LE CALCUL MENTAL

René TATON

Que sais-je ? N°605 . 1953
2ème Ed. 1957

Extraits

*****

*****

CHAPITRE II

LA TECHNIQUE DU CALCUL MENTAL ARITHMÉTIQUE

L'arithmétique est le domaine d'élection du calcul mental. Aussi insisterons-nous quelque peu sur les principales méthodes relatives aux opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, multiplication, élévation à une puissance, division et extraction de racine. Nous supposerons simplement une connaissance très élémentaire de la théorie de ces opérations et nous nous efforcerons de préciser les techniques les mieux adaptées à la nature même du calcul mental, tout en situant leurs rapports avec les procédés couramment utilisés en calcul écrit.

1. L'addition. - L'addition par calcul mental diffère assez peu du procédé classique par voie écrite, car ce dernier recourt pour une bonne part à des opérations mentales. Il consiste en effet à écrire les nombres à additionner de telle sorte que les unités de même nom se trouvent alignées en colonnes, puis à additionner colonne par colonne en commençant par la droite et en tenant compte des reports. Tout le déroulement de cette opération est mental, à ceci près que chaque chiffre du résultat est écrit aussitôt qu'il est obtenu : l'addition par colonnes se fait de tête en utilisant la table d'addition et enregistrant les reports de mémoire.

Comment transformer ce mécanisme opératoire en un procédé de pur calcul mental ? Tandis que pour d'autres opérations, on admet la possibilité d'inscrire au début les données du problème et celle d'écrire les chiffres du résultat à mesure qu'on les obtient, ici, on ne peut accepter ces facilités sans retomber sur le procédé écrit. Aussi, ne considérerons-nous qu'une addition est faite mentalement que si l'on s'est interdit d'écrire les termes de la somme à effectuer dès qu'on les énonce.

Dans cette éventualité, la mémoire est appelée à jouer un rôle essentiel dans tout le déroulement de l'opération, l'effort à fournir dépendant à la fois du nombre de termes de la somme et du nombre de chiffres de chacun d'eux. Mais cet effort peut être considérablement réduit si l'on effectue l'addition progressivement, terme par terme, sans attendre que tous ceux-ci soient énoncés. Le mécanisme d'ensemble se ramène donc à une succession d'additions de deux nombres : en même temps que l'effort à fournir se trouve considérablement allégé, le résultat final peut être donné beaucoup plus rapidement.

Pour effectuer mentalement l'addition de deux nombres énoncés seulement sous forme orale, il faut remarquer que, puisque ces nombres sont donnés - et que le résultat doit être énoncé - de la façon courante, c'est-à-dire en allant des unités d'ordre supérieur vers les unités d'ordre inférieur, le calculateur mental aura intérêt à opérer dans cet ordre, et non pas dans l'ordre inverse, adopté pour le calcul écrit.

Etudions en détail un premier exemple d'où seront exclues les difficultés de report que nous situerons ensuite ;

Soit les deux nombres *quatre mille trois cent quarante-deux* et trois mille deux cent trente quatre que nous énonçons tout au long, et non en chiffre afin nous éloigner le moins possible des conditions orales.

La première opération mentale à effectuer consiste à retenir, au moins jusqu'à ce qu'ils soient utilisés, les chiffres successifs des deux termes. Mais il faudra retenir également les chiffres successifs du résultat afin de pouvoir utiliser ou énoncer celui-ci sans hésitation dès la fin de l'opération. Cet effort de mémoire peut paraître considérable, surtout si les deux termes à additionner possèdent un nombre de chiffres assez important, mais, grâce à un entraînement méthodique, tout calculateur peut arriver à traiter aisément des exemples de plus en plus compliqués. Pour suivre le déroulement - d'ailleurs très simple - de l'opération, nous détaillerons colle-ci à la façon d'un calculateur mental débutant qui énoncerait à voix basse la suite des calculs qu'il effectue

- quatre mille et trois mille font *sept mille* ;

- trois cents et deux cents font cinq cents, ce qui fait un résultat partiel de *sept mille cinq cents* ;

- quarante et trente font soixante-dix, ce qui fait un nouveau résultat partiel de *sept mille cinq cent soixante-dix* ;

- deux et quatre font six, ce qui donne un résultat final de *sept mille cinq cent soixante-seize.*

Si le lecteur trouve quelque difficulté à traiter lui-même cet exemple par voie mentale, il devra, avant de le reprendre, s'entraîner sur des additions de deux nombres de deux, puis de trois chiffres, en évitant bien entendu tout report dans cette première étape. Ainsi s'habituera-t-il progressivement à retenir sans effort exagéré plusieurs nombres de deux, trois ou quatre chiffres. Au delà, un entraînement sérieux est nécessaire, â moins d'être spécialement doué pour le calcul mental ou d'employer des procédés mnémotechniques.

Abordons maintenant l'étude d'un exemple comportant des reports. Nous remarquerons au préalable que, l'opération étant faite de la gauche vers la droite, chaque report dans une addition de colonne entraîne la rectification du chiffre trouvé, auparavant, dans la colonne placée immédiatement à sa gauche. Cet inconvénient est certes assez important mais il ne suffit pas à compenser l'avantage qui résulte du fait que le résultat est obtenu dans l'ordre où il s'énonce.

Soit donc à additionner les deux nombres *quatre mille sept cent trente-quatre* et *trois mille cinq cent quatre-vingt-cinq*.
- quatre mille et trois mille font *sept mille*;
- sept cents et cinq cents font *mille deux cents*; le nouveau résultat partiel est donc *huit* (sept et un) *mille deux cents* ;
- trente et quatre-vingts font cent dix, la centaine s'ajoutant aux deux cents déjà trouvés, le nouveau résultat partiel est *huit mille trois* (deux et un) *cent dix*;
- quatre et cinq font neuf, le résultat final est donc *huit mille trois cent dix-neuf.*

Signalons que l'emploi de procédés particuliers permet d'accélérer certaines additions.

Soit par exemple à additionner quarante-trois et trente huit. Si l'on complète 38 à la dizaine supérieure (40), on lui ajoute deux unités que l'on doit, pour compenser, ôter de l'autre terme de la somme : celle-ci devient donc : quarante et un et quarante ; soit 81.

En résumé, le schéma opératoire est très simple.

Toute addition d'un nombre quelconque de termes se réduit à une série d'additions de deux nombres on doit ajouter le second terme au premier, le troisième au résultat obtenu, etc. (c'est la définition même de l'opération). Chacune de ces additions partielles se fait de la gauche vers la droite, chaque report nécessitant la rectification du chiffre antérieurement obtenu. La virtuosité dans l'addition mentale dépend certes, pour une part, des aptitudes personnelles, mais elle dépend aussi, et dans une très large part, de l'entraînement subi, spécialement par des exercices de mémoire des chiffres.

2. La soustraction. - Opération inverse de l'addition, la soustraction consiste, étant donnés deux nombres a et b, à chercher un troisième nombre c qui, ajouté au second, donne le premier (en arithmétique on suppose évidemment a>b, mais les règles de calcul sur les nombres algébriques permettent aisément de généraliser le procédé que nous décrirons).

La méthode classique de calcul écrit revient â opérer colonne par colonne, comme pour l'addition, c'est-à-dire à utiliser la propriété associative de l'opération, en opérant sur les unités successives d'ordre croissant. Le problème des reports se résout, corme on le sait, en extrayant, s'il est nécessaire, une unité de la colonne placée immédiatement à gauche de celle sur laquelle on opère.

Nous supposerons, comme pour l'addition, que les données sont énoncées oralement sans pouvoir être écrites, ce qui nécessite un effort de mémoire équivalent à celui que nous avons signalé. La marche de l'opération mentale diffère profondément du mécanisme classique et se rattache étroitement à un procédé introduit en calcul mécanique par Blaise Pascal : la méthode des compléments, qui consiste à remplacer la soustraction par un calcul de complément suivi d'une addition

10^n étant la plus petite puissance de 10 qui soit supérieure au nombre b à soustraire, nous appellerons complément du nombre b, la différence $c = 10^n - b$. Ceci étant posé, le principe de cette transformation est le suivant

$$a - b = a + 10^n - b - 10^n = a + (10^n - b) - 10^n = a + c - 10^n$$

On voit immédiatement que le complément c du nombre b est un nombre formé d'autant de chiffres que b, chacun de ses chiffres étant le complément à 9 du chiffre correspondant de b, sauf le dernier à droite qui est le complément à 10 du chiffre homologue. Les lecteurs familiarisés avec le calcul logarithmique sont habitués à employer couramment de tels compléments qui leur permettent de ramener toute soustraction de logarithmes à une addition.

Soit à soustraire 729 de 3 412. Le complément de 729 s'obtient chiffre par chiffre à partir de la gauche

deux, sept, un: 271

La somme de 3 412 et de 271 s'obtient par la méthode précédemment décrite : elle est égale à 3 683. Il ne reste plus qu'à soustraire de ce résultat intermédiaire le nombre 10^n soit ici 1 000 : le résultat final est donc 2 683.

Cette méthode générale est à employer dans la grande majorité des cas; cependant divers exemple, peuvent être traités plus rapidement, telles les soustractions sans report dont le résultat peut se trouve,. directement, chiffre par chiffre, à partir de la droite. Dans d'autres cas, on remplacera le nombre à soustraire par un autre plus simple, quitte à compenser ensuite sur le premier nombre l'écart introduit.

Par exemple, pour soustraire 38, on soustraira 40: et on ajoutera 2 au résultat obtenu.

Il n'est pas inutile d'insister sur le fait que seule une attention soutenue permet de choisir, dans chaque cas, la meilleure voie à suivre et d'obtenir rapidement le résultat exact.

3. La multiplication. - Multiplier mentalement deux nombres de un chiffre est un exercice auquel chacun de nous a été familiarisé dès l'école primaire par l'étude de la table de multiplication. Cet exercice de mémoire, si difficile pour certains élèves est absolument indispensable à la mise en œuvre du procédé classique de multiplication par voie écrite. Grâce â de nombreuses répétitions, la connaissance de cette table finit presque toujours par devenir machinale. Mais il ne faut pas oublier que la nécessité d'étudier au préalable notre table, dite improprement de Pythagore, a longtemps freiné l'emploi du calcul écrit. Si jusqu'au XVIIIe siècle, le calcul avec jetons a été employé dans tous les milieux non intellectuels, de préférence au "calcul à la plume", la table de multiplication en porte à coup sûr partiellement la responsabilité. Fort heureusement sa connaissance, regardée souvent comme une performance au XVIe siècle, est aujourd'hui universellement répandue et permet d'effectuer les opérations par voie orale ou écrite.

Quel que soit le procédé utilisé, la multiplication de deux entiers revient à additionner les produits partiels des diverses unités qui les composent.

Par exemple : $324 \times 75 = (300 + 20 + 4) \times (70 + 5) = 300\times70 + 300\times5 + 20\times70 + 20\times5 + 4\times70 + 4\times5$.

Le procédé classique de multiplication écrite groupe, dans un premier produit partiel, les produits de 5 par 300, 20 et 4 et, dans un second produit partiel, les produits de 70 par ces mêmes nombres; il ne reste plus qu'à additionner les produits partiels ainsi obtenus.

On peut très bien concevoir une multiplication mentale réalisée sur ce même schéma, mais, pour la raison précédemment signalée, il est alors préférable d'inverser l'ordre des produits partiels, calculant d'abord le produit de 70 par 324 et en lui ajoutant le produit de 5 par ce même nombre, Afin de pouvoir opérer ainsi, il suffit de savoir multiplier mentalement un entier quelconque par un nombre de un chiffre.

Soit par exemple à multiplier *trois cent vingt-quatre* par *sept*.

Le produit de trois cents par sept est égal à vingt et une centaines, soit *deux mille cent*.

Le produit de vingt par sept est égal à quatorze dizaines, ce qui fait un total provisoire de *deux mille deux cent quarante*. Le produit de quatre par sept est égal à vingt-huit, ce qui donne un produit définitif de deux mille deux cent soixante-huit.

La méthode suivie a été celle du calcul écrit, à ceci près que, les opérations étant faites dans l'ordre inverse, les reports ont nécessité des retours en arrière et des rectifications.

Une multiplication ordinaire de deux nombres de plusieurs chiffres nécessite le calcul des produits partiels successifs; chaque produit étant, dès qu'il est obtenu, ajouté à la somme des produits précédents, l'addition générale qui intervient à la fin d'une multiplication écrite est ici sans objet. La complexité d'un tel mécanisme est évidemment très supérieure à celle des opérations déjà étudiées et le calculateur novice devra agir avec beaucoup de prudence. En fait, par cette méthode, un calculateur peu exercé ne doit pas nourrir de buts trop ambitieux et doit pratiquement se borner aux produits d'un nombre de 4 ou 5 chiffres par un nombre de un chiffre et aux produits de deux nombres de deux chiffres. Pour pousser au delà, un sérieux entraînement est nécessaire si l'on ne veut pas s'exposer à de nombreuses erreurs.

Mais plusieurs autres procédés peuvent également être utilisés.

C'est ainsi que l'antique méthode égyptienne qui ramène toute multiplication à une suite de duplications et d'additions pourra rendre quelques services dans certains cas particuliers. Cette méthode revient à considérer le multiplicateur comme une somme de puissances de 2, c'est-à-dire, somme toute, à écrire ce nombre, dans le système binaire (de base 2), à la façon de la plupart des machines mathématiques électroniques modernes.

Soit par exemple à multiplier 37 par 11. La décomposition de 11 dans le système binaire est immédiate : $11 = 1 + 2 + 8 = 1 + 2 + 2^3$. La multiplication s'effectue en calculant les produits successifs du multiplicande par les différentes puissances de 2, puis en additionnant les produits qui correspondent aux puissances de 2 intervenant dans le multiplicateur : $37\times2 = 74$; $37\times2^2 = 74\times2 = 148$; $37\times2^3 = 148\times2 = 296$

Donc: $37 \times 11 = 37 (1 + 2 + 2^3) = 37 + 74 + 296 = 407$.

Si cette méthode est préférable à toute autre quand le multiplicateur est une puissance de 2 : 4, 8, 16, etc., dans les autres cas elle ne doit être employée que si la décomposition du multiplicateur en puissances de 2 est immédiate et si l'emploi d'aucune autre méthode plus directe n'apparaît possible.

C'est ainsi que l'exemple choisi pour l'explication ne devait pas être traité ainsi car, multiplier un nombre par 11, c'est ajouter ce nombre à son produit par 10 :

37 × 11 est égal à la somme de 370 et de 37, donc à 407. II est manifeste que ce procédé est ici beaucoup plus rapide que la méthode égyptienne.

Signalons enfin la méthode générale la mieux adaptée à l'esprit du calcul mental : c'est la méthode du produit en croix, appelée souvent méthode de Fourier, du nom du grand mathématicien français Fourier du début du XIX^e siècle, qui se borna à la généraliser. Cette méthode est citée au XIII^e siècle par Léonard Fibonacci et se trouve clairement expliquée, en même temps que sept autres procédés de multiplication, dans la *Suma de Arithmetica* du mathématicien italien Luca Pacioli (1484). La désignant sous le nom de "*crocetta*" (petite croix) ou de "*casella*" (petite maison, pigeonnier), Pacioli la qualifie de "*la plus fantaisiste et ingénieuse qu'aucune autre*" et l'admire comme "*belle, subtile et fart bien trouvée*".

Cette méthode du produit en croix consiste à grouper les divers produits partiels suivant l'ordre d'unités qu'ils représentent; ainsi est-elle analogue à la règle classique de multiplication des polynômes algébriques qui fait ordonner les divers produits partiels à mesure qu'on les obtient.

L'exemple d'un produit de deux nombres de deux chiffres permettra d'en saisir le mécanisme. Soit à multiplier 37 par 53.

Les égalités suivantes : $37 \times 53 = (30 + 7) \times (50 + 3) = (3 \times 5)$ centaines + $(3 \times 3 + 7 \times 5)$ dizaines + (7×3) unités, illustrent le schéma des opérations mentales à réaliser : calculer le nombre des centaines (15), calculer le nombre des dizaines (somme des deux produits 9 et 35), ajouter les deux nombres correspondants, en extrayant du second le nombre de centaines qu'il contient (on obtient 194 dizaines); calculer le nombre d'unités (21) et l'ajouter au résultat provisoire obtenu : le résultat final est 1 961.

S'il s'agit de nombres comportant plus de deux chiffres, l'opération mentale suppose une certaine virtuosité, car son schéma se complique quelque peu. Cependant, pour utiliser correctement la méthode du produit en croix, il suffit de prêter attention à deux phases essentielles

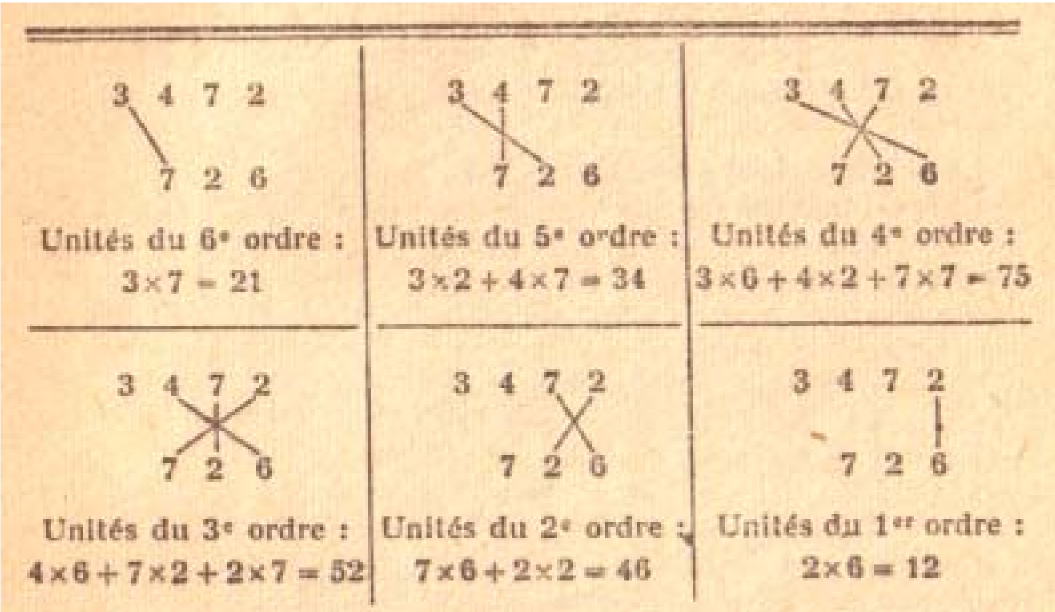
1. L'évaluation de l'ordre des unités supérieures de ce produit : ces unités étant le produit des unités les plus élevées des deux facteurs, leur ordre est égal à la somme des ordres de ceux-ci, diminuée de 1 (des centaines, unités du 3e ordre, multipliées par des mille, unités du 4e ordre, donnent des centaines de mille, unités du 6e ordre)[1].

2. Le calcul du nombre d'unités de chaque ordre il faut évidemment tenir compte de tous les produits partiels qui doivent y intervenir.

L'exemple suivant illustrera les difficultés qui se présenteront dans un tel calcul, même relativement simple

Soit à multiplier les deux nombres 3 472 et 726.

Les unités supérieures des deux facteurs étant respectivement du 4^{e} et du 3^{e} ordre, les unités supérieures du produit seront du 6^{e} ordre (centaines de mille). Les unités des divers ordres seront obtenues d'après les schémas suivants :



Deux difficultés essentielles se présenteront au calculateur mental dans la mise en œuvre d'un tel schéma opératoire. La première consiste à retenir de mémoire les deux facteurs du produit d'une façon suffisamment précise pour réaliser correctement les groupements de produits partiels sans aucune aide visuelle; pour réduire cet effort qui pourra paraître trop considérable à un calculateur peu exercé, nous conseillerons, au moins pour les premiers exercices, d'inscrire les facteurs dès qu'on les énonce et d'écrire également les chiffres successifs du produit à mesure qu'on les obtient, quitte à les rectifier pour tenir compte des reports qui apparaissent dans la suite des calculs. La seconde difficulté ne peut être éludée, car elle consiste dans l'effort d'attention nécessaire pour éviter toute erreur dans le groupement des produits ; mais un entraînement régulier permet de la surmonter assez rapidement.

Dans l'exemple choisi, les nombres suivants seront successivement obtenus

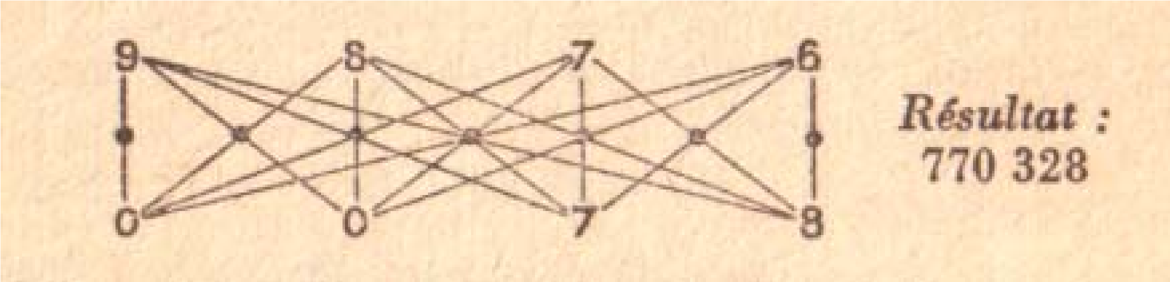
21	244	2 515	25 202	252 066	2 520 672
1ère étape	2^{e} étape	3^{e} étape	4^{e} étape	5^{e} étape	6^{e} étape

Le résultat final est donc 2 520 672.

Un exemple donné par Pacioli dans sa *Suma de Arithmetica* de 1484 illustre le schéma d'ensemble permettant d'obtenir les divers ordres d'unités du produit.

---

[1] Si l'on multiplie $10^{\mathbf{n}}$ -1 (unité du n^{e} ordre) par 10^{p} - 1 (unité du p^{e} ordre), on obtient $10^{\mathbf{n+p-2}}$ (unité du $[n + p – 1]^{e}$ ordre).



Pour montrer l'intérêt de cette méthode, signalons qu'elle est employée par presque tous les calculateurs rapides. Dans son petit ouvrage *Le calcul rapide facile pour tous*, Inaudi lui fait une place de choix et la désigne sous le nom de « méthode générale de la multiplication sans produits partiels ». Comme la plupart des calculateurs rapides il l'utilise d'une façon qui n'est pas à la portée de tous. Connaissant en effet par cour, non notre table de Pythagore limitée au produit 10 X 10, mais une table de multiplication étendue à tous les produits de deux nombres de deux chiffres (table 100 fois plus étendue que notre table ordinaire), il opère sur les nombres décomposés en tranches de deux chiffres à partir de la droite, ce qui lui permet de donner en moins de dix secondes le produit de deux nombres de 4 chiffres[2]. Il faut noter à ce sujet que si, pour les produits de deux nombres de 2 chiffres qu'ils donnent instantanément, ces calculateurs battent en rapidité des machines à calculer automatiques manipulées par des opératrices exercées et, s'ils égalent encore ces machines pour des produits de nombres de 4 chiffres, au delà la machine moderne triomphe sans conteste ; pour elle, l'effort à fournir est en effet proportionnel au nombre de chiffres du résultat, alors que pour le calculateur humain cette difficulté augmente de façon beaucoup plus rapide. On ne peut cependant comparer les calculateurs aux machines mathématiques modernes car, s'il est certain que ces « cerveaux électroniques » effectuent une multiplication de deux nombres de 20 chiffres en une infime fraction de seconde, le temps mort nécessaire à l'enregistrement des données les rend inaptes à des calculs aussi simples.

Signalons encore comme méthode générale la transformation d'un produit en différence de carrés par l'identité
$4\,ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$ Cette méthode est conseillée dès le Moyen Age par divers mathématiciens arabes et, au XVII^e^ siècle, J. Ludolff l'utilise pour effectuer le produit de deux nombres entiers à l'aide d'une table de carrés, ou mieux d'une table de quarts de carrés. L'emploi de telles tables est certes assez commode : c'est ainsi que la table, publiée en 1876 par J. Blater et allant jusqu'au nombre 200 000, permet de trouver rapidement les produits de deux facteurs ayant, chacun, jusqu'à 5 chiffres.

Sans pousser aussi loin, le calculateur mental qui connaît par cœur une table de carrés assez étendue peut utiliser cette méthode pour obtenir rapidement certains produits. C'est ainsi qu'au cours d'une démonstration au Palais de la Découverte, Wim Klein calcula avec une grande rapidité le produit 527 X 863, en le remplaçant par l'expression $(695)^2 - 68^2$, puisque $695 = \frac{527+863}{2}$ et que $168 = \frac{863-527}{2}$.

Divers procédés, plus particuliers, peuvent dans certains cas donner d'intéressants résultats. Servi par sa grande habileté et son entraînement très poussé dans la décomposition des nombres en produits de facteurs, Klein transforme très souvent les produits à calculer en d'autres plus simples.
Nous n'en donnerons que deux exemples qui illustrent l'ingéniosité nécessaire à la mise en oeuvre de tels procédés.

Ayant à calculer le produit 721 × 439, il le remplace par l'expression équivalente $\frac{721}{7} \times (439 \times 7)$, soit 103×3 073 dont il donne immédiatement la valeur : 316 519. Dans un autre exemple, le même calculateur transforme le produit d'une façon encore plus radicale : ayant à multiplier 546 par 836 il utilise les égalités :

$546 \times 836 = (6 \times 91) \times (11 \times 76) =(11 \times 91) \times (6 \times 76) = 1\,001 \times 456 = 456\,456$.

Mais il faut être très exercé pour ne pas passer plus de temps à rechercher des transformations qu'à effectuer la multiplication de la façon classique; aussi n'encouragerons-nous pas un calculateur novice à suivre cette méthode.

Terminons cette étude de la multiplication par voie mentale, par plusieurs remarques qui permettent de simplifier cette opération dans des cas assez étendus. Bon nombre de ces procédés particuliers reposent sur le fait que la multiplication par une puissance de 10: 10, 100, 1 000, etc., est immédiate, puisqu'elle revient au déplacement de la virgule vers la droite de 1, 2, 3 rangs ou à l'adjonction de 1, 2, ou 3 zéros à droite du nombre considéré, c'est-à-dire à un simple changement de nom des diverses unités qui composent le nombre initial.

La multiplication par 5 se fait en multipliant par 10 et divisant le résultat par 2 ; la multiplication par 25 se fait en multipliant par 100 et divisant le résultat par 4, etc. De même la multiplication par 0,25 équivaut à une simple division par 4 et la multiplication par 0, 75 se ramène à une multiplication par 3 suivie d'une division par 4.

Pour multiplier par 9, 99, 999, etc., il suffit de multiplier par 10, 100, 1 000, etc. et de soustraire le multiplicande du résultat obtenu. Ceci s'étend d'ailleurs à des multiples simples de 9, 99, etc. : par exemple, pour multiplier par 27, il suffira de

[2] Klein donne par cette méthode en une quinzaine de secondes le résultat du produit 231 789 × 156 727.

multiplier d'abord par 3, puis par 9, de même pour multiplier par 45, il suffira de multiplier successivement par 9 et 10, puis de diviser le résultat obtenu par 2.
Cette même méthode s'étend à d'autres multiplicateurs proches d'une puissance de 10. Tel est par exemple le cas de 11, 101, 1 001, etc. Pour multiplier un nombre par 11, il suffit de l'ajouter à son décuple; de là dérive une règle simple de multiplication par les premiers multiples de 11 : ainsi pour multiplier par 33, suffit-il de multiplier successivement par 3 et par 11.

Cette remarque peut encore se généraliser d'une façon plus étendue. Si l'on a par exemple à calculer 38 n, il est manifeste qu'il sera plus facile de calculer 40 n et de soustraire 2 n du résultat que d'ajouter 8 n à 30 n. Les utilisateurs des machines à calculer de type Odhner savent l'intérêt de cette remarque. Pour effectuer une multiplication à l'aide de cette machine, il faut en effet inscrire le multiplicande, puis l'ajouter à lui-même un nombre de fois égal au multiplicateur diminué de 1. La multiplication par 10, 100, 1 000 se faisant par simple déplacement du multiplicande commandé par la manœuvre d'une touche, et l'addition ou la soustraction du nombre inscrit, par un tour de manivelle effectué dans un sens ou dans l'autre, suivant le cas, la multiplication par 38 nécessite 3+ 7 = 10 tours de manivelle et une manœuvre de touche si l'on considère le multiplicateur sous la forme 30 + 8; elle nécessite que 4 + 2 = 6 tours de manivelle et deux manœuvres de touche, si l'on considère ce nombre sous la forme 40 - 2. La seconde méthode est donc ici beaucoup os rapide que la première. Aussi la plupart des machines à calculer, qui réalisent automatiquement ces opérations après simple inscription des données, sont-elles conçues de manière à suivre dans chaque cas le schéma opératoire le plus rapide soit en opérant uniquement par addition, soit en incorporant des soustractions dans le schéma d'ensemble.

La généralisation de cette remarque est à l'origine d'une méthode dite « multiplication complémentaire » qui, enseignée au Moyen Age et à la Renaissance, permet d'utiliser a table de multiplication limitée à 5 × 5. Malgré un certain regain de notoriété qu'elle connut au début du XIX^{e} siècle grâce à l'appui de Cauchy, cette méthode semble avoir maintenant disparu de l'usage courant.
Soit à effectuer le produit des deux entiers a et b ; on forme la somme a + b et on s'efforce de la décomposer en deux termes a' et b' satisfaisant à l'égalité a + b = a' + b' tels que le produit a'b' soit plus facile à calculer que le produit ab. Le produit ab peut alors se calculer à l'aide de l'une des identités :

$$ab = a'b' + (a - a')\ (b - a'), \text{ ou } ab = a'b' + (a - b')\ (b - b')$$

qui sont vérifiées grâce à la condition a + b = a' + b'.

Ainsi, si les deux entiers d'un chiffre a et b sont supérieurs , l'égalité

$$ab =10\ [a - (10 - b)]+(10 - a)\ (10 - b)$$

mène le calcul de ab à des multiplications portant uniquement sur des nombres inférieurs à 5.

De l'examen de toutes ces méthodes, si variées, tant dans leur principe que dans leur application, une certaine confusion pourrait naître dans l'esprit lu lecteur peu averti de la multiplicité des règles de calcul compatibles avec le principe de notre numération de position. Aussi résumerons-nous ana façon quelque peu schématique l'enseignement qui s'en dégage. Deux méthodes essentielles s'offrent aux calculateurs mentaux qui abordent l'étude de la multiplication : la méthode classique du calcul écrit, modifiée de façon à tenir compte du caractère particulier du calcul mental, et la multiplication en croix qui, si elle exige un apprentissage plus long, mène certainement aux meilleurs résultats. A cela il faut ajouter les procédés particuliers, spécialement pour les diviseurs de 10^{n} ou pour les nombres proches de 10^{n}. Les autres procédés ne seront étudiés qu'au moment où l'on sera bien entraîné avec les méthodes générales.

De toute façon, avant d'aborder une multiplication mentale, le calculateur déjà quelque peu exercé devra, par un examen rapide, déterminer au préalable la méthode qui lui semble devoir conduire au résultat de la façon la plus directe, avec le minimum de calculs et la sécurité maximum. Il n'opérera ensuite qu'avec prudence et suivant une progression sagement étudiée en n'abordant les exemples un peu complexes qu'une fois la technique mise au point pour les cas les plus simples.

CHAPITRE V

PSYCHOLOGIE ET PÉDAGOGIE DU CALCUL MENTAL

C) La pédagogie du calcul mental

1. Rôle du calcul mental. **-** Il n'est pas nécessaire de souligner à nouveau l'importance pratique du calcul mental qui répond si efficacement à diverses nécessités de la vie courante. L'école, qui doit préparer l'enfant à la vie en société et l'armer pour l'existence, ne peut ignorer cette discipline ù l'utilité si manifeste. Certes, la technique du calcul écrit ne doit pas être sacrifiée pour autant, mai: aux problèmes écrits doivent se joindre des exercices mentaux qui, tout en accoutumant l'enfant à gagner du temps en effectuant de tête la plupart des calculs simples, l'amènent à mieux réfléchir à la structure des problèmes qui lui sont posés. Le calcul mental constitue par ailleurs une excellente gymnastique intellectuelle qui, en obligeant l'enfant à faire travailler simultanément sa mémoire et son attention, confère plus de vigueur et de souplesse à son intelligence et oblige son esprit à discipliner. Cet exercice développe également mémoire des nombres, si nécessaire même en e cul écrit, et, en habituant l'élève à prendre contact plus intime avec l'individualité de chai. nombre, l'amène progressivement à envisager, da de nombreux cas, des simplifications opératoires. faut ajouter encore que si les exercices ont été pré parés et choisis avec discernement, ils excitera une vive émulation entre les élèves. Cette émulation aiguillonnera les esprits les plus lents, tout mettant en garde les intelligences plus vives tant. une précipitation génératrice d'erreurs.

L'exercice régulier et rationnel du calcul mental doit donc être pratiqué dans toutes les classes de l'enseignement du premier degré, et ceci, aussi bien pour son intérêt pratique (armer l'élève pour la vie et lui faire gagner du temps dans de nombreux calculs) que pour son intérêt proprement intellectuel (développer les facultés d'attention et de mémoire., plier l'intelligence à la gymnastique opératoire et t'amener à mieux saisir la structure des opérations, la signification abstraite des problèmes et les propriétés individuelles de chaque nombre). La pratique du calcul mental permet ainsi d'aboutir aux deux objectifs que le mathématicien Jules Tannery si justement à l'enseignement théorique du calcul à l'école primaire : « *Ce que les enfants ont besoin de comprendre, c'est le sens de l'opération, :'est ce qu'elle permet d'obtenir. En arithmétique, deux points importent : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire, au fond, faire comprendre les définitions, puis savoir faire correctement les opérations : le premier point est affaire d'intelligence ; le second de routine, ou pour parler mieux, d'habitude. Ne méprisez point cette routine-là.* »

La distinction faite par divers traités de pédagogie entre calcul mental, calcul écrit exécuté de mémoire et calcul oral, ne nous semble pas fondamentale. Le calcul écrit exécuté de mémoire n'est qu'une forme de calcul mental à la technique mal adaptée ; les opérations mentales ont en effet leurs méthodes propres et ne doivent pas être calquées sur le calcul écrit. Le calcul oral peut être considéré comme une étape intermédiaire entre l'emploi des procédés de calcul concret ou écrit et le calcul mental. Ainsi, l'apprentissage des tables d'addition et de multiplication relève-t-il essentiellement, dans ses premières étapes, du calcul concret et du calcul oral et, dans son stade final. du calcul mental.

2. Place du calcul mental dans l'enseignement élémentaire. - Par le travail d'abstraction qu'il nécessite, le calcul mental ne peut être introduit dans les toutes premières étapes de l'enseignement du calcul. C'est uniquement par les méthodes concrètes que l'enfant peut être initié à la connaissance des premiers nombres et aux opérations élémentaires qui s'y rapportent. Les premières séances de calcul ne doivent pas être des leçons, mais des exercices concrets amenant l'enfant à saisir successivement la notion de nombre concret, puis celle de nombre abstrait, qui suppose un effort intellectuel déjà très intense. Les opérations concrètes seront introduites une à une, quand l'enfant disposera d'une claire conscience de la signification et de la nature des premiers nombres. Les premiers rudiments de calcul mental n'apparaissent qu'au moment où la pratique méthodique des opérations concrètes amène l'enfant à concevoir la possibilité de résumer, à l'aide des nombres abstraits, les résultats obtenus à partir d'objets de natures différentes. Les résultats des premières opérations abstraites étant obtenus à l'aide d'un support concret, on initiera bientôt l'enfant à transcrire ces opérations par écrit, et à les énoncer oralement, puis mentalement. Le calcul mental intervient ainsi progressivement au moment où le support concret disparaît, pour être remplacé par la connaissance des tables d'addition, de multiplication et des règles algorithmiques. Dès ce moment, de petits exercices très élémentaires de calcul mental peuvent être posés, exercices que l'on compliquera à mesure que la connaissance des tables s'étendra et se perfectionnera ; ces petits problèmes doivent porter sur une opération unique que la présentation concrète de l'énoncé doit faire apparaître très clairement.

L'apprentissage des tables a constitué pendant très longtemps un exercice de mémoire dont la complexité et l'inintérêt immédiat rebutaient la plupart des élèves en leur donnant une première image, bien peu engageante, du calcul. Fort heureusement, de nombreux éducateurs se sont efforcés de rendre moins ardue cette étude, indispensable à la pratique des procédés opératoires classiques. Les excellents résultats qu'ils ont obtenus tiennent à ce qu'ils ont su «

rattacher cette étude au courant des intérêts matériels », au jeu et à l'attrait qui « doivent être le pivot de toute éducation ». En premier lieu, le maître devra insister sur l'intérêt pratique de cette étude ; s'il réussit à en persuader ses élèves, ceux-ci feront plus volontiers l'effort indispensable, n'ayant plus l'impression de travailler ainsi en pure perte. En second lieu, le maître devra s'efforcer de faciliter cette étude en suivant une progression rationnelle et en s'aidant de méthodes concrètes[3] ou de procédés imagés[4] .

A mesure qu'augmentent l'âge et le degré d'instruction des élèves, les exercices de calcul mental doivent devenir plus complexes et correspondre, non plus à une opération unique, mais à un véritable problème. Afin d'amener l'élève à prendre conscience de l'importance de ce mode de calcul, qui lui permettra de ne pas rester désarmé devant un problème très simple, s'il ne dispose pas d'une feuille de papier et d'un crayon, les énoncés abstraits devront être remplacés par des questions concrètes et simples, empruntées à la vie de chaque jour. Ces exercices doivent rester à la portée de la majorité des élèves, les problèmes trop compliqués devant être réservés à la pratique du calcul écrit.

Un enseignement du calcul mental donné sans méthode ni enchaînement, ne serait que d'une faible utilité. Les exercices doivent être soigneusement gradués et la signification et l'enchaînement des opérations qui y interviennent, précisés par une explication théorique préliminaire, faite par écrit au tableau noir et par une interrogation de contrôle, destinée à vérifier l'efficacité de cette explication. L'enseignement du calcul mental doit être intimement associé dans sa structure à l'apprentissage du calcul écrit. Après avoir expliqué comment effectuer une opération ou résoudre une certaine catégorie de problèmes par écrit, le maître doit montrer les services que le calcul mental peut rendre dans cette même voie. L'élève est ainsi doté de deux armes dont il connaît les modes d'emploi et les rôles respectifs. Tandis que le calcul écrit demeure l'outil de choix dans la résolution de problèmes quelque peu complexes, le calcul mental, qui oblige l'élève à envisager clairement le but à atteindre, combat l'habitude si répandue de calculer machinalement, sans chercher à juger de la vraisemblance et de la signification des résultats obtenus. L'élève est ainsi amené à juger de façon critique les résultats obtenus par écrit et le calcul mental lui permettra très souvent, sinon de contrôler les résultats, du moins de vérifier leur ordre de grandeur.

Terminons cette étude rapide de la place et du rôle du calcul mental dans l'enseignement élémentaire par quelques conseils pratiques. Le calcul mental doit être enseigné méthodiquement car l'improvisation est encore plus dangereuse dans ce domaine que dans certaines autres disciplines. Cet enseignement doit avoir une place régulière dans l'emploi du temps, comme il l'a déjà dans les programmes. Cette place est à côté du calcul écrit qu'il complète et auquel il s'associe. Le maître doit réfléchir à l'avance à la structure et à l'enchaînement des méthodes qu'il doit enseigner et préparer avec soin un choix d'exercices, parfaitement adapté à la gradation des difficultés et à la diversité des applications. Les leçons doivent être très fréquentes mais brèves : l'explication et la partie pratique ne doivent pas durer au total plus de dix minutes. Il ne faut pas oublier en effet que, par sa nature même, le calcul mental contraint l'élève à une attention soutenue et que la prolongation de tels exercices risquerait d'entraîner une fatigue exagérée, tout en amenant une baisse de rendement et d'intérêt.

Les exercices de calcul mental permettent aux maîtres de « laisser souvent reposer les plumes et de faire travailler les esprits » . Conduits avec adresse ils peuvent susciter une émulation très active et un intérêt soutenu. Au procédé ordinaire d'interrogation qui risque de laisser une bonne partie des élèves dans l'inactivité ou d'engendrer du désordre, beaucoup de maîtres préfèrent le procédé des réponses par écrit, dit procédé La Martinière, qui discipline l'interrogation et oblige toute la classe à participer activement. Chaque élève disposant d'une ardoise, d'une craie et d'un chiffon, le maître pose une question que toute la classe est sollicitée de résoudre de tête, sans répondre ni écrire. Après un temps de réflexion proportionné à la difficulté de la question posée, le maître donne un premier signal et chaque élève doit alois inscrire sur son ardoise le résultat qu'il a trouvé mentalement; à un second signal, proche du premier, les ardoises doivent être brandies vers le maître qui, en quelques instants, peut lire toutes les réponses, féliciter ceux qui ont trouvé le résultat exact, faire calculer ceux qui n'ont pas abouti et faire rectifier les erreurs. A un nouveau signal, les ardoises sont posées sur la table, et les chiffres qui s'y trouvaient, effacés ; un nouvel exercice peut alors être abordé. Cette méthode est rapide, efficace et attrayante ; elle crée beaucoup d'émulation tout en supprimant tout effort de discipline. Mais il est évident que pour qu'elle rende le maximum de services, le maître doit toujours faire trouver et corriger les erreurs et faire expliquer la marche que l'on devait suivre pour arriver le plus rapidement possible au résultat. Tout en amenant assez vite à une sorte d'automatisme, de mécanisation des procédés de calcul mental les plus courants, mécanisation qui procure un incontestable accroissement de rapidité, la pratique de cette méthode ne détourne pas l'élève de la recherche préalable de la méthode la plus appropriée à chaque exemple. Ces deux objectifs, qui contribuent de façon efficace à la formation de l'esprit, peuvent être ainsi simultanément poursuivis.

---

[3] Maria MONTESSORI, Pédagogie scientifique, T. II, Paris, 1935.

[4] Citons ici la table de multiplication en vers, illustrée, publiée par Jean Tardieu *Il était une fois, deux fois, trois fois ou la table de multiplication en vers,* avec des images d'E. Lascaux, Paris, 1947.

Sans revenir sur le détail des diverses méthodes opératoires qui ont été étudiées dans un chapitre spécial, nous nous bornerons à rappeler quelques directives générales. Pour l'addition, opérer progressivement, terme par terme, en commençant par la gauche sur les nombres décomposés, et en utilisant les simplifications qui peuvent apparaître. Pour la soustraction, la méthode classique et la méthode des compléments devront être enseignées l'une et l'autre, afin que l'élève puisse, dans chaque cas, choisir la voie la plus commode. Pour la multiplication, la méthode ordonnée ne peut convenir qu'à des élèves déjà très avertis. Une très grande prudence est nécessaire, la multiplication mentale dépassant vite les possibilités d'un élève moyen ; de ce fait les cas particuliers élémentaires joueront un rôle essentiel dans les exercices. La division ne devra être entreprise que pour des diviseurs d'un chiffre ou très particuliers: puissances de 10, 25, etc.

Cette pratique du calcul mental donne à l'élève des habitudes de logique, d'attention et d'ordre, de réflexion, de sens concret et de prudence, de vivacité et de maîtrise de soi, tout en le rendant capable « de comprendre l'aspect quantitatif de son milieu et de réagir intelligemment devant les problèmes qui surgissent dans la vie de l'individu et dans celle de la société ».

3. Perfectionnement de la technique. - Sans peut-être lui donner une place suffisante, l'enseignement primaire n'ignore pas le calcul mental et ses élèves possèdent, pour la plupart, un entraînement qui leur permet d'aborder avec quelques chances de succès les problèmes élémentaires posés par la vie courante. Mais un tel entraînement doit être poursuivi si l'on veut que les aptitudes au calcul se maintiennent.

L'enseignement commercial fait avec raison une place assez considérable au calcul mental et s'efforce de perfectionner la technique opératoire de ses élèves, tout en l'orientant vers des problèmes plus spécialisés. Le premier objectif qu'il se propose est d'améliorer la pratique des quatre opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division, en habituant à opérer sur des nombres de plus en plus grands avec rapidité et sécurité. Son second objectif consiste à adapter cette technique aux opérations commerciales et bancaires les plus courantes.

Dans l'enseignement normal du second degré, le calcul mental devrait également conserver une place assez importante. Les habitudes de contact avec le concret, d'attention et de maîtrise de soi qu'il donne, peuvent en effet être exploitées d'une façon très fructueuse, sinon dans l'étude du programme d'arithmétique et d'algèbre, du moins dans la résolution des exercices d'application. Malheureusement l'étendue des programmes et l'exiguïté de l'horaire ne permettent pas aux professeurs de poursuivre cet entraînement d'une façon intensive. Cependant, on ne saurait trop recommander, à l'occasion d'une révision ou d'une correction orale d'exercices, de maintenir les élèves dans un état d'esprit favorable à l'emploi des procédés de calcul mental. Certes on ne peut envisager de traiter ainsi des problèmes trop complexes, mais le calcul mental permet, en quelques instants, de vérifier l'ordre de grandeur d'un résultat obtenu par une autre voie ou d'accélérer une opération algébrique. De plus, au moment où l'élève se trouve en contact avec les problèmes concrets posés par l'étude de la physique, cet entraînement au calcul pourra rendre les services les plus précieux. Les élèves qui abordent l'enseignement des mathématiques ont trop souvent tendance à oublier le rôle du calcul et à minimiser son importance devant celle de la théorie. Certes, mathématiques et calcul sont deux disciplines différentes, et le mathématicien de profession s'efforce toujours, à juste titre, de substituer les raisonnements théoriques aux vérifications numériques. Mais, dans la réalité concrète, en face de laquelle se trouveront plus tard la plupart des élèves formés par notre enseignement, l'élément numérique reprend toujours une place de premier plan. Aussi serait-il bon - sans négliger pour autant la formation proprement mathématique de nos élèves - de ne jamais leur laisser perdre de vue l'aspect numérique des problèmes qu'ils résolvent et de maintenir chez eux un entraînement régulier aux méthodes de calcul numérique et, en particulier, à celles du calcul mental.