

Nouvelle Collection scientifique
Directeur : Émile Borel

Science et Philosophie

PAR

JULES TANNERY

AVEC UNE NOTICE

PAR

ÉMILE BOREL

Professeur à la Sorbonne
Sous-directeur de l'École Normale Supérieure

SEPTIÈME MILLE

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

Science et Philosophie

PAR

Jules TANNERY

AVEC UNE NOTICE

PAR

Émile BOREL

Professeur à la Sorbonne.

SIXIÈME MILLE



LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1924

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE par Émile Borel

PREMIÈRE PARTIE : PHILOSOPHIE

CHAPITRE PREMIER : LA CONTINUITÉ ET LA DISCONTINUITÉ DANS LES SCIENCES ET DANS L'ESPRIT

CHAPITRE II : LE ROLE DU NOMBRE DANS LES SCIENCES

CHAPITRE III : L'ADAPTATION DE LA PENSÉE
A Monsieur Félix Le Dantec

CHAPITRE IV : LA PHILOSOPHIE DE M HENRI POINCARÉ

CHAPITRE V : LES PRINCIPES DES MATHÉMATIQUES

1. - Logistique et Arithmétique
2. - Géométrie
3. - Mécanique

CHAPITRE VI : LA PSYCHOPHYSIQUE : A propos du logarithme des sensations

DEUXIÈME PARTIE : ENSEIGNEMENT ET MÉTHODES

CHAPITRE VII : POUR LA SCIENCE LIVRESQUE

CHAPITRE VIII : LES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

CHAPITRE IX : DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

CHAPITRE X : L'ARITHMÉTIQUE

1. - Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école
2. - Sur un théorème d'arithmétique

CHAPITRE XI : L'ANALYSE

1. - Préface de l'Introduction à la théorie des fonctions d'une variable
2. - Préface des leçons d'algèbre et d'analyse
3. - Un livre d'analyse

CHAPITRE XII : LA GÉOMÉTRIE

CHAPITRE XIII : QUESTIONS DIVERSES D'ENSEIGNEMENT ET DE MÉTHODE

- 1 - Une enquête sur la méthode de travail des mathématiciens
- 2 - L'Économie politique et les mathématiques
- 3 - Un livre de M. Laisant
- 4 - Sur la définition des unités dérivées

PRÉFACE

par Émile Borel
(Pages I à XVI)

Jules Tannery¹

24 mars 1848 - 11 novembre 1910

C'était un jeudi; le matin, Jules Tannery avait causé avec des élèves, avec des collègues, s'était intéressé à leurs affaires particulières avec cette bienveillance toujours en éveil et jamais banale qui fut son secret; l'après-midi, dans une réunion où l'on s'occupait des intérêts généraux de l'Université, il avait parlé avec l'élévation de pensée qui lui était coutumière; c'est au cours de cette réunion qu'il sentit les premières atteintes du mal, il put rentrer chez lui, en voiture, accompagné d'un de ses collègues; mais son état ne tarda pas à s'aggraver et à 3 heures du matin, tout était fini. Ce vendredi-là restera dans les souvenirs de tous ceux qui l'aimèrent; dans les couloirs de l'École normale, dans les rues environnantes, dans tout le quartier universitaire, on s'abordait comme dans une maison en deuil; on avait peine à croire au malheur subit; on se rappelait combien, à la rentrée des vacances, tous les amis de Tannery s'étaient réjouis en le trouvant d'apparence mieux portant.

Nul ne fut étonné d'apprendre qu'il avait depuis longtemps fait connaître son désir d'avoir des obsèques aussi simples que possible; on jugea cependant que ce n'était point enfreindre ses volontés que de réunir, le dimanche, avant le départ du convoi funèbre, les élèves de l'École normale en une cérémonie de famille, sans apparat et sans publicité. M. Ernest Lavisse, directeur de l'École, et M. Paul Painlevé, qui fut l'un des premiers élèves de Tannery à l'École et resta l'un de ses meilleurs amis, traduisirent brièvement l'émotion de tous les assistants. Ceux-ci eussent été bien plus nombreux, si l'on n'avait tenu à conserver à cette réunion le caractère intime qu'eût souhaité celui que l'on pleurait. aurait certainement été très touché de savoir combien de ses élèves et amis habitant la province ont regretté de ne point avoir été prévenus à temps pour venir lui rendre un dernier hommage; mais il n'eût pas admis qu'on les y eût encouragés, fût-ce de la manière la plus discrète.

Je voudrais que les quelques pages qui suivent répondent entièrement à son idéal de véritable simplicité et de sincère modestie; je ne puis oublier cependant que le premier des enseignements qu'il me donna fut de servir la vérité et de mettre, comme il le disait volontiers, le plus d'accord possible entre les écrits et les réalités : je m'efforcerai surtout de ne point laisser l'émotion altérer la sincérité intellectuelle qu'il appréciait par-dessus tout.

*

* *

Jules Tannery naquit le 24 mars 1848 à Mantes (S.-et-O.); il fit ses études au lycée de Caen; en 1866, à peine âgé de dix-huit ans, il fut reçu élève de l'École normale supérieure dans la section des sciences; il avait hésité à se présenter dans la section des lettres, pour laquelle ses aptitudes n'étaient pas moins grandes. « *Combien peu d'entre nous, disait M. Lavisse, ont connu une telle hésitation* ». Reçu agrégé en 1869, après ses trois années d'École, il fut d'abord professeur de lycée, à Rennes, puis à Caen; il revint en 1872 à l'École normale comme agrégé-préparateur de mathématiques; il termina en moins de deux ans sa thèse (1874); l'année suivante (1875), il fut délégué dans une chaire de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, puis suppléant à la Sorbonne de M. Bouquet, dans la chaire de mécanique physique et expérimentale (1875-1880); en 1881, il fut nommé maître de conférences à l'École normale et trois ans plus tard (1884), sous-directeur des Études scientifiques; il devait conserver cette double fonction jusqu'à sa mort : les changements introduits en 1904, dans l'organisation administrative de l'École normale modifièrent ses titres; il fut professeur de calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, délégué à l'École normale et sous-directeur de l'École normale supérieure de l'Université de Paris; mais ce furent bien en réalité les mêmes fonctions qu'il exerça au point de vue de l'enseignement et à peu près les mêmes au point de vue administratif; on peut résumer d'un mot cette longue période de sa vie : il aima l'École normale et s'y fit admirer et aimer. Cependant, bien qu'il ne recherchât jamais les avantages matériels ni les honneurs

¹ Cette notice, parue dans la *Revue du Mois* du 10 janvier 1911, a été reproduite ici sur le désir de M^{me} Jules Tannery.

et les refusât souvent, d'autres occupations étaient venues prendre place à côté de celles qui étaient le centre de sa vie intellectuelle : une mention spéciale doit être faite pour le *Bulletin des Sciences mathématiques* auquel, dès 1876, il consacra beaucoup de temps et beaucoup de talent. De 1877 à 1881, il avait été membre du jury d'agrégation des sciences mathématiques; il fut depuis 1882 jusqu'à la fin, maître de conférences à l'École normale supérieure d'enseignement secondaire des jeunes filles (École normale de Sèvres); on ne peut énumérer toutes les commissions et tous les comités dans lesquels l'élévation de son esprit et de son caractère et sa parfaite connaissance des hommes ont rendu des services éminents. En 1907, il fut élu membre libre de l'Académie des Sciences, au fauteuil laissé vacant par Brouardel.

Telle fut sa vie publique; je croirais trahir sa confiance en parlant ici de sa vie de famille : ce que je pourrais en dire, tous ses amis le savent, et les autres n'ont aucun intérêt à le savoir. Qu'il me soit donc permis d'offrir simplement à M^{me} Jules Tannery et à ses enfants l'hommage ému de ma sympathie dans le malheur dont ils peuvent seuls connaître toute l'étendue.

*
* *

C'est les principes des mathématiques et la façon de les exposer qui m'ont surtout préoccupé; je me suis particulièrement appliqué à méditer les fondements de l'analyse; j'ai essayé d'en approfondir les principes; j'ai tourné mes efforts vers l'enseignement, la coordination et la divulgation des vérités acquises, bien plus que je n'ai cherché à en découvrir de nouvelles.

Si l'on prenait à la lettre cette appréciation, on risquerait de se faire une idée singulièrement incomplète de l'influence exercée par Jules Tannery sur les progrès de l'analyse mathématique.

Nous ne pouvons étudier ici ses mémoires originaux² ; à côté d'eux, il conviendrait de citer aussi les parties originales des ouvrages d'exposition dont nous parlerons tout à l'heure; Tannery n'était pas de ceux qui tirent, comme on dit, plusieurs moutures d'un même sac; et si, dans ses livres, il ne manquait jamais de mentionner avec un soin minutieux qu'il devait à tel de ses élèves un fragment de démonstration ou la plus claire intelligence d'une idée, il était loin d'avoir les mêmes scrupules historiques lorsqu'il était seul en cause; aussi beaucoup de ses lecteurs ignorent-ils combien est grande sa part personnelle dans des chapitres où la perfection didactique de l'exposition tend à laisser croire qu'il s'agit de choses depuis longtemps connues. Faire le tri de ce qui lui revient exigerait un travail considérable, qu'il n'aurait pas approuvé; mais il convenait de signaler ce trop rare désintéressement scientifique.

Il est enfin une autre forme sous laquelle l'action de Jules Tannery sur les progrès des mathématiques a été considérable : c'est par l'intermédiaire de certains de ses élèves. Et je ne parle pas ici de l'influence générale de son enseignement, dont je tâcherai d'indiquer tout à l'heure l'importance; je fais allusion à des découvertes mathématiques précises et importantes, qui n'auraient probablement pas été faites si tel mode de raisonnement mathématique n'avait pas été très précisément suggéré par Tannery. Si l'on écrit un jour une histoire sincère du développement de la pensée mathématique dans ces trente dernières années, et dans celles qui suivront, cette influence devra être signalée et la place qu'occupera Jules Tannery parmi les mathématiciens de son époque apparaîtra alors comme plus importante que celle de bien de savants dont la production apparente a été considérable.

² Il suffira d'en citer quelques-uns pour donner une idée de la variété et de l'étendue de ses travaux.

- Sur les équations différentielles linéaires à coefficients variables (Thèse de Doctorat; *Annales de l'École normale*, 2^e série, t. IV).
- Sur l'équation différentielle linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. - Sur quelques propriétés des fonctions complètes de première espèce (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, & LXXXVI).
- Sur une équation différentielle linéaire du second ordre (*Annales de l'École normale*, 2^e série, t. VIII).
- Lettre à Weierstrass (Monatsberichte der Akademieder Wissenschaften zu Berlin, 1881).
- Sur les Intégrales eulériennes (*Comptes rendus*, t. XCIV).
- Sur la suite de Schwab (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. V).
- Note relative aux formes linéaires du troisième degré (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. I.)
- Sur les fonctions symétriques des différences des racines d'une équation (*Comptes rendus*, t. XCVIII).
- Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XVI).

*
* *

Mais ce ne fut pas seulement un mathématicien; ce fut aussi un professeur de mathématiques; son influence sur l'enseignement fut considérable et se fit sentir à tous les degrés. Elle a été parfois critiquée de très bonne foi par des amis désintéressés de la science; je crois que ces critiques proviennent d'un malentendu, que Tannery n'avait pas cru possible et qu'il a tout fait pour éviter dès qu'il s'est rendu compte que sa pensée avait pu être mal interprétée. n'a jamais pensé, en effet, que les méthodes d'enseignement les plus abstraites fussent les meilleures; et nul plus que lui n'a travaillé aux réformes par lesquelles l'enseignement des mathématiques doit être rapproché des réalités; ce n'est pas de sa faute si ces réformes n'ont point encore donné tout ce qu'on aurait pu en attendre et si ce mouvement, parti de chez nous, est en train, comme il arrive trop souvent, de se propager surtout à l'étranger d'où il nous reviendra ... plus tard. Ce qu'il a toujours pensé, c'est que de futurs professeurs ne devaient point ignorer les fondements logiques des sciences qu'ils enseignaient; s'ils ne doivent pas tout dire à leurs jeunes élèves, il ne faut pas que cela soit par ignorance, mais par une claire conscience de leur devoir à l'égard d'intelligences en voie de formation. Si vraiment quelques-uns se sont mépris et ont cru de bonne foi qu'il faut enseigner la théorie des fractions à des élèves de cinquième de la même manière qu'à des candidats à l'agrégation, cela prouverait simplement que les qualités de bon sens ne vont pas toujours de pair avec la profondeur de l'intelligence. Mais tout dans l'enseignement comme dans les écrits de Tannery met en garde contre une telle erreur, qui a été fort rare, si elle s'est réellement produite, et qu'on ne saurait en aucun cas lui reprocher.

Son influence sur l'enseignement ne s'exerçait pas seulement par les conseils qu'il donnait à ses élèves de l'Ecole normale; les leçons qu'il leur faisait parfois lui-même sur des sujets variés étaient un excellent exemple; il avait d'ailleurs fait ses preuves comme professeur d'enseignement secondaire; un de ses anciens élèves de spéciales au lycée de Caen, aujourd'hui professeur à l'Ecole polytechnique et membre de l'Académie des sciences, me disait récemment combien Tannery avait contribué à la formation de son esprit par sa méthode d'enseignement : le cours, réduit aux choses vraiment essentielles, était terminé en quatre mois, et la moitié de l'année scolaire restait pour une révision accompagnée de nombreux exercices.

*
* *

Cette influence pédagogique lui survivra, grâce à ses livres. Ses *Leçons d'arithmétique*, son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, ses *Leçons d'algèbre et d'analyse* pour ne citer que les principaux, sont des modèles de clarté et de précision. Les *Éléments de la théorie des fonctions elliptique* (en collaboration avec M. Jules Molk) doivent être mentionnés à part, car ce n'est pas seulement un excellent livre d'enseignement, mais aussi une œuvre scientifique.

Il n'est pas possible à un professeur consciencieux d'enseigner sur les sujets qu'il a traités sans avoir étudié ses livres. Ceci ne veut pas dire que chacun soit tenu de le suivre pas à pas : nul plus que lui n'aurait protesté contre cette conclusion dogmatique; il savait que l'enseignement est essentiellement affaire individuelle, au double point de vue du maître et de l'élève; ce qui est excellent ici peut être détestable ailleurs. Mais il y a toujours, pour un maître intelligent, grand profit à entrer en contact avec une pensée aussi lucide et aussi profonde que celle de Tannery, même si ses conceptions particulières ou la nature de ses élèves le conduisent à suivre d'autres chemins.

S'il m'est permis de faire appel à des souvenirs personnels, je voudrais dire quelle reconnaissance particulière je garde à l'auteur de *l'Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* ; j'ai eu la bonne fortune d'avoir ce livre entre les mains avant d'entrer en mathématiques spéciales et de me trouver ainsi directement en contact avec lui : ce fut certainement la plus intense des joies intellectuelles que m'ait jamais procurée une lecture scientifique. Ceux qui ont lu ce livre après que les matières leur avaient été déflorées ne peuvent pas, je crois, se faire une idée complète de l'enchantement produit sur un esprit neuf par cette ordonnance simple, claire et majestueuse, qui se déroule comme un fleuve limpide sur lequel on se laisse doucement entraîner par le courant, sans fatigue, avec une admiration toujours plus vive et une curiosité toujours plus aiguë. Nulle influence n'a plus que celle-là contribué à m'orienter vers la science pure et, parmi toutes les raisons que j'ai de conserver toujours à l'égard de mon maître des sentiments d'affectueuse

reconnaissance, il n'en est peut-être pas de plus profonde que l'impression produite par ce livre³. Beaucoup de mes contemporains, je le sais, partagent tout à fait ces impressions.

*
* *

Jules Tannery fut aussi un administrateur et à bien des yeux, les vingt-six années qu'il a passées comme sous-directeur de l'École normale resteront l'essentiel de sa vie. Ce serait là une idée bien incomplète d'une nature aussi riche; mais, si ses fonctions administratives ne furent pas toute sa vie, c'est peut-être là qu'à côté de bien des tracasseries et de bien des soucis, il trouva ses plus grandes joies. Car il était de ceux pour qui le bonheur consiste surtout dans le bien qu'on fait aux autres, et qui, loin d'exiger la reconnaissance, ne la tolèrent que chez ceux auxquels ils portent une affection particulière. Il n'avait point l'âme administrative, s'il faut entendre par là une aptitude abstraite à résoudre les questions concernant les personnes en oubliant que chacune de ces personnes est un individu : et sans doute cette aptitude est-elle indispensable à ceux qui sont appelés à diriger de haut de très grandes administrations. Tannery était, au contraire, absolument incapable de comprendre qu'il pût exister deux cas identiques : M. A... et M. B... n'étaient jamais pour lui *deux* élèves de l'école, ou *deux* professeurs agrégés de quatrième classe; c'étaient M. A... et M. B..., c'est-à-dire deux individus dont l'un avait l'esprit distingué et l'autre l'esprit médiocre, dont celui-ci était bon professeur, tandis que l'autre enseignait assez mal, etc.. Il est certainement bien plus aisé de se référer toujours à un « précédent »; car il n'est pas toujours commode de laisser entendre à M. B... les raisons pour lesquelles on se décide en ce qui le concerne; Tannery y parvenait cependant presque toujours et il savait ne jamais blesser personne, grâce à sa finesse et à son tact exceptionnels : il arrivait cependant parfois qu'il n'était pas compris de ceux qui étaient décidés par avance à ne pas comprendre... mais il ne leur en voulait jamais de leur incompréhension.

Il n'était pas moins aimé et apprécié à l'École normale de Sèvres qu'à celle de la rue d'Ulm; il faudrait citer entièrement l'étude de Mlle Anna Cartan, dans le *Bulletin des anciennes élèves de Sèvres* ; en voici du moins quelques lignes :

:

A Sèvres il nous connaissait toutes; il s'intéressait à chacune de nous et lui témoignait une bienveillance active. Il apportait dans le bien qu'il faisait une délicatesse telle que ses obligées n'osaient divulguer le bienfait rendu et gardaient jalousement pour elles ce qui n'était connu que du maître et de l'élève. Elles savent bien, celles qui eurent le bonheur de lui devoir beaucoup, jusqu'à quel point il fut bon; elles savent aussi qu'en retour des services rendus, M. Tannery ne désirait qu'un peu d'affection.

Dans les commissions et les comités où se discutent souvent d'importantes questions, la caractéristique de Tannery était d'élever toujours le niveau de la discussion; par sa sincérité, par la noblesse de sa pensée, il créait véritablement une atmosphère plus saine que celle où s'agitent seulement les intérêts personnels. Dans ces discussions, une de ses caractéristiques était son incapacité absolue à oublier les bons arguments qui militaient en faveur de l'opinion opposée à la sienne; il n'était pas de ceux qui, après avoir pesé le pour et le contre, et constaté après hésitation que les raisons pour leur paraissent l'emporter, déclarent froidement avec toute leur autorité et toute leur influence que les raisons contre n'ont jamais existé à leurs yeux. Cette sincérité dans la discussion serait sans doute une faiblesse dans une réunion publique; peut-être n'en est-il pas de même dans des assemblées peu nombreuses, dont les membres se connaissent et s'apprécient à leur juste valeur.

Une autre singularité de Tannery était d'écouter les arguments et d'en tenir compte quand ils lui semblaient justes. Il ne se serait pas approprié le mot trop sceptique attribué à un grand homme d'État : certains discours ont influé sur ses votes; on en pourrait citer des exemples précis.

Au temps où la sévérité relative du règlement de l'École normale amenait les élèves à souhaiter parfois quelque adoucissement à la règle, ils le trouvaient toujours disposé à faire fléchir les consignes dont le caractère était visiblement puéril et conventionnel. Par contre, il était ferme et sévère lorsqu'une sérieuse question de moralité était en jeu; je pourrais citer un cas où, un élève s'étant rendu coupable d'un

³ La nouvelle édition de cette *Introduction* a été entièrement remaniée et étendue; le second volume en a paru très récemment; ce fut la dernière œuvre de Tannery.

manquement grave, il ne voulut pas sanctionner le pardon indulgent du professeur de la Sorbonne mêlé à l'affaire.

Tous ses anciens élèves allaient à lui avec confiance, et il ne les décevait jamais. Beaucoup ne se bornaient pas à l'entretenir de questions scientifiques et de carrière; il était souvent leur confident dans les questions les plus intimes, et nul ne sait tous les services délicats qu'il a ainsi rendus. Aussi était-il universellement aimé, mais en même temps respecté, car on sentait que sa bonté naturelle n'avait rien de commun avec la facile bonhomie des âmes médiocres. Son influence sur les élèves de l'École normale pendant ses vingt-six ans fut considérable; j'ai déjà dit quel rôle on doit lui attribuer dans le progrès des mathématiques; mais il eut aussi parfois une action importante sur des physiciens et des naturalistes; certains d'entre eux, et non des moindres, ne cachent pas quelle reconnaissance ils lui gardent des habitudes de discipline intellectuelle qu'il leur a fait prendre.

A beaucoup d'entre nous, il apprit que la sincérité intellectuelle, la claire compréhension de sa propre pensée, la défiance vis-à-vis des mots qui ne recouvrent rien, ne sont pas seulement des qualités intellectuelles, mais aussi des qualités morales. Et si, au moment d'une crise qui divisa la conscience française, il jugea que ses fonctions administratives ne lui permettaient pas une certaine forme d'action publique, qui n'était d'ailleurs pas dans son tempérament, et se contenta de faire connaître publiquement et nettement son opinion, on peut être certain que les habitudes de pensée qu'il créait autour de lui jouèrent un rôle essentiel dans l'élan superbe qui se produisit à l'École normale en faveur de la Justice et de la Vérité.

*
* *

Ce fut aussi un philosophe. Il s'intéressait surtout, d'une part à la logique des sciences, et d'autre part à ce que l'on doit peut-être encore appeler la métaphysique, faute d'un meilleur vocable.

Ses écrits philosophiques sont très dispersés; il avait projeté de les réunir en un volume; ce projet sera prochainement réalisé sur le plan même qu'il avait conçu⁴. On verra mieux alors l'unité et l'importance de sa doctrine. Il est, je crois, impossible de la résumer sans la mutiler et je ne m'y essaierai pas : je préfère renvoyer les lecteurs de cette *Revue* à deux articles qu'il a publiés ici même et dont l'un est relatif à la logique des sciences⁵ tandis que l'autre est plutôt métaphysique⁶. Dans ce dernier, il livre le fond de sa pensée sur quelques-uns des plus grands problèmes qui aient préoccupé les hommes. Cette pensée est complexe, car son intelligence était trop critique et trop profonde pour se satisfaire d'aucune solution simpliste; mais si nul mieux que lui peut-être n'a senti les nuances de la vie intérieure, il n'a jamais eu assez d'orgueil intellectuel pour mépriser la raison. Aussi sa métaphysique ne pouvait-elle compter sur les suffrages de ceux dont l'admiration aveugle et hyperbolique n'est déterminée que par le désir secret de voir renverser les idoles modernes au profit des idoles anciennes; il ne satisfaisait pas non plus ceux pour qui les explications mécaniques de l'univers sont absolument claires et suffisantes; mais, s'il n'avait pas eu l'horreur véritable de toute publicité, s'il ne s'était pas appliqué au contraire à ne pas se poser en créateur de métaphysique, son nom aurait été vite connu du grand public comme celui d'un de ces philosophes qu'il est de mode d'admirer d'autant plus qu'on les a moins lus. Il n'avait aucun goût pour ce genre de notoriété; il ne s'était même pas décidé sans peine à ce projet de réunion de ses écrits trop dispersés; juge toujours trop sévère pour lui-même, il disait volontiers que « *cela n'en valait pas la peine* »; le même sentiment l'avait amené à laisser inédits certains manuscrits dont il serait bien désirable qu'une partie au moins soit publiée⁷. C'est seulement après

⁴ C'est au volume présent que je faisais allusion. Ce volume avait été promis par Jules Tannery à la Collection Scientifique pour les premiers mois de 1911 et il aurait certainement été prêt en temps utile, car Tannery en avait souvent parlé; il projetait d'écrire quelques pages pour relier entre eux certains fragments : on y a suppléé en reproduisant des extraits de ses analyses dans le *Bulletin des sciences mathématiques* dont les lecteurs apprécieront le très grand intérêt et la grande importance pour l'histoire de sa pensée. On a supprimé, autant que possible, dans ces extraits d'analyse, ce qui n'avait d'intérêt que comme *compte rendu* de livre, pour conserver la pensée propre de Tannery.

⁵ De la Méthode en mathématiques, *Revue du Mois* du 10 janvier 1908, t. V, p. 5; cet article a été reproduit dans la *Méthode dans les Sciences* ; on doit signaler aussi comme très important l'article sur le Rôle du nombre dans les sciences (*Revue de Paris* 1895, t. IV) (ci après p. II).

⁶ L'Adaptation de la pensée (*Revue du Mois* du 10 août 1906, t. II, p. 129) (ci-après, p. 40).

⁷ Depuis que ceci a été écrit, ses *Pensées* ont paru dans la *Revue du Mois*.

ces publications diverses qu'on pourra essayer de reconstituer son système philosophique; je serais étonné que cette œuvre ne tente pas quelque jeune philosophe et ne soit alors pour le public instruit une véritable révélation.

*
* *

Je devrais dire aussi quel écrivain admirable fut Tannery; lettré délicat, poète à ses heures, il alliait d'une manière singulièrement rare l'élégance et la pureté du style à la précision scientifique de la pensée. Dans sa longue collaboration au *Bulletin des sciences mathématiques*, il édifia une œuvre critique importante et qui mériterait une étude particulière. Sous une forme toujours courtoise, avec une ironie très douce et une finesse très enveloppée, il savait réunir l'exactitude détaillée du compte rendu, la sincérité du jugement, l'originalité des réflexions personnelles suggérées par l'œuvre analysée : il a parfois suffi d'une seule de ces trois qualités pour fonder une réputation de critique. Le trait était quelquefois assez léger pour n'être aperçu que du lecteur averti; je ne suis pas sûr que l'auteur d'une compilation de problèmes avec solutions n'ait pris pour un éloge cette conclusion : « *Monsieur X a donné aux candidats à la licence d'excellents exemples des solutions qu'on attend d'eux* ».

Le travail du *Bulletin* aurait suffi à absorber toute l'activité scientifique d'un homme; il en parlait si peu que beaucoup en ignoraient l'importance.

Cette façon de procéder lui était d'ailleurs coutumière; pendant longtemps, il assumait tous les ans la lourde tâche des examens oraux d'entrée à l'École, tandis que le second examinateur de mathématiques ne voyait son tour revenir que tous les trois ans; en même temps, il révisait chaque année les épreuves écrites du concours pour les bourses de licences. Lorsque les deux concours réunis représentèrent une charge plus que doublée, il se laissa, difficilement, persuader de consentir à une répartition plus équitable : ce ne fut pas sans regret qu'il s'y décida, car il n'ignorait pas que les examens étaient mieux faits par lui que par tout autre, et savait mieux que personne que la qualité du recrutement de l'École normale, c'est pour ainsi dire toute l'École normale. Il tint à faire les examens une dernière fois en juillet 1910 et n'hésita pas à violenter sa nature au point d'user de dissimulation : pour empêcher les siens et ses collègues de peser sur sa décision, il ne leur fit connaître qu'après qu'elle eut reçu la sanction officielle, et rien ne put alors le décider à la modifier. Il opposa d'ailleurs toujours la même résistance à ceux qui auraient eu une grande joie à le soulager partiellement dans son service : « *Mon cher ami, vous êtes bien gentil, et je sais que je puis compter sur vous; je vous promets d'y recourir dès que j'en ressentirai le besoin; mais, fort heureusement, je suis encore capable de faire mon devoir et je dois en donner l'exemple* ». On ne pouvait que s'incliner et peut-être fut-il plus heureux d'avoir pu se dire à ses derniers instants qu'il avait été jusqu'au dernier jour le bon ouvrier.

*
* *

Après avoir parlé du mathématicien, du professeur, de l'éducateur d'esprits, de l'administrateur, du philosophe, de l'écrivain, du critique, de l'examinateur, il faudrait faire revivre l'homme. Mais ici je crains que la tâche ne dépasse trop mes forces. Ceux qui ne l'ont point connu ne sauront jamais ce qu'étaient la douceur, la noblesse, la finesse de sa physionomie; ils ne pourront imaginer ce regard voilé et doux, et cependant si pénétrant et si fin; ils ne se rendront jamais compte, comment sa conversation pouvait rester toujours élevée sans cesser d'être familière, toujours sérieuse sans être jamais ennuyeuse, très souvent plaisante et gaie sans être jamais triviale. Aucun ami ne fut plus sûr, aucun caractère ne fut plus noble.

Pendant longtemps encore, ses élèves et ses amis se demanderont, en présence d'une difficulté quelconque ou d'un problème moral délicat : qu'aurait pensé, qu'aurait conseillé Tannery? Pendant longtemps encore, on se représentera difficilement que l'on doit se passer de ses critiques ou de son approbation indulgente et l'on ressentira d'une manière aiguë le désir de le consulter; malgré la force avec laquelle s'imposent les tristes réalités, ce désir renaîtra souvent chez tous ceux dont il était la conscience vivante.

Emile Borel

DEUXIEME PARTIE

ENSEIGNEMENTS ET MÉTHODES

Chap. VII

Pour la science livresque

(Pages 163 à 179)

La science livresque! Voilà une expression qui a fait fortune : savants, philosophes, pédagogues la répètent à l'envi, sur un ton très méprisant, et d'autres encore qu'elle dispense d'étudier les livres et qu'elle autorise à plaindre ceux qui s'y attardent.

On sait assez que le mot « livresque », avec son sens dédaigneux, est emprunté à Montaigne, qui était un terrible lecteur. À la vérité, il savait lire : les anecdotes, les traits de mœurs, les réflexions qu'il fait sur lui-même et sur les autres, ce qu'il voit en lui et alentour lui rappellent les belles phrases de ses auteurs favoris; le passage qu'il relit, dans sa librairie, au haut de sa tour, loin du bruit et des importuns, évoque les événements et les hommes auxquels il a été mêlé, les passions qu'il a ressenties, ou dont il a curieusement observé autour de lui le jeu tragique ou risible; en lisant, il revoit et revit. A-t-il jamais parlé de « *science livresque* », est-ce lui qui a accouplé ces deux mots? Je ne sais; s'il l'a fait, il ne voulait assurément point parler de notre science, dont il n'avait nulle idée. Mais c'est bien à la manière de Montaigne qu'il convient de lire aussi les livres scientifiques : la lecture doit évoquer le monde extérieur, et les phénomènes qui s'y passent doivent s'éclairer par ce que nous avons appris. À lire Montaigne oubliait sa « *colique* »; nous pouvons nous oublier et nous absorber aussi profondément dans la contemplation intelligente du milieu où nous sommes plongés et dont nous faisons partie.

Le mépris pour le livre, qui est à la mode, ne risque-t-il pas d'atteindre la science elle-même, et celle-ci ne peut-elle plus s'écrire et s'enseigner? N'est-elle pas une suite d'idées qui se traduisent par des mots? Les savants vont-ils cesser de publier des notes où ils annoncent les résultats qu'ils viennent d'obtenir, des mémoires où ils expliquent leurs méthodes, d'amples traités où ils exposent leur conception d'une science qu'ils ont longuement méditée? Estiment-ils que rien de tout cela ne vaut la peine d'être étudié? Dès qu'on énonce de pareilles inquiétudes, elles se calment par leur absurdité. Peut-être y a-t-il cependant quelque intérêt, pendant qu'elle dure encore, à examiner ce qui est raisonnable dans la nouvelle mode, et la façon dont elle s'est développée.

Berthelot racontait volontiers qu'il s'était astreint, dans sa jeunesse, à lire tout ce qui se publiait sur la chimie et à résumer ses lectures, pour son usage particulier. Cette besogne lui prenait deux heures par jour, au début, huit quand il y renonça, je ne sais plus à quel âge.

Nul doute qu'il lût alors avec une prodigieuse rapidité : toute la science qu'il avait acquise accélérât la vitesse naturelle de son intelligence; il ne pouvait manquer de distinguer, d'un coup d'œil, le développement à sauter, les pages à parcourir, le résultat digne d'être noté et, parfois, l'idée nouvelle sur laquelle il réfléchirait, en courant de son laboratoire à l'Institut pour savoir lire, il faut avoir beaucoup lu et beaucoup pensé.

C'est, sans doute, ce qu'ont fait tous les hommes qui dirigent un laboratoire de recherches, et qui en sont dignes. Ils continuent, pour une partie de la science qu'ils cultivent, de se tenir au courant comme ils peuvent et le mieux qu'ils peuvent : c'est à ce prix qu'ils savent les problèmes qui se posent, les méthodes qui réussiront à les résoudre, au moins partiellement; c'est parce qu'ils ont des connaissances étendues et variées qu'ils risquent d'apercevoir ces rapprochements d'où l'on dit que sortent les découvertes essentielles; mais ils détournent avec raison leurs jeunes collaborateurs de rechercher une impossible érudition; ils savent trop, par eux-mêmes, qu'on ne peut avoir tout lu, ni continuer de tout lire, et que beaucoup de lectures sont inutiles. D'ailleurs, par leur fonction même, c'est la découverte qui les attire : ce qui est connu, dès qu'il est connu, perd beaucoup de son intérêt; ils sont penchés sur ce qu'on saura demain, c'est vers cette science de demain qu'ils inclinent ceux qui leur demandent des conseils. Ils leur indiquent des sujets de recherche; aux uns, dont il faut d'abord aiguïser l'habileté technique, des problèmes précis qui se résoudront par des

méthodes éprouvées, à d'autres des questions mal déterminées, où ce qu'il faut chercher se déterminera par l'étude même, peut-être à la suite de bien des efforts qui auront semblé inutiles. Tantôt ils laisseront leurs élèves livrés à eux-mêmes, tantôt ils leur indiqueront la raison d'insuccès qui pourraient amener le découragement, et d'un mot, les mettront dans la voie qui aboutit.

Ils cherchent à développer l'initiative de tous et exagèrent parfois le mérite des initiatives qu'ils ont fait naître. Quelques-uns de leurs élèves reconnaissent et n'oublieront pas ce qu'ils doivent à une conversation avec leur maître, à un mot, à une suggestion; les mêmes, peut-être, se rendent compte de ce qui leur manque pour les recherches qu'ils ont entreprises ou qui les attirent, des connaissances théoriques qu'il leur faut acquérir et qu'ils acquièrent peu à peu, qui s'appellent l'une l'autre, qui s'accumulent dans leur esprit et finiront par s'ordonner. Ils causent entre eux, discutent les théories, échafaudent et renversent les systèmes; chacun ouvre l'esprit de l'autre, féconde et est fécondé. Peut-être deviendront-ils des maîtres à leur tour.

D'autres resteront des collaborateurs qui, bien guidés, peuvent rendre d'excellents services. On pourrait citer, surtout à l'étranger, des laboratoires où, grâce, au nombre et à la conscience des travailleurs disciplinés qui s'y trouvent groupés, grâce aussi à l'importance des ressources matérielles, les recherches, systématiquement dirigées par un maître éminent, ont abouti à des résultats considérables.

D'autres n'ont pas le sens des idées générales; mais, servis par un heureux hasard qui récompense à la fin leur patience tenace, ils rencontreront un fait intéressant. D'autres enfin, grâce à leur adresse technique, à leur intelligente habitude des instruments, des mécanismes ou des réactions, pourront contribuer au progrès de ces industries scientifiques, qui ne subsistent qu'en se perfectionnant.

Dans un pareil milieu, la passion de la recherche expérimentale s'exalte naturellement, et cela est bon, si même l'objet de cette passion ne mérite pas l'ardeur avec laquelle il a été poursuivi; on y jouit de la poursuite même; l'opinion, plus ou moins consciente, qu'elle vaut mieux que son objet, n'est pas toujours dénuée de critique. Quelques-uns, dont précisément les connaissances livresques sont insuffisantes, oublient que cet objet n'est pas la science, non pas même une partie de la science, mais bien un détail qui prendra sa place, se transformera, ou disparaîtra dans l'ensemble organisé, comme une parcelle de nourriture dans le corps vivant et croissant. L'acquisition de la moindre parcelle de vérité, de nourriture scientifique, est si importante qu'il faut se réjouir de voir tous ceux qui s'y emploient sentir aussi vivement qu'ils font la dignité de leur besogne; il est juste que ce sentiment reconfortant soit partagé par tous ceux qui travaillent dans un laboratoire scientifique, même par ces serviteurs que la modestie de leur costume ou de leur origine, ou la conscience de ce qu'ils ignorent, empêchent habituellement de se hausser jusque-là.

La tendance à rabaisser la science devant la recherche scientifique, qui se manifestait obscurément dans les laboratoires, a trouvé sa formule dans les écrits de quelques philosophes, dont l'esprit critique est très aiguisé et qui, parfois, sont aussi des savants. Parce qu'elle est *action*, ils regardent la recherche comme la vie de la science, dont elle n'est qu'une condition nécessaire. Eux aussi détournent leurs yeux de ce qui est acquis, de ce qui est déposé et fixé dans les livres, pour les attacher sur ce qui évolue; ils nous rappellent avec raison la relativité de nos connaissances, ils se plaisent à nous en montrer les connexions compliquées, à rabattre les prétentions scandaleuses en établissant que, au point de vue de la pure logique, l'édifice de nos connaissances n'est qu'un enchevêtrement de cercles vicieux, où nous nous abritons provisoirement, de la façon qui nous est la plus commode. Mais pourquoi tiennent-ils à décerner des prix à nos facultés? Leur désir d'exalter l'action aux dépens de la connaissance recouvre sans doute d'excellentes intentions morales. S'ils veulent dire, tout bonnement, qu'il y a moins de mérite à être intelligent que vertueux, j'en suis d'avis; mais ils reconnaissent assurément que ce qui fait la valeur de l'action, ce n'est pas qu'elle est un geste, un mouvement, mais bien ses motifs et son but; la science sert à peser ces motifs, à préciser ce but, à découvrir le chemin qui y mène : ils en tombent d'accord. D'un autre côté, l'acquisition de la science est essentiellement active; elle est active par le désir et l'effort vers la vérité, par la soumission même à la vérité, dès que la vérité est aperçue; elle est active au même titre que la découverte, non au même degré; elle est, elle doit être une *redécouverte*.

Le livre est le plus commode et le moins coûteux des instruments pédagogiques; qu'on ait abusé d'un enseignement oral qui ressemble trop au livre pour que je l'en distingue ici, cela n'est que trop certain. Je voudrais insister un peu sur quelques-uns des inconvénients qu'il présente.

Nous conservons toute notre vie la faculté de répéter des mots à demi compris, dont nous nous servons à peu près correctement, par habitude et par une sorte d'instinct logique : ce mot était à sa place dans telle phrase, il s'emboîtera tant bien que mal dans une phrase analogue. On peut s'amuser assez de soi-même ou de ses voisins en recueillant dans n'importe quelle conversation (sans parler des discussions métaphysiques) la multitude de mots qui ne représentaient assurément rien de précis pour ceux qui les ont prononcés; nous répétons fréquemment des noms de fleur, de pays, d'institutions, d'hommes, de maladies, dont nous ne savons absolument rien et il ne nous vient pas à l'esprit de demander ou de chercher une explication. Les mots nous contentent. Cela n'est pas bien fâcheux dans une de ces causeries où l'on ne cherche qu'une suite d'impressions agréables; les mots à signification indéfinie ou obscure peuvent très bien contribuer à ces impressions, et les poètes ne l'ignorent pas. Mais nous nous mêlons aussi de raisonner sur ce que nous ne savons pas, avec des mots que nous n'entendons point. Mme de Sévigné nous semble extrêmement comique quand elle raisonne sur ses maladies; ne prêtons-nous jamais à rire, dans de pareils cas? Je ne parle pas des médecins. Cette aptitude à raisonner avec des mots et des signes vides de toute réalité a peut-être abouti à la création de la logique et de l'analyse mathématique.

Quoi qu'il en soit, la faculté de se servir utilement de mots qui ne sont guère compris est admirable chez les enfants; grâce à elle, ils apprennent à parler, ils pénètrent peu à peu le sens de tous ces mots qui ne représentent pas des objets familiers, qu'ils peuvent voir ou toucher et qu'on leur a nommés. Un mot inconnu les a frappés dans une phrase dont le sens général implique, pour ce mot, une signification qu'ils saisissent vaguement; ils le répètent, avec les mots qui l'entouraient, dans une circonstance analogue, puis autrement, et après quelques essais, dont la gaucherie est parfois charmante, finissent, tant bien que mal, par se faire comprendre et par se comprendre. Lorsque leur vocabulaire est assez étendu pour qu'il soit possible de leur expliquer les mots nouveaux par des périphrases, c'est encore l'usage qui leur apprend ce que la périphrase ne leur enseigne pas, les nuances qui distinguent les mots de sens voisins, les cas où ce mot convient plutôt que cet autre; pour fixer le sens d'un mot, ses diverses acceptions, les rapports des mots entre eux, il n'y a rien de mieux à faire qu'à varier les exemples. Dans une phrase, le sens de chaque mot n'est déterminé que par la phrase tout entière. Cela s'apprend peu à peu; apprendre à parler, c'est accumuler des cercles vicieux; mais, aussi bien, qu'apprend-on autrement? Pourtant, l'enfant apprend à parler, à exprimer ce qu'il sent, et en l'exprimant il distingue mieux ce qu'il sent.

Plus tard, il continuera de s'instruire en lisant. Bien des mots et des phrases ne seront lus que des yeux; s'il est vivement intéressé par ce qu'il comprend, il ne s'aperçoit pas toujours de ce qu'il ne comprend pas, ou il se contente de ne comprendre qu'à moitié, il devine ou croit deviner. À mesure qu'il se développe, qu'il a vu et senti, qu'il a lu davantage, il comprend plus et mieux, il devine plus juste; il se rappelle ou rencontre à nouveau ce qu'il avait laissé de côté; il y revient, il y réfléchit; le sens des mots et des choses se dévoile; la correspondance entre le langage et ses états de conscience s'éclaire et se précise. Cet état de grâce le soutient jusqu'au bout de ses études, sans en excepter les études philosophiques.

Pour que cette grâce opère, il importe que ce que l'écolier ne comprend pas disparaisse pour ainsi dire dans ce qu'il comprend. Comment y parvenir avec les manuels scientifiques, tout secs? Notez qu'il n'est plus question ici, comme dans les œuvres littéraires, de sentiments que l'enfant a eus lui-même, qu'il a éprouvés ou pressentis, dont les uns suggèrent ou excitent les autres, qu'il peut reconnaître; notez que la langue scientifique n'a pas la souplesse de la langue littéraire, qu'un mot n'a, ou ne doit avoir, qu'un sens et qu'on ne découvre pas ce sens précis par des déformations et des adaptations successives.

Sans doute, les auteurs des manuels scientifiques définissent de leur mieux les termes nouveaux; ils répètent les explications, les exemples, multiplient les illustrations; mais les phénomènes, les appareils, les êtres vivants, les organes sont si nombreux, si divers, si compliqués, que les définitions et les figures s'oublient, se brouillent dans une informe grisaille. Pour un bon nombre d'écoliers, les mots qu'ils lisent ou qu'ils entendent finissent bientôt par n'éveiller aucune image, aucune idée précise : le livre ou la leçon deviennent alors un abîme d'ennui. Les plus dociles ajoutent au supplice qu'on leur inflige la torture d'apprendre par cœur ce qu'ils n'entendent point; c'est une torture à laquelle l'étude des langues étrangères nous accoutumait jadis. Certains mots, répétés plus souvent, surnagent avec un reste de signification. Les écoliers arrivent parfois, avec un peu de bonheur, à placer convenablement ces mots-là et à donner

l'illusion qu'ils ont compris; ne les blâmons pas trop; j'ai déjà dit que nous continuons tous de faire comme eux; mais n'oublions pas que le premier bénéfice à tirer de l'enseignement scientifique consiste précisément à distinguer ce que l'on comprend de ce qu'on ne comprend pas, à accepter la conclusion d'un raisonnement rigoureux, à ne pas se payer de mots dont on ignore la valeur et, si l'on parle pour ne rien dire, à s'en apercevoir. Combien d'écoliers y arrivent-ils, et comment auraient-ils une volonté assez tenace, une mémoire assez sûre, une puissance d'imaginer assez vigoureuse, comment lutteraient-ils contre leur tendance et leur habitude de se contenter de l'à peu près, s'ils n'ont pas d'autre ressource que le livre, écrit ou parlé?

Pour assurer leur mémoire et fortifier leur imagination, pour fournir des matériaux à leur imagination, il est indispensable de les familiariser avec les objets que l'on veut qu'ils se rappellent ou qu'ils se représentent. Il ne suffit pas de leur montrer de loin ces objets une fois ou deux, il faut qu'ils les voient sous toutes leurs faces, qu'ils les manient, qu'ils s'en servent, qu'ils les comparent et les identifient avec les figures schématiques qui sont dans leurs livres ou que leur maître dessine sur le tableau noir; ils saisissent sur ces figures la marche d'appareils ou d'organes dont une partie cache l'ensemble, qu'ils ne peuvent toujours démonter, remonter, disséquer et qui doivent être, entre leurs mains, autre chose que des joujoux qu'ils font marcher jusqu'à ce qu'ils les aient détraqués. Non seulement ils se rappelleront les objets, mais ils pourront s'en figurer d'autres analogues; une description ou un dessin leur suggérera une image précise; ils seront alors capables de lire.

En même temps, ils apprendront à chercher dans une expérience ce qu'il faut y voir, à distinguer, pour y porter l'attention, le fait essentiel de ce qui l'entoure, le fait essentiel qui tient toute la place dans la description du livre, mais qu'on n'aperçoit pas toujours sans peine, même dans une expérience préparée pour le mettre en évidence, et qui est bien autrement caché dans la complexité touffue des choses extérieures; il faut savoir lire les livres et les choses.

Mais les phénomènes, leur description, leur mesure même ne sont que la matière de la science; la science commence avec la loi, qui met l'ordre dans les faits et qui les groupe, elle se continue dans la synthèse des lois particulières en lois générales, elle s'achève provisoirement dans une théorie.

Une loi ne concerne qu'un petit nombre de propriétés de l'objet auquel elle se rapporte; elle ne tient pas compte des autres propriétés de cet objet, qui n'interviennent pas non plus dans les conclusions qu'on tire de la loi; ces conclusions s'appliqueraient aussi bien à un autre objet, sur lequel on pourrait formuler la même loi. En les développant, on ne pense pas à la réalité de l'objet, on raisonne sur une abstraction, d'autant mieux que la loi est plus générale. Un aveugle peut étudier l'optique, en ignorant les sensations qui donnent, pour nous, tant d'intérêt à cette étude. Ne sommes-nous pas devant l'électricité comme l'aveugle devant la lumière? À la réalité extérieure, nous substituons dans nos théories un monde abstrait où les symboles qui le peuplent sont définis par des propriétés et se prêtent aux raisonnements de la logique déductive, au raisonnement mathématique en particulier, quand la théorie est assez avancée. « *La lune qu'on voit n'est pas celle qui m'intéresse* », disait je ne sais quel astronome. Ce qui l'intéresse, c'est la loi de Newton, les équations qu'on en déduit; les transformations de ces équations, et quelques nombres, déduits de l'observation, qui sont pour lui le Soleil, la Terre, la Lune...

La vraie science est la science livresque : c'est dans les livres et dans la pensée de ceux qui les ont étudiés qu'est décrit et réalisé le monde intelligible, lumineux et transparent qui laisse voir et fait voir le monde réel, en l'éclairant et le rapprochant de notre pensée; c'est par l'étude et pour l'étude de ce monde réel, auquel il s'adapte de mieux en mieux en devenant de plus en plus intelligible, qu'il a été lentement constitué, qu'il s'enrichit chaque jour de découvertes nouvelles, tandis que, par l'effort d'une méditation persistante, les idées qui le dominent deviennent plus simples et plus claires. Reprendre contre la science écrite des arguments qui pouvaient servir contre la scolastique, c'est méconnaître la nature de cette science, qui tire sa certitude, d'une part de sa cohérence, d'autre part d'une confrontation continue avec la réalité, avec ce que nous voyons, touchons, utilisons. - Un moment viendra où notre astronome sera bien forcé de s'intéresser à « *la Lune qu'on voit* » : il lui faudra comparer les nombres qu'il a calculés avec ceux que donne l'observation; il ne le fera pas sans quelque angoisse : devra-t-il réviser ses longs calculs, attendre et obtenir de meilleures données numériques que celles d'où il est parti, modifier la loi sur laquelle il s'est appuyé? Et s'il a pu, pendant de longues années peut-être, dédaigner « *la Lune qu'on voit* », c'est que sa science spéciale est parvenue à une rare perfection. Il n'en est pas d'autre où le contact avec la réalité puisse être perdu si longtemps. Dans les sciences auxquelles ne s'applique pas ce merveilleux instrument

des mathématiques, d'où l'on est bien sûr de ne tirer qu'une transformation de ce qu'on lui a confié, il convient de se défier un peu de la déduction, qui n'est pas toujours impartiale et qui penche vers ce que l'on veut prouver.

À coup sûr, ce qu'on met de soi dans le travail scientifique augmente la joie de ce travail; la plupart des savants sont très jaloux de leur liberté et ne se plaisent qu'aux tâches qu'ils ont voulues; ce goût de l'indépendance est parfois excessif et j'ai entendu d'excellents maîtres se plaindre de leur impuissance à imposer une discipline, à organiser des recherches systématiques. Il y a au moins une discipline qu'il faut savoir accepter, c'est celle qui résulte du passé, du travail antérieur, de ce qui est acquis. Ce n'est pas d'ailleurs une obéissance aveugle, mais un consentement réfléchi et volontaire que réclament le livre, la science faite et toujours imparfaite : celle-ci est soumise à une perpétuelle révision. Plus elle s'impose à l'esprit par sa clarté habituelle, plus elle invite, par ses imperfections et ses obscurités, à la mauvaise humeur, à la révolte, à l'espérance d'une découverte, d'une victoire sur l'erreur qu'elle contient encore. Jetez le livre, réfléchissez, observez, expérimentez; vous trouverez peut-être; c'est à lui malgré tout que vous devrez d'avoir cherché là où il y avait à trouver. Ne le méprisez pas si vous ne voulez pas ignorer la vigueur d'invention qui éclate dans les œuvres magistrales et la puissante beauté qui les pénètre, si vous ne voulez pas recommencer des recherches qui ont été faites et bien faites, aboutir à des conclusions sans intérêt, qui ne continuent rien et ne contredisent rien, ou qui sont inutiles parce qu'elles se déduisent logiquement de ce qui était connu.

Mais ne demandons au livre que ce qu'il peut donner. On a remarqué⁸, non sans finesse, que le mot « savant » n'avait plus son sens primitif; pour être un savant, il ne suffit pas de savoir, il faut trouver ou au moins s'efforcer de trouver. On a dit aussi, et cela est encore vrai, que le livre ou l'enseignement, par leur perfection même, risquent d'éloigner de la recherche. Une exposition très claire semble rendre tout facile, elle résume et cache des efforts multiples et successifs, elle ne renseigne point sur la peine qu'exige l'acquisition de chaque vérité nouvelle; plus le sujet est important, plus la théorie est profonde, plus le lecteur sent le mensonge de cette facilité et sa propre impuissance à créer rien de pareil à ce qu'il étudie. Quelquefois la clarté n'est pas sincère; une sorte de brouillard lumineux est répandu sur ce qui est obscur; il empêche de voir les trous, même les abîmes. Sans être entachée de ce défaut grave, plus d'une exposition a le tort de n'éveiller aucune inquiétude, de laisser l'impression que l'œuvre est finie, que le sujet est épuisé, qu'il n'y a plus rien à faire : elle n'est pas suggestive. Là où tout est éclairci, il n'y a pas à chercher : c'est dans les régions à demi obscures, et que la lumière commence à pénétrer, qu'il faut aller à la découverte.

Demandera-t-on au savant qu'elle tente de décrire ce qu'il espère trouver, le chemin qu'il compte suivre, le travail inconscient que préparent ses observations, ses doutes, ses réflexions? Il aurait honte. Et ne changera-t-il pas de chemin à mesure qu'il avancera, ne découvrira-t-il pas autre chose que ce qu'il cherchait? Sait-il ce qu'il pressent? « *Je plains*, disait Pasteur, *les gens qui n'ont que des idées claires*⁹ ». Et le même Pasteur n'a jamais rien publié qui ne fût lumineux, précis, minutieusement contrôlé. Les tâtonnements, la tension, les bonds de la pensée qui aboutissent à la découverte ne sont pas faits pour le livre. Ne demandons pas au livre une recette pour avoir du génie, demandons-lui de nous mettre en possession, sans trop de peine, en quelques jours, ou en quelques années, d'une science qui s'est constituée par des siècles d'effort, et par l'effort des plus rares intelligences; demandons-lui le savoir, tout simplement.

J'ai déjà dit que le savant de profession ne s'intéresse presque plus à ce qu'il sait; il aurait tort de faire trop bon marché de son savoir, car il est essentiellement modifié par ce qu'il sait, même par ce qu'il a su et qu'il a oublié. Et cela est vrai de tous ceux qui savent. Le savoir, indispensable au savant pour ses recherches, à l'ingénieur pour ses applications, n'est le privilège ni de l'un ni de l'autre. La vérité scientifique n'est pas faite pour être connue seulement de ceux qui l'accroissent ou l'utilisent. D'autres qu'eux, dans la mesure de leurs forces et de leur temps, peuvent prendre plaisir à comprendre quelque petite chose de l'univers, à saisir l'enchaînement des phénomènes, à les voir s'ordonner dans une vaste théorie. Les savants auraient

⁸ M. Appell, dans le discours prononcé en 1908 au congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences. Voir *Revue du Mois*, t.VI, p. 129.

⁹ Je dois ce souvenir à M. le Dr Roux.

grand tort de dédaigner ces gens-là, qui les admirent, de railler leur science livresque et l'enthousiasme qu'elle leur cause. Les philosophes et les moralistes ne manqueront pas de reconnaître que l'habitude de se représenter le monde sous une forme scientifique finit par modifier la façon d'agir. Quel événement a-t-il eu des conséquences plus profondes et plus lointaines que la conception de Copernic?

CHAPITRE X

L'ARITHMÉTIQUE

1. - Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école

(Pages 250 à 270)

D'excellents esprits se préoccupent de la façon routinière et mécanique dont l'arithmétique sera enseignée à l'école primaire; la méthode suivie dit-on, ne vise nullement à développer la faculté de raisonnement des enfants. « *Tandis que d'autres études, celles de l'histoire, de la morale, du français, par exemple, en dehors des connaissances spéciales dont elles meublent la mémoire concourent puissamment à former l'esprit, le calcul, tel qu'il est enseigné, ne favorise nullement le développement intellectuel du jeune écolier* ». Ailleurs, on se plaint de l'insuffisance de soi-disant raisonnements qui accompagnent d'habitude les solutions des problèmes, raisonnements d'où la raison est bannie, et qui sont, le plus souvent, reproduits d'après quelque modèle.

Ces préoccupations sont excellentes; leur source est dans le désir de voir cultiver à l'école les facultés supérieures de l'enfant, dans le sens du progrès, dans la haine de cette paresse intellectuelle où la fatigue du métier peut faire tomber le meilleur maître, s'il ne veille pas incessamment sur lui. Malgré le profond respect que j'ai pour l'origine de ces préoccupations, je n'ai pu m'empêcher de les trouver excessives et, puisqu'il est dangereux de vouloir trop bien faire, puisqu'on risque de se décourager en voulant viser trop haut, je demande la permission de m'en expliquer ici; il va de soi que je n'apporte pas des observations personnelles, mais des réflexions, sur un sujet auquel j'ai beaucoup pensé. Le lecteur qui connaît mieux que moi les classes de l'enseignement primaire, sera juge de la mesure dans laquelle ces réflexions s'appliquent à la réalité des faits.

L'instituteur, cela est entendu, doit saisir toutes les occasions qui s'offrent à lui de développer la moralité de ses élèves, leur intelligence et leur jugement; lorsqu'il peut éclairer pleinement ce qu'il enseigne, en donner toutes les raisons, qu'il le fasse; c'est pour le mieux. Mais faut-il qu'il interdise à ses élèves de *croire* à ce qu'il leur dit, lorsqu'il ne leur apporte pas une démonstration complète, une de ces démonstrations qui font que la chose enseignée appartient désormais à l'élève qui l'a comprise, tout autant qu'au maître qui l'a enseignée? S'il en était ainsi, que deviendrait l'enseignement de l'histoire, du français et de la morale? Faudra-t-il, pour qu'on n'accuse pas l'enseignement d'être dogmatique, expliquer aux enfants ce qu'est la critique des textes, ou la philologie, et discuter les fondements de la morale? Personne n'y pense, et si toutes ces explications et toutes ces discussions étaient possibles, ne resterait-il plus dans l'enseignement de l'histoire du français et de la morale, aucune de ces vérités auxquelles l'enfant est obligé de croire parce qu'elles lui sont affirmées par un homme en qui il a confiance? Et pourquoi donc le maître ne solliciterait-il pas la confiance ses élèves, quand il leur apprend l'arithmétique et qu'il a le droit de leur dire, en toute sincérité, « *Si vous travaillez bien, plus tard, en vous donnant un peu de peine, vous pourrez reconnaître par vous-mêmes la vérité de ce que je vous affirme ?* » Que l'élève sache distinguer entre l'affirmation à laquelle il croit, et la démonstration qu'il comprend : c'est en cela que consiste l'esprit critique; il ne consiste pas à rejeter toute les affirmations. Reconnaître la sincérité de celui qui parle, et qui dit toujours la vérité, se fier à celui qui sait, ne juger par soi-même que ce que l'on connaît et ce que l'on comprend par soi-même s'avouer que l'on ignore beaucoup, ce n'est là pour les hommes faits ou les écoliers, ni une cause d'erreur, ni la marque d'un défaut d'intelligence.

D'autre part, il y a dans tous les enseignements une partie mécanique et routinière qu'il faut accepter avec modestie. Rien n'est plus élevé que le rôle de l'instituteur; encore faut-il qu'il sache descendre des hauteurs de ce rôle et qu'il ne prétende pas former *l'esprit et le cœur* de ses élèves quand il leur apprend la table de multiplication. Je veux bien qu'il en tire une leçon de morale, et sais qu'il y a des choses ennuyeuses qui sont fort utiles; mais cette leçon, même, il ne la répétera pas toutes les fois qu'il demandera à ses élèves combien de fois font sept fois huit, ou sept fois six : de même, dans tout métier, il y a des gestes qu'il faut apprendre à faire automatiquement, et qu'il faut répéter des milliers de fois avant de les bien faire; que l'on soutienne l'enfant ou l'apprenti, par l'espoir d'un temps où la répétition de l'effort aura supprimé la difficulté, j'en suis d'avis; mais qu'on se garde bien de lui inspirer du mépris pour ce qu'il entre de *de machinal* dans cette répétition. Il faut que le geste soit machinal.

L'enseignement de l'arithmétique, dit-on, semble n'avoir plus d'autre objet que de mettre l'écolier en état

d'appliquer un certain nombre de règles *qu'il ne comprend pas*. Il ne faudrait pas s'exagérer l'importance de la justification théorique de certaines règles ou opérations : je m'imagine que tout le monde reconnaît l'impossibilité de justifier à l'école, par un raisonnement rigoureux, la règle de la division des nombres entiers, mais que, tout en reconnaissant cette impossibilité, quelques personnes s'en affligent. Je voudrais qu'elles s'en consolassent entièrement. Si c'est là ces règles que l'écolier ne comprend pas, il n'y a pas lieu de s'en émouvoir, à mon avis. Sans doute, celui chez qui la curiosité scientifique s'est éveillée, désire se rendre compte, au moins une fois, des règles ou des procédés qu'il applique; encore ne pense-t-il pas à la théorie qui justifie ces procédés lorsqu'il les applique : il ne doit pas y penser; il doit mettre toute son attention dans l'application correcte des règles qu'il sait être vraies, et plus cette application est *machinale*, plus elle est sûre. Le mathématicien même emploie des outils qu'il n'a pas vérifiés et dont il ignore parfois comment ils ont été fabriqués. Malgré toute sa critique, c'est un homme qui se résigne à avoir confiance en d'autres hommes : la table de logarithmes qui est sur sa table, il n'en a sûrement pas vérifié tous les nombres. Sait-il seulement comment on s'y est pris pour la construire? Pas toujours, au moins dans le détail. Et pour d'autres tables numériques dont il se sert à l'occasion, il ne s'est même jamais posé la question. Est-il un seul mathématicien qui ne se soit jamais servi d'un théorème ou d'une formule qu'il serait incapable d'établir au moment où il l'utilise? Quel est l'ingénieur, même sorti de l'École polytechnique, qui n'a pas recours, à l'occasion, à un aide-mémoire, voire un barème? Pourquoi ne pas permettre aux enfants d'accorder à leurs maîtres cette confiance que le mathématicien de profession apporte volontiers à d'autres mathématiciens qui ont calculé des tables numériques ou dressé des recueils de formules? Pourquoi ne croiraient-ils pas ce maître quand il leur dit que c'est ainsi qu'on s'y prend pour faire une multiplication ou une division?

Ce que les enfants ont besoin de *comprendre*, c'est le sens de l'opération, c'est ce qu'elle permet d'obtenir. Je m'imagine qu'on leur apprend cela à l'école, et, peut-être, mieux qu'on ne fait au lycée. Je ne crois pas trop m'avancer en disant qu'il y a plus d'un bachelier ès sciences qui a étudié l'algèbre et la trigonométrie, pour qui la division est une opération dans laquelle on met le dividende à gauche, le diviseur à droite, à l'intérieur d'un angle droit, dans laquelle on sépare,... etc. : c'est la description de l'opération, non sa définition, non ses propriétés, qui subsiste dans son esprit. Voilà ce qu'il faut éviter, à l'école comme au lycée.

Comment arrive-t-on à faire comprendre aux écoliers le sens de chacune des quatre règles ? Je crois bien que, là-dessus, la plupart des instituteurs m'en remontreraient. C'est au fond la définition de l'opération qu'il s'agit d'éclairer: ils ne commencent pas à dicter à leurs élèves une belle phrase abstraite, qui ferait ouvrir de grands yeux à tous ceux qui ne sont pas résignés à apprendre sans comprendre; non, ils commencent par des exemples concrets, avec des nombres très simples : j'ai sept billes dans ma poche gauche, combien y a-t-il de billes dans cette poche gauche? Des douze billes qui sont maintenant dans ma poche gauche, j'en prends cinq que je mets dans ma poche droite; combien en reste-t-il dans ma poche gauche? Et si je remets ces cinq billes dans cette poche gauche, combien contiendra-t-elle de billes? Voici quatre petits tas dont chacun comprend cinq billes; je mets toutes les billes en tas, combien y en aura-t-il dans ce tas? J'ai dix-neuf billes que je veux partager entre cinq enfants; chacun reçoit trois billes et il m'en reste quatre. Chaque opération reçoit son nom. Les exemples sont repris, multipliés, diversifiés. Les nombres sont assez simples pour que les calculs puissent se faire de tête, ou même sur des objets réels; on demande aux enfants, pour une foule de petits problèmes, non seulement d'arriver au résultat, mais de reconnaître chacune des opérations qu'ils ont faites, de la nommer; on passe à des cas un peu plus compliqués, où il faut faire deux, trois de ces opérations; là encore, il ne suffit pas que les enfants trouvent le résultat exact, ils doivent analyser le calcul qu'ils ont fait : d'abord une addition, puis une soustraction, etc... Sans doute, tous ceux sous les yeux desquels cette page est tombée se disent : « *oui, c'est ainsi que l'on fait, à peu près, avec ces exemples, ou avec d'autres...* »

Et comment ferait-on autrement? Il suffit de penser, et d'avoir eu des enfants à qui l'on a appris à compter.

Eh bien! tout cela n'est nullement mécanique. Reconnaître les cas où il faut faire cette opération, et non cette autre, sentir ce qu'il y a de commun dans les cas où on fait la même opération, c'est faire acte d'intelligence, de la même intelligence qui nous sert à grouper des individus ou des mots, ou des faits, dans une même famille sous une même loi. Et l'enfant est capable de ces actes intellectuels, parce qu'ils se rapportent à des objets qu'il peut voir, toucher ou imaginer, et que l'effort d'attention qu'ils exigent est court.

Fixer l'attention sur de longs raisonnements abstraits, où les conclusions se développent l'une après l'autre, n'appartient qu'à des esprits formés, où les aptitudes logiques se sont développées.

Au bout d'un certain temps, quand il juge que le moment est venu, que les écoliers ont vu et reconnu assez de faits pour comprendre un énoncé général, l'instituteur définit chacune des règles : je crois bien que l'écolier, qui comprend cette définition abstraite, y trouvera quelque joie, et qu'il se donnera volontiers la peine d'en fixer les termes dans sa mémoire. Devant des questions toutes pareilles à ces questions qu'il sait résoudre, mais où les données sont un peu plus compliquées, les nombres un peu plus grands, l'enfant sent qu'il lui manque quelque chose : cela est trop long pour qu'il s'en tire; il n'en finirait pas de compter sur ses doigts, ou avec des boules. Comment faire? Il est tout découragé. Le maître lui dira : « *Je vais vous apprendre un moyen d'aller plus vite* »; il enseignera le mécanisme de la règle. Je ne suis nullement scandalisé à l'idée que l'enfant ne se rende pas compte du pourquoi de ce mécanisme, et la confiance qu'il accordera à son maître ne me déplaît en aucune façon. Sans doute, il est bon que l'ouvrier connaisse son outil; exigera-t-on, pour cette raison, qu'il ne se serve que d'outils qu'il est capable de fabriquer lui-même, ou seulement même qu'il peut démonter et remonter ? Il doit savoir ce qu'il peut faire de son outil, les cas où il doit le prendre, ceux où il en faut un autre; il doit être très habitué à s'en servir. De même en arithmétique, deux points importent : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire, au fond, bien comprendre les définitions, puis savoir faire correctement ces opérations : le premier point est affaire d'intelligence, le second de routine, ou, pour parler mieux, d'habitude. Il ne faut pas mépriser cette routine-là; le résultat est un profit très clair qu'on emporte de l'école; que de fatigues, d'agacements, que de temps elle épargnera à l'homme fait, à l'ouvrier, au contremaître, à l'ingénieur ou au savant!

Et dans la partie même de l'enseignement du calcul qui s'adresse vraiment à l'intelligence, il faut faire sa part à l'habitude. N'est-ce point en vertu de l'habitude que nous reconnaissons si vite les choses qui nous sont familières, que nous les nommons de suite, que nous n'hésitons pas sur le parti que nous pouvons en tirer? N'est-on pas allé jusqu'à soutenir que l'évidence même n'était qu'une longue habitude qui s'accumule dans la race, et dont les individus profitent?

Cette explication raisonnée des opérations fondamentales, à laquelle on attache tant de prix, j'admettrais fort bien qu'on la laissât de côté même pour des enfants qui reçoivent quelque éducation théorique. Il est beaucoup plus important de savoir les propriétés des opérations que d'être en mesure de justifier la façon dont on l'effectue, et quelques-unes de ces propriétés peuvent être enseignées et même démontrées à l'école : est-il difficile, par exemple, de faire comprendre à des écoliers, sur des exemples concrets, que pour multiplier un nombre par une somme, on peut multiplier ce nombre par les éléments de somme et ajouter ensuite les produits partiels. Les propositions de ce genre, dont les unes peuvent être démontrées complètement, dont les autres seront simplement énoncées et vérifiées sont beaucoup plus précieuses que ce qu'on appelle la « *théorie de la multiplication, ou de la division* »; les problèmes où l'on pourra l'utiliser ne manquent pas; elles contribuent à la vraie intelligence des définitions, dont elles sont les conséquences logiques. C'est elles, d'ailleurs qui mènent plus loin, qui servent, par exemple à l'intelligence de l'algèbre, dont on peut pousser l'étude aussi loin qu'on veut, sans avoir jamais besoin de la « *théorie de la division* ».

J'arrive aux problèmes, et je n'entends parler ici que de problèmes très simples, que peuvent faire ceux des écoliers qui ont vraiment compris les définitions. Je vois qu'on se plaint des *raisonnements* qui, dans les rédactions des élève accompagnent les solutions, et l'on a cité des exemples, fort bien choisis : je demanderai la permission de m'arrêter sur l'un d'eux parce qu'aussi bien le sujet est fort intéressant, que les cas concrets sont les plus instructifs, et qu'il serait bon de s'entendre sur ce qu'on doit demander aux enfants, en fait de raisonnements.

Pour ma part, je me contenterais fort bien d'un raisonnement très court, qui prouve suffisamment au maître que l'élève a compris les définitions, la signification des règles, et qu'il les applique à propos. Voici l'exemple dont je veux parler; je commence par le copier tout au long; c'est, paraît-il, un type que l'on rencontre très souvent.

Un pré rectangulaire de 100 mètres de long sur 45 mètres de large a produit 240 kilogrammes de foin par are. On demande quelle est la valeur de la récolte de ce pré, sachant que le foin vaut 7 fr. 50 le quintal?

Surface du pré : 100 m. × 45 m. = 4.500 mètres carrés ou 45 ares.

La production en foin est de 240 kgr. × 45 = 10.800 kilogrammes ou 108 quintaux.

La valeur de la récolte est de 7 fr. 50 × 108 = 810 fr.

Eh bien! Je ne trouve pas cela si mal; si l'élève qui a fait ce devoir n'a pas copié cette solution sur un problème identique, avec d'autres nombres, je suis disposé à croire qu'il a compris la question et les règles qu'il a appliquées, qu'il sait en outre se débrouiller dans le système métrique.

La solution est parfaitement intelligible pour le maître qui doit la contrôler, les calculs sont indiqués dans l'ordre où ils doivent être effectués et il n'y a pas de bavardage inutile. À part quelques mauvaises habitudes dans les notations, qui ne sont pas bien graves et sur lesquelles je reviendrai, je ne vois rien à reprendre à ce devoir, sauf un point dont je vais d'abord parler.

La solution est présentée sous forme synthétique; c'est, une fois le problème résolu, la forme la plus courte et la plus commode, et l'on peut soutenir qu'elle suffit, puisque l'élève, pour résoudre son problème, a dû, d'une façon plus ou moins consciente, faire l'analyse des inconnues et des données. Il est désirable que cet analyse soit très consciente, et je trouverais bon que le maître en exigeât la trace, sinon dans tous les devoirs, au moins dans quelques-uns; même dans la question très simple dont je viens de copier l'énoncé et la solution, il ne serait pas mauvais que cette analyse fut indiquée par un phrase telle que celle-ci : on cherche le prix de la récolte, connaissant le prix du quintal de foin, il suffit donc de connaître le poids de la récolte; or, on connaît le poids de la récolte produite par un are; il suffit donc, pour avoir le poids de la récolte totale, d'avoir la surface du champ.

Cette analyse doit être faite oralement, à peu près pour tous les problèmes que l'on traite au tableau, afin que l'élève s'habitue à distinguer le inconnues des données, à reconnaître comment il peut déduire les inconnues des données, à ne pas mêler celles-ci au hasard dans l'espoir que la solution en sortira toute seule, mais bien à regarder le but, à déterminer les étapes successives qu'il faut parcourir pour l'atteindre, à ne travailler que dans la bonne direction.

Plus le maître aura habitué ses élèves à la méthode analytique; plus il sera assuré qu'ils la pratiquent, moins il se montrera exigeant dans la rédaction de la solution : au fond, c'est de ceux qui n'ont pas trouvé cette solution qu'il faudrait exiger une rédaction où la marche analytique fût exposée en détail.

Quoi qu'il en soit, acceptons la rédaction synthétique, et reprenons la solution citée plus haut pour voir ce qui lui manque.

Il manque l'énoncé des règles qui sont d'ailleurs appliquées correctement.

Surface du pré : $160 \text{ m.} \times 45 \text{ m.} = 7.200 \text{ mètres carrés ou } 72 \text{ ares.}$

Cette courte phrase implique les explications suivantes : lorsque les dimensions d'un rectangle sont exprimées en mètres, on obtient la surface de ce rectangle, exprimée en mètres carrés, en multipliant les nombres qui mesurent ces dimensions. Donc, la surface du pré sera, en mètres carrés, $160 \times 45 = 7.200$ ou 72 ares, parce qu'un are vaut 100 mètres carrés, en sorte que c'est le chiffre des centaines qui, dans l'expression de la surface en mètres carrés, devient le chiffre des unités lorsqu'on exprime cette surface en ares. On exprime cette surface en ares parce que la production moyenne du champ, pour un are, est donnée.

Continuons.

La production en foin est de $240 \text{ kgr.} \times 72 = 17.280 \text{ kilogrammes.}$

Cette courte phrase vaut bien celle-ci, qu'on rencontre souvent: 1 are produit 240 kilogrammes; 72 ares produiront 72 fois plus ou 240×72 : « Les ... fois plus » ou « ... fois moins » sont des expressions qui n'éveillent guère d'autres idées que celles de multiplication ou de division, et ne constituent le plus souvent qu'un semblant de raisonnement. Le vrai raisonnement consiste dans le rappel de la définition de la multiplication qui, lorsque le multiplicateur est entier n'est qu'une addition abrégée : la production de foin, exprimée en kilogrammes, est la somme de ce que produiraient 72 champs d'un are, ou 1 somme de 72 nombres égaux à 240, ou le produit de 240 par 72. On peut aussi s'appuyer sur une règle plus générale, qui s'applique lors même que le multiplicateur n'est pas entier : le poids total de foin s'obtient en multipliant par le nombre qui exprime la

surface du champ le nombre qui exprime le poids de foin produit par l'unité de surface; j'aurai l'occasion de revenir tout à l'heure sur une règle analogue.

$$240 \text{ kgr.} \times 72 = 17.280 \text{ kilogrammes ou } 172 \text{ quintaux.}$$

Il y a là un changement d'unité analogue celui qui a déjà été fait; le quintal vaut 100 kilogrammes; pour déduire le nombre qui exprime le poids en quintaux du nombre qui exprime le poids en kilogrammes, on regarde, dans ce dernier nombre, le chiffre qui exprimait des centaines, comme exprimant des unités.

$$\text{La valeur de la récolte est : } 7 \text{ fr. } 50 \times 127,8 = 1.296 \text{ francs.}$$

Voici la règle appliquée : la valeur d'une certaine quantité de marchandise s'obtient en multipliant le prix de l'unité de marchandise par le nombre qui mesure cette quantité de marchandise avec l'unité choisie. Cette règle, si l'on se rapporte à la définition de la multiplication, est évidente quand le multiplicateur est un nombre entier; ce n'est pas le cas ici, c'est à la multiplication de fractions que l'on a affaire. Si le maître s'adresse à des élèves un peu avancés, à qui il a expliqué l'opération en général, la règle précédente, pour obtenir le prix d'une marchandise, est une des meilleures illustrations que l'on puisse donner de cette multiplication des fractions. S'il s'adresse à des commerçants qu'il veut habituer à effectuer des multiplications sur des nombres décimaux, avant de leur avoir parlé des fractions ordinaires, la chose ne va pas sans difficultés; car, on est obligé de l'avouer, il ne peut guère que décrire l'opération, sans la définir, au moins quand le multiplicateur n'est pas un nombre entier, puisque, alors, la définition est tout aussi difficile, qu'il s'agisse de fractions décimales ou de fractions ordinaires : il se bornera donc à des affirmations comme celle-ci : « *En faisant la multiplication des nombres décimaux, suivant le procédé que je vous ai décrit, la règle pour obtenir le prix d'une certaine quantité de marchandise est la même, soit que cette quantité s'exprime par un nombre entier, soit qu'elle s'exprime par un nombre décimal, et c'est précisément en vue de la généralité de cette règle ou d'autres règles analogues, qu'on a inventé cette manière de faire la multiplication* ». Il peut d'ailleurs faire sentir à ses élèves cette généralité sur des exemples simples; il dirait ici : « *Le prix d'un poids de 10 kilogrammes est de 0 fr. 75; le prix de 1.728 poids est de 10 kilogrammes est donc $0 \text{ fr. } 75 \times 1.728$, puisque les chiffres sont les mêmes dans les deux facteurs, et que le nombre de chiffres décimaux est aussi le même* ».

Voilà, sur l'exemple cité, les principales explications qu'on pourrait donner. J'ai fini, malgré moi, par les mettre dans la bouche du maître. Personne, à coup sûr, ne demandera à l'élève une aussi longue rédaction; ces explications ont leur place dans l'interrogation; une fois de temps en temps, le maître pourra demander qu'on mette par écrit l'énoncé de chacune des règles qui ont été appliquées, sous une forme aussi brève que possible. S'il le faisait souvent, les élèves se contenteraient de copier ou de reproduire servilement ces énoncés, ils feraient un travail d'écriture qui les dégoûterait d'autant plus qu'ils en sentiraient l'inutilité. La sensation de l'effort inutile doit être toujours soigneusement évitée : elle est funeste.

Notez bien que si l'on voulait pousser les choses à l'extrême, ce n'est pas seulement l'énoncé des règles qu'il faudrait exiger des élèves, mais aussi bien leur démonstration : et pourquoi pas l'explication des propositions sur lesquelles repose cette démonstration? Chaque problème deviendrait un cahier, plusieurs cahiers, la répétition de leçons de cette année et de l'année dernière.

A mon avis, la rédaction doit être courte : l'enfant lui-même, quand il a terminé ses calculs, sent le besoin de les mettre au net, de les mettre en ordre, dans un ordre tel qu'il puisse se reconnaître et que le maître puisse contrôler son travail; il ne faut pas lui demander, dans sa rédaction, de se substituer à ce dernier, et de rédiger toute une leçon.

Sur l'exemple dont j'ai parlé déjà si longuement, il est encore possible d'ajouter quelques observations intéressantes.

Pour expliquer les changements d'unité qu'on avait à faire (are au lieu du mètre carré, quintal au lieu du kilogramme) je me suis appuyé sur la signification des chiffres d'un nombre écrit dans le système décimal; au lieu de cela, on peut appliquer la règle générale pour le changement des unités : cette règle est la véritable clef de la définition de la multiplication et de la division des fractions; j'ai écarté ce mode de raisonnement comme trop abstrait ; je ne suis pas sûr qu'il soit au-dessus de la portée de bons élèves, près de passer leur certificat d'études primaires.

Enfin, au lieu de changer d'unités dans le courant du problème, on peut conserver tout le temps les mêmes unités, le mètre carré, le kilogramme, le franc. La solution, en conservant la même suite d'idées, se présente alors ainsi :

Dimensions du pré rectangulaire, en mètres	160 x 45
Surface du pré en mètres carré	160 x 45 = 7.200
Production moyenne de foin, en kilogrammes, par are	240
Production moyenne de foin, en kilogrammes, par mètre carré	2,4
Production totale de foin, en kilogrammes	2,4 x 7.200 = 17.280
Prix du quintal de foin, en francs	7,50
Prix du kilogramme	0,075
Valeur de la récolte, en francs.	0,075 x 17.280 = 1.296

J'arrive aux notations dont je ne dirai qu'un mot.

Quand on fait des calculs, on ne les fait jamais que sur des nombres abstraits ; au moins, pendant qu'on les fait, on ne pense pas à la signification concrète des nombres sur lesquels on opère : aussi me paraît-il préférable de ne pas employer dans le langage des expressions comme celle-ci : « *La surface du pré s'obtient en multipliant 160 mètres par 45 mètres* », de ne pas écrire 160 m.x 45 m., mais bien 160 x 45 ; multiplier par 45 mètres, cela n'a pas de sens. Bien entendu, la nature des unités, tant pour les données que pour les résultats, doit être rigoureusement spécifiée; elle doit l'être, même pour les résultats intermédiaires qui ont une signification concrète ; cette signification fournit un contrôle utile, et il est bon, à chaque pas, de savoir ce qu'on fait. Relativement à la façon dont il convient de désigner ces unités, je crois qu'on ferait bien d'adopter le procédé qui est presque universellement suivi à l'étranger et de placer, avant le nombre, le nom de l'unité ou l'abréviation qui remplace ce nom, d'écrire par exemple fr. 17,50; m. 17,50; mq. 17,50 pour signifier 17 francs 50 centimes, 17 mètres 50 centimètres, 17 mètres carrés 50 décimètres carrés; il est vraiment peu commode, surtout quand on a affaire à des nombres décimaux, d'intercaler le nom de l'unité après le chiffre de l'unité, avant les chiffres décimaux, et il est choquant d'écrire 172 quinaux 8. Toutefois, d'une part, il y a des habitudes invétérées contre lesquelles il est difficile de lutter, d'autre part même des écritures comme 160 m. x 45 m., qui sont évidemment incorrectes, peuvent être acceptées si le signe m placé à la suite des nombres 160 et 45 n'est pas regardé comme qualifiant ces nombres, mais seulement comme destiné à rappeler leur origine. J'ai cru utile d'appeler l'attention sur ces détails d'écriture, mais je n'insisterai pas davantage.

J'ai réservé pour la fin une objection qui s'est sans doute présentée à l'esprit du lecteur judicieux, et sur laquelle je veux d'autant plus m'arrêter qu'elle contient une bonne part de vérité.

Il aura sans doute paru à plus d'un lecteur que, même dans la solution des problèmes, au lieu de diminuer la part de la routine, j'invite en quelque sorte à l'augmenter encore, en réduisant les raisonnements à l'énoncé de quelques règles l'écolier saura ces règles par cœur et les appliquera machinalement; elles s'interposeront entre les choses et lui, elles l'empêcheront de regarder les choses elles-mêmes, de voir chaque cas particulier dans sa réalité concrète, et la signification vraie de chaque calcul intermédiaire ; c'est cette vision claire de chaque cas particulier et la parfaite intelligence de tous ses détails qu'il faut donner aux écoliers, c'est l'effort nécessaire pour y parvenir qu'il faut exiger d'eux parce que cet effort vaut par lui-même, et que, seul, il développe l'intelligence en l'exerçant.

Cet effort, à mon avis, il faut le demander aux enfants, quand on leur explique chacune des règles qu'on leur apprend, avant l'énoncé même de la règle qu'on essaiera de leur faire trouver sur des cas simples, puis, après l'énoncé de nombreuses applications. S'il s'agit, par exemple, de la règle relative au prix d'une marchandise, on variera les données, le nom de la marchandise, l'unité choisie, le prix (le cette unité; pendant longtemps on restera dans des cas faciles, comportant des objets que l'enfant connaît bien, on n'opérera que sur des nombres simples, afin qu'il puisse imaginer nettement ces objets et leur réunion ; il trouvera sûrement la règle de lui-même dans le cas où il veut savoir le prix d'un nombre entier d'objets identiques, connaissant le prix de chacun de ces objets. Si l'on veut lui expliquer la règle dans ce cas général, on lui fera traiter une multitude de cas particuliers où le nombre qui mesure la marchandise est une fraction à termes très simples, comme 1/3, 2/3. 4/3..., afin qu'il puisse imaginer l'unité de marchandise divisée en trois parties égales, puis

une, deux, quatre... de ces parties; on l'amènera à reconnaître qu'il doit faire une multiplication par une fraction ; on arrivera peu à peu à lui donner l'intelligence complète de la règle. Lorsqu'il est devenu familier avec cette règle, qu'il l'applique couramment, on aura à s'assurer bien des fois que l'habitude même qu'il en a, si même elle est devenue instinctive, peut redevenir à volonté intelligente et consciente.

D'autres règles analogues à celle-là, où les raisonnements sont de la même nature, celle, par exemple, qui permet d'obtenir la production totale d'un champ connaissant la surface de ce champ et la production (moyenne) par unité de surface, celle qui donne le poids d'une matière homogène, connaissant son volume et sa densité, celle qui donne le chemin parcouru, connaissant la vitesse et le temps, etc., seront rapprochées les unes des autres, de manière à bien faire comprendre aux enfants comment s'applique la multiplication. C'est quand il y sera parvenu qu'il comprendra vraiment la *définition* de la multiplication : cette définition ne lui apparaîtra plus vide ; elle lui apparaîtra pleine de tous les cas particuliers. Il est à peine utile de dire qu'il comprendra en même temps comment, dans chacune des règles signalées plus haut, trois nombres entrent en jeu, que l'un est le produit des deux autres, et que si l'on connaît deux de ces trois nombres, on peut calculer le troisième.

Dans un problème où il y a une suite de règles à appliquer, c'est précisément la détermination de ces règles, l'ordre dans lequel il faut les appliquer pour faire sortir les inconnues des données qui constitue le travail intelligent, c'est à cela que doit s'appliquer l'enfant, c'est ce travail (et l'exactitude des calculs) que doit contrôler le maître; ce n'est plus sur l'intelligence de chaque règle particulière qu'il faut insister, ce n'est plus sur ces règles particulières qu'il faut porter l'effort.

Ce que je recommande donc, ce n'est nullement la suppression de l'effort intellectuel, c'est la division de cet effort, qui ne doit pas porter à la fois sur les parties et sur le tout. L'effort a été fait pour les parties; il faut en profiter et montrer à l'enfant que cet effort lui a été utile, puisqu'on ne le lui demande plus. Il faut économiser le travail intellectuel; l'habitude des choses est une véritable épargne, un trésor merveilleux, qui ne se perd que lorsqu'on n'en use pas; grâce à ce trésor acquis, on peut aller plus loin, et c'est précisément parce qu'il nous permet de disposer de notre attention, de la porter ailleurs, sur d'autres difficultés, qu'il est si précieux. Loin d'inspirer aux enfants le mépris de l'habitude, il faut leur montrer qu'elle est la récompense de leur travail, et, s'il faut tirer de l'arithmétique une leçon de morale, c'est à celle-là que je m'arrêterai.

Ceci me ramène à cette comparaison de l'enseignement du calcul, du français, de l'histoire ou de la morale, dont il a été parlé au début. Puisqu'il y a plusieurs enseignements à l'école, c'est sans doute qu'aucun d'eux ne peut remplacer les autres ; il faut tirer de chacun ce qu'il peut donner, et ne pas regretter de ne pouvoir le tirer des autres ; l'instituteur qui donne tous ces enseignements, n'a pas à connaître de pareils regrets.