b) une certaine validité. Cependant, on ne peut guère espérer atteindre de façon complète l'un ou l'autre de ces buts.

Je ne discuterai pas longuement de: l'objectif a) (*la rénovation pédagogique*) : je ne me sens aucune compétence en pédagogie — où il me serait difficile de voir plus qu'un art. Je me bornerai donc en ce domaine à des arguments d'un grossier bon sens. Pour s'assurer que l'élève participe pleinement à la recherche en cours, il est nécessaire que le maître tienne compte à tout instant de ses réactions, afin de guider sa propre démarche et celle de son pupille. Ceci n'est guère possible, sous forme idéale, qu'en tête à tête ; c'était d'ailleurs la situation du dialogue de Platon cité plus haut. Dès qu'un maître a simultanément plusieurs élèves, il ne peut tenir compte des réactions souvent divergentes de tous ses élèves, et il est amené à en négliger quelques-uns. Encore un pas de plus, et le souci d'efficacité le conduira à adopter une attitude de guide, et bientôt à revenir à l'enseignement ex cathedra. Aussi les efforts vers une pédagogie plus libre sont-ils nécessairement coûteux : ils demandent plus de maîtres, et des maîtres mieux formés, à personnalité originale : la société ne pourra qu'imposer à ces efforts .les bornes inéluctables du budget. Par ailleurs, faire une théorie de la créativité mathématique est pratiquement une contradiction dans les termes, car rien ne se laisse moins enfermer en des recettes ou des techniques que l'originalité créatrice. Dès qu'on utilise un manuel, on recrée un didactisme, voire un académisme, fut-il celui de la recherche individuelle. Qu'en conclure, sinon que les efforts de rénovation pédagogique seront toujours inachevés?

Le point b). *Modernisation des programmes* paraît lui aussi très justifié. Mais observons qu'en dépit des progrès récents de notre civilisation, technique, les étapes du développement (physique ou intellectuel) du jeune enfant n'ont pas été modifiées. Il y a toujours une phase d'apprentissage nécessaire, des contraintes génétiques à respecter, pour apprendre à marcher, à parler, à lire, à écrire et il ne semble pas que les progrès de la psychologie aient pu modifier .en quoi que ce soit le calendrier normal qui règle l'acquisition de ces connaissances. C'est pourquoi on peut légitimement se demander si des contraintes du même ordre ne sont pas en jeu dans l'acquisition des mathématiques. Si tel était le cas, l'espoir d'arriver par une refonte générale des programmes ou des méthodes à une connaissance accélérée des grande théories de la mathématique contemporaine pourrait bien se révéler illusoire. 0r, il est indiscutable que nombre de théoriciens modernistes ont exprimé, cet .espoir et entretenu ces illusions. Je crois, personnellement, que ces contrainte génétiques existent, qu'elles font partie intégrante du tempérament, de la personnalité de l'élève, et que, chez beaucoup d'entre eux (probablement la majorité des enfants entrant dans le secondaire), elles sont de nature à empêcher totalement la compréhension des mathématiques au :niveau des rudiments du calcul différentiel, ce qui serait le but. à atteindre pour entrer dans l'enseignement .supérieur. C'est. pourquoi il n'est pas évident qu'un progrès de la. science récente doive obligatoirement s'enregistrer dans les programmes, surtout au niveau élémentaire ou secondaire.

Mais admettons pour le moment, le bien fondé des points a) et b) pris isolément. Ce qu'il y a de plus étrange.— et de plus contestable — dans la position moderniste, c'est la prétendue synthèse qu'elle a cru pouvoir faire entre ces deux objectifs. Deux arguments ont été apportés à cet effet:

i) Le premier argument est de nature tactique ; je l'ai entendu exprimé *in petto* par les modernistes français, et j'ignore, si on peut le considérer comme exprimant la position générale des modernistes sur le plan mondial. Pour faire aboutir la réforme pédagogique, il faut briser l'inertie, la routine des enseignants; dans ce but, il faut changer les programmes. En changeant la matière, on pourra .plus facilement changer les méthodes. Cet argument tactique n'a de validité que s'il apparaît que les nouvelles matières introduites dans l'enseignement favorisent précisément une pédagogie constructive et heuristique. Or, précisément, les modernistes (au moins ceux d'Europe continentale) ont été amenés par leurs présupposés philosophiques : d'une part à abandonner ce terrain idéal d'apprentissage à la recherche, cette mine inépuisable d'exercices qu'est la géométrie euclidienne, d'autre part à lui substituer des généralités sur les structures ensemblistes et logiques, c'est-à-dire la matière la plus pauvre, la plus vide, la plus décevante à l'intuition qui soit.

ii). Le second argument est plus sérieux. Les psychopédagogiques , conscients du. vague de leur position doctrinale, ont cru trouver dans les affirmations des logiciens et des mathématiciens formalistes la clé. de leurs difficultés. Puisqu'il s'avérait que la démarche de la pensée mathématique se trouvait modelée par ces grands schémas formels que sont les structures ensemblistes et logiques , structures algébriques, structures topologiques, il suffirait d'enseigner à l'enfant, à un âge assez tendre, la définition et l'usage de ces structures, pour lui rendre l'accès aux théories mathématiques contemporaines infiniment plus aisé.

Cet argument mérite une discussion serrée; sous son apparence convaincante, c'est en fait une erreur psychologique de base qui vicie de fond en comble la tentative moderniste. II importe en effet de voir que la plupart de ces grandes structures abstraites : théorie des ensembles, calcul booléen, structures topologiques, sont d'ores et déjà présentes, sous forme implicite, dans le psychisme enfantin lorsqu'on les propose dans l'enseignement sous leur forme explicite. (Pour les structures algébriques, il y a lieu de nuancer : certaines, comme celle de groupe, existent implicitement ; celles d'anneaux et de corps sont beaucoup plus artificielles. Tout l'argument moderniste repose en définitive sur le postulat suivant : *En rendant conscients, explicites, les mécanismes implicites de la pensée, on facilite ces mécanismes.*

Or on soulève là un grand problème de la psycho-pédagogie, qui n'est nullement particulier aux mathématiques. On. le rencontre, par exemple, dans l'enseignement des langues vivantes : faut-il enseigner une langue à l'élève de manière livresque et explicite, en lui inculquant la grammaire et le vocabulaire de cette langue ? Ou faut-il au contraire lui enseigner, directement la langue par l'usage, comme l'apprendrait naturellement un enfant étranger plongé dans cette communauté linguistique ? La réponse n'est pas facile, mais, du point de vue de l'efficacité, la méthode directe est très souvent préférable.

Dans le développement de l'enfant, au premier âge, la connaissance explicite et déductive ne joue absolument aucun rôle; pour apprendre à marcher, il serait plus nuisible qu'utile de connaître l'anatomie de la jambe : et avoir étudié la physiologie du système digestif n'est d'aucun secours pour digérer un repas trop lourd. Sans doute m'objectera- t-on qu'il s'agit là d'exemples très primitifs, sans rien de commun avec cette activité suprêmement rationnelle qu'est la pensée mathématique. Mais ce serait oublier que la raison, elle-même, a chez l'homme des racines biologiques, et que la pensée mathématique est issue du besoin de l'esprit de simuler la réalité externe. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Un autre exemple, assez typique, de transfert de l'implicite vers l'explicite nous est donné par la psychanalyse, qui a voulu faire de ce passage de l'inconscient au conscient l'outil essentiel de la clinique. Or en ce cas, les résultats, dans la cure des troubles mentaux, se sont révélés — semble-t-il — assez décevants. Ce n'est pas de connaître la théorie freudienne du lapsus qui vous empêchera de commettre, à l'occasion, des lapsus « freudiens ».

De plus, ce transfert de l'implicite vers l'explicite, souvent inutile, peut être néfaste. Parfois l'élève ne peut pas faire le joint entre une activité mentale déjà présente dans son esprit et la description symbolique abstraite qu'on lui en offre (particulièrement si cette présentation est imprégnée d'esprit formaliste) ; en ce cas, cet enseignement restera pour lui lettre morte. Parfois, l'enfant soupçonne le joint, sans arriver à le concevoir clairement. En ce cas, la connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes.

Enfin, il ne faudrait pas croire que la connaissance des structures standards. en mathématiques épuise la Mathématique; bien au contraire, elles n'en représentent que les aspects les plus superficiels. Quand un biologiste veut étudier la physiologie de la marche, son attention se porte immédiatement sur ces structures frappantes que sont les os et les articulations ; mais; il négligera - faute de les bien comprendre - tous les aspects fonctionnels liés à la synchronisation des contractions musculaires, leurs effets mécaniques sur l'équilibre global, les structures nerveuses qui les commandent, etc. Ainsi notre analyse, des démarches de la pensée ne met en évidence. quel es articulations les plus grossières du raisonnement, - en négligeant les interactions fines dues aux sens, qui se laissent difficilement expliciter ou formaliser. Ces articulations grossières sont le domaine propre de la logique, du, calcul des propositions. Il s'agit là de structures de « surface », comme on dit en linguistique, et, dans le langage ordinaire, elles sont constamment perturbées, infléchies par les exigences des structures "profondes" de la signification. Sans doute, en principe, il n'en va pas de même en mathématique, où les règles combinatoires des structures ne tolèrent pas d'exception. Voire: les paradoxes de la théorie des ensembles proviennent visiblement de ce qu'on ne veut pas admettre d'exception pour la validité de certains axiomes ; et, dans la mathématique ordinaire c'est par un saut dans l'infini, et le continu que se réalisera l'exception.

Mais revenons en à notre problème: est-il utile de transformer en une connaissance explicite , un mécanisme déjà présent sous forme implicite dans, l'esprit? Avant de se poser la question de savoir, si un tel transfert est utile, il faut d'abord se demander s'il est possible. Comment 1e sujet pensant peut-il en quelque sorte se détacher de sa propre pensée, la visualiser abstraitement indépendamment du contenu même de la pensée ? Certes ces détachement est une étape nécessaire au progrès de la démarche mathématique ; mais l'opération inverse, qui est la réabsorption de l'explicite dans l'implicite n'est ni moins importante, ni moins nécessaire: à cette, seconde démarche, qui revient à traiter comme «existants », comme des êtres légitimes à traiter globalement des classes d'équivalence dégagées abstraitement par l'explicitation précédente, correspond à ce que les logiciens appellent une: « exigence ontologique » pour l'opération considérée. Or, tout porte à croire que cette opération de. « détachement », cette exfoliation du champ sémantique porteur de l'activité mentale qu'on veut abstraire n'est possible que si, précisément, l'objet engendré par cette opération d'abstraction est reconnu comme porteur d'une stabilité, d'un « sens » aussi fort que celui reconnu aux éléments primitifs.

Illustrons ces considérations délicates par un exemple : il est. loisible de définir abstraitement un rationnel comme une classe d'équivalence entre couples d'entiers (p,q) ~ (p', q') si et seulement si p* q'=p'* q. Mais cette définition ne fera sens que si l'on a montré que la classe d'équivalence ainsi définie se comporte comme un entier, qu'elle en a toutes les propriétés opératoires (et même davantage puisque la division par un rationnel non nul est toujours possible); et que, de plus l'ensemble de ces nouveaux nombres contient canoniquement l'ensemble des entiers dont on est parti. En sorte que la qualité d'existence qu'on avait au départ attribuée aux entiers s'étendra naturellement aux rationnels qui les contiennent. ! Lorsqu'on a bien compris que c'est le résultat de l'opération d'abstraction qui justifie l'abstraction et la rend possible, on voit combien la présentation formelle et axiomatique est contraire à l'ordre naturel. En bonne pédagogie, on introduit les nouveaux êtres par l'usage, on explicite leurs règles d'interaction avec les éléments primitifs supposés existants, on les rend familiers en manipulant ces règles. C'est seulement après qu'on pourra donner la définition abstraite, qui permet de vérifier la non-contradiction de la théorie ainsi étendue. La mathématique, même sa forme la plus élaborée, n'a jamais procédé autrement (sauf peut-être pour certaines généralisations gratuites de théories algébriques). *Le vrai problème qu'a à affronter l'enseignement des mathématiques n'est pas le problème de la rigueur, mais le problème de la construction du « sens », de la «justification ontologique » des objets mathématiques*.
.

<u>Formalisation, axiomatique et rigueur</u>

Ceci m'amène à traiter du grand cheval de bataille des modernistes (de la branche Europe continentale): la rigueur et l'axiomatique. On sait que l'espoir de donner aux mathématiques un fondement rigoureusement formel s'est trouvé irrémédiablement ruiné par le théorème de Gödel. Il ne semble cependant pas que les mathématiciens, dans leur, activité professionnelle, souffrent beaucoup de cette situation. Pourquoi ? Parce que dans la pratique la pensée du mathématicien n'est jamais une pensée formalisée. Le mathématicien. donne un sens à toute proposition, ce qui lui permet d'oublier l'expression de cette proposition à l'intérieur de toute formalisation de la théorie, s'il en existe (le sens confère à la proposition un statut ontologique indépendant de toute formalisation). On peut, je crois, affirmer en toute sérénité que les seuls procédés formels en mathématiques sont les calculs, numérique et algébrique. Or, peut- on réduire la mathématique au calcul? Certainement non, car même dans une situation entièrement calculatoire, la démarche même du calcul doit être choisie parmi un très grand nombre de possibilités. Et seules l'interprétation intuitive des quantités manipulées permet de guider ce choix. Ainsi l'accent mis par les modernistes sur l'axiomatique est une aberration, non seulement pédagogique (ce qui est assez évident), mais aussi proprement mathématique.

On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage; c'est celle- ci: on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification ; l'absolue rigueur n'est possible que dans et par l'ïnsignifiance. Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens. C'est ce choix qu'on a toujours fait en mathématique, où on opère pratiquement toujours dans une situation semi-formalisée, avec un métalangage qui est. le langage ordinaire, non formalisé. Et toute la profession se contente de cette situation impure et n'en demande pas de meilleure.

On a d'ailleurs très probablement, surestimé l'importance de la rigueur en mathématique. De toutes les disciplines scientifiques, la mathématique est celle où la rigueur est a priori la moins nécessaire. Quand un mathématicien X publie la *"démonstration d'un théorème*", son lecteur Y est à même de contrôler les assertions de X. Il peut dire : la démonstration me semble correcte et je suis convaincu ; ou bien: je me comprends pas tel ou tel point, tel lemme me semble peu clair, tel raisonnement a une lacune. Au contraire, dans les disciplines expérimentales, la situation est tout à fait différente : quand un expérimentateur A présente le résultat d'expériences faites en. son laboratoire, il peut me donner tous les détails voulus quant à la procédure suivie, toutes les garanties statistiques désirables sur les résultats numériques je n'ai aucun moyen de vérifier l'exactitude de ses dires et force m'est de lui faire confiance. De là vient que l'erreur soit finalement un phénomène négligeable dans l'évolution des mathématiques. C'est plus souvent un accident heureux pour le progrès d'une théorie qu'une catastrophe qui va faire dérailler la science de son cours normal. L'erreur n'est fâcheuse que pour son auteur, non pour la mathématique elle-même.

Les férus de l'axiomatique feraient bien de réfléchir au problème philosophique suivant : pour quoi le langage ordinaire n'est-il pas axiomatisable ? (Peut-être, ce qui s'y trouve de plus proche du langage formel serait le langage juridique, ou le langage théologique.) C'est que, dans les situations usuelles, les membres d'une même communauté linguistique ont pratiquement le même univers sémantique, la même vision de l'univers à travers leur propre langue. Bien qu'un nom — un concept — soit réalisé en extension par une classe d'équivalence non formalisable, le langage usuel n'en fonctionne pas moins avec une efficacité remarquable, et une absence quasi totale d'ambiguïtés. (Si une phrase est accidentellement ambiguë, l'ambiguïté est en général levée par le contexte.) La signification, en langue ordinaire, repose pour une large part sur des critères de caractère topologique: l'identité d'un objet, ou d'un individu, s'exprime par le caractère connexe du domaine de l'espace-temps occupé par cet objet (ou cet individu). Et la syntaxe du langage ordinaire, relativement pauvre du point de vue structurel, décrit les interactions dynamiques les plus fréquentes entre objets spatio-temporels. Au contraire, en mathématique, chez les mathématiciens professionnels (et a fortiori chez les étudiants) les univers sémantiques sont très différents : telle expression qui fait sens pour X est incompréhensible à Y, etc. C'est que le « sens » en mathématique est le fruit d'une construction, d'an apprentissage, et qu'il n'y a jamais eu deux mathématiciens (ni même deux étudiants) dont les contacts avec la mathématique ont eu la même histoire. C'est cette diversité fondamentale des univers sémantiques qui explique la nécessité d'une formalisation — au moins partielle — en mathématique. Tout au plus les mathématiciens fondent-ils leurs univers sur une sorte de « tronc commun », constitué des objets et des théories qui se rencontrent dans l'enseignement standard (par exemple : nombres réels et complexes, fonctions analytiques et différentiables, espaces topologiques, variétés, groupes, espaces vectoriels... etc.) et toute démonstration pas trop spécialisée se doit de partir de ce vernaculaire mathématique commun à tous. Une démonstration d'un théorème (T) peut se définir comme un chemin qui, partant de propositions empruntées au tronc commun et de ce fait intelligibles pour tous, conduit par étapes successives à une situation psychologique telle que (T) y apparaît comme évident. La rigueur — au sens usuel, non formalisé — de la démonstration se constate au fait que chacune des étapes est parfaitement claire à tout lecteur, compte tenu des extensions de sens déjà opérées dans les étapes antérieures. En mathématique, si on rejette une démonstration, c'est plus souvent parce qu'elle est incompréhensible que parce qu'elle est fausse. Cela vient en général de ce que l'auteur, submergé en quelque sorte par la vision de sa découverte, a indûment gonflé le présupposé commun. Peu après, des collègues viennent expliciter ce qui avait été admis implicitement, par l'auteur, ce qui comble, les lacunes et rend complète la démonstration. La rigueur, comme l'intendance, suit toujours.

Comparaison du langage ordinaire, de la géométrie et de l'algèbre

Il est intéressant de comparer le langage usuel, la géomètrie euclidienne et le langage algébrique (formel) au triple point de vue suivant

1°) Le « sens » d'un élément: peut-on formaliser la classe d'équivalence (en extension) définie par un élément du langage?

2°) Ce sens est-il, clair à l'intuition?

3°) Richesse (ou pauvreté) de la syntaxe.

On a alors les réponses suivantes.

Langage ordinaire

1°) La classe d'équivalence définie par un mot (un concept) n'est pas formalisable en général (elle est souvent de nature topologique: invariance d'une gestalt.)

2°) Néanmoins le sens du mot est clair.,

3°) La syntaxe est pauvre.(Il y a peu de types de phrases nucléaires en grammaire et I'enchassement des phrases l'une dans l'autre comme subordonnées s'arrête rapidement : il y a, au plus trois ou quatre degrés de subordination possibles.)

La géométrie euclidienne

1°) L'objet, défini par un mot, une figure géométrique, est formalisable (= descriptible en peu de mots en fonction des êtres élémentaires les points). L'équivalence est définie par le groupe métrique.

2°) Le sens d'un mot est clair, car il coïncide avec l'intuition spatiale de la figure correspondante

3°) La syntaxe est riche, car elle décrit toutes les positions spatiales respectives des figures et leurs déplacements. (Néanmoins, elle s'exprime verbalement par un petit nombre de concepts, comme: l'incidence, dont la combinatoire n'est pas limitée)

Langage formel ou algébrique

1°) La classe d'équivalence est définie comme l'identité d'un symbole, écrit avec lui-même ; elle est donc formalisable,

2°) Le sens d'un symbole algébrique est difficilement construit où inexistant

3°) La syntaxe, qui est la combinatoire des opérations possibles, est riche car elle est en principe illimitée.

On voit sur cette comparaison en quoi la géométrie euclidienne est un intermédiaire naturel et peut-être irremplaçable entre le langage usuel et le langage algébrique. La géométrie permet un éclatement psychologique de la syntaxe, sans avoir à sacrifier le sens, toujours donné par l'intuition spatiale (Et en même temps, le sens d'un élément y est déjà donné par une définition formalisable). Vouloir, comme l'exige un dogme moderniste éliminer la géométrie élémentaire au profit du calcul et de l'algèbre linéaire, est une opération psychologiquement peu recommandable, parce que, les objets algébriques (les symboles) sont trop pauvres sémantiquement pour se laisser appréhender, directement comme une figure spatiale.

J'ajouterai que le langage de la géométrie élémentaire offre une solution au problème suivant : exprimer dans une combinatoire unidimensionnelle — celle du langage — une morphologie, une combinatoire multidimensionnelle. Or, ce problème se retrouve de manière « partout dense » en mathématique, où le mathématicien a à communiquer à autrui ses propres intuitions. En ce sens, l'esprit géométrique circule presque partout dans le corps immense des mathématiques, et c'est une erreur pédagogique majeure que de chercher à l'en éliminer. A cet argument s'ajoute la pauvreté heuristique de l'algèbre, où chaque difficulté nouvelle se présente comme un mur qui exige pour être franchi des méthodes toutes nouvelles. Rien de tel en géométrie, où la combinatoire des figures permet une foule d'exercices; à difficulté très graduée.

Le bilan

Si j'ai été sévère vis-à-vis du modernisme, cela ne signifie nullement que tout ce qui a été apporté par ce mouvement doive être écarté ; un retour au statu quo est sans doute impossible. Il est en particulier un point positif qu'on devra conserver en tout état de cause. Autrefois, régnait entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, en mathématique, une sorte de gouffre que les jeunes étudiants sortis du lycée avaient beaucoup de mal à combler. Par l'introduction des notations ensemblistes (présentées sans aucune théorie comme de simples abréviations), et par des rudiments d'algèbre linéaire, on peut faire disparaître ce hiatus. A mon sens, un élève, sortant de l'enseignement secondaire (16-17 ans) et se destinant à une carrière scientifique, devrait se trouver à peu près au même niveau mathématique qu'un Leibniz, avec en plus quelques notions d'algèbre linéaire plus moderne. Ce résultat semble pouvoir être acquis sans sacrifier l'enseignement de la géométrie élémentaire ; il suffit pour cela de ne pas rechercher une impossible rigueur : on gardera la matière des éléments d'Euclide (sous une présentation plus souple et moins axiomatique) en en abandonnant la forme, qui est d'ailleurs depuis longtemps surannée.

Peut-être une conclusion aussi modérée décevra-t-elle. Mais la communauté mathématique s'est laissé entraîner ces dernières années à des déclarations et à des promesses inconsidérées devant l'opinion publique. On a parlé d'« une révolution mathématique », on a prétendu que grâce aux nouveaux. programmes et aux nouvelles méthodes l'élève le plus moyen pourrait achever ses études mathématiques secondaires. Il est temps de cesser ces propos qui frisent l'imposture. Aucun miracle n'est possible, et on ne peut espérer qu'améliorer prudemment et par petits progrès locaux la situation existante. Alors, quelle a pu être l'origine de ce mouvement moderniste? On n'a pas tout expliqué, heureusement, quand on a évoqué les intérêts commerciaux mis en jeu lors des changements de programmes et de manuels. Je me hasarderai à émettre l'hypothèse suivante — avec les réserves d'usage, évidemment. Il y a sans doute eu, dans la communauté mathématique, au cours des années 1950-1960, un sentiment de frustration relative : jalousie à l'égard des physiciens, favorisés budgétairement par le développement de l'énergie (et des engins) nucléaire ; jalousie à l'égard des biologistes, rendus célèbres par la découverte de l'ADN et du code génétique, alors que la mathématique faisait, au cours de ces mêmes années, de très grands progrès, en géométrie et topologie algébriques notamment, mais des progrès sans grand écho dans l'opinion publique. Le lancement des satellites (1958-1960) a de nouveau attiré l'attention publique sur les techniques mathématiques (et notamment. les ordinateurs). C'est pour relancer cet intérêt déclinant qu'on en serait venu à invoquer les mathématiques modernes. Si. cette hypothèse avait un fonds de vérité, il serait bon, de rappeler, à nos collègues que c'est une loi de notre société que les, choses importantes n'y sont jamais celles dont on parle; de notre temps plus encore qu'au temps de Nietzsche les idées neuves arrivent sur des pattes de colombes.

René Thom