Le sens de la mesure

" Des grandeurs aux nombres rationnels "

Nicolas Rouche

Collection Formation, Edition Dider Hatier, 1992, 312 pages.

Extraits

Préface de Rudolf Bkouche

Plutôt que d'apporter d'illusoires ou d'impossibles réponses aux questions posées par l'enseignement des mathématiques, Nicolas Rouche et le G.E.M. (Groupe d'Enseignement des Mathématiques) qu'il anime à l'Université catholique de Louvain-la-Neuve poursuivent depuis plusieurs années un travail autour de ces questions, essayant de les mieux cerner et de construire les moyens d'amener les élèves à mieux voir le sens de ces mathématiques qu'on leur demande de connaître.

Nicolas Rouche aborde ici le problème de l'enseignement de la mesure des grandeurs à l'école élémentaire, autour de l'articulation entre le point de vue quotidien et le point de vue du mathématicien. Si les mathématiques de l'école élémentaire s'appuient sur un savoir issu du quotidien : le comptage, le mesurage, ces mathématiques ne se réduisent pas au quotidien; elles sont déjà une construction qui dépasse la simple pratique quotidienne, une reconstruction raisonnée de cette pratique si l'on veut, détour nécessaire de l'esprit humain qui désire comprendre le monde. La question première de l'enseignement des mathématiques, comme peut-être de tout enseignement scientifique, est alors celle de l'articulation de cette connaissance issue du quotidien avec cette forme élaborée du savoir que constitue la connaissance scientifique. Une telle question est ancrée dans une réflexion épistémologique recouvrant à la fois les conditions de la constitution d'un savoir et les conditions de sa transmission, réflexion sans laquelle l'indispensable pédagogie risque de s'égarer dans la seule recherche de quelques recettes illusoires.

C'est cette liaison intime de la pédagogie et de l'épistémologie que nous apprend le travail du G.E.M. et que nous rappelle ici Nicolas Rouche à propos de la mesure des grandeurs et des nombres rationnels.

Si les mathématiques, y compris les mathématiques de l'école élémentaire, ne sont pas simple lecture du quotidien, si les concepts mathématiques ne se réduisent pas à la seule reformulation des notions usuelles, l'enseignement demande que l'on s'appuie sur les connaissances actuelles de celui à qui on enseigne pour l'amener à comprendre les raisons de ces constructions plus ou moins sophistiquées qui constituent la connaissance scientifique. C'est à la fois quitter l'utilitarisme d'un enseignement réduit à la seule gestion du quotidien et s'appuyer sur les connaissances de l'élève pour lui permettre de s'approprier les nouveaux savoirs qu'on lui enseigne.

Ainsi l'enseignement exige que les raisons de l'élaboration des mathématiques soient explicitées autant que cette élaboration elle-même. C'est cela qui explique cette vision, qualitative pourrait-on dire, de la mesure des grandeurs que nous rappelle Nicolas Rouche dans son ouvrage. On a quelque peu oublié, et pas seulement à l'école, ce que signifie «mesurer une grandeur», réduisant la mesure à la seule opération de lecture d'un nombre sur un cadran; ainsi la pesée électronique dans un supermarché, ainsi la lecture du temps sur un cadran numérique, laquelle oublie toute notion de durée.

La mesure n'est pas que l'opération qui consiste à associer un nombre à une grandeur, ce que le discours mathématique énonce comme un isomorphisme entre l'ensemble des grandeurs et l'ensemble des nombres (rationnels décimaux ou réels selon le contexte). Une telle conception, en réduisant l'opération à la seule lecture de son résultat, occulte l'opération elle-même. C'est l'un des mérites de l'ouvrage de Nicolas Rouche de nous rappeler non seulement l'opération mais comment se construit cette opération.

Grandeurs et mesures relèvent de notions distinctes et la théorie de la mesure se construit sur la mise en relation de ces notions. Le problème est moins d'établir une relation formelle (l'isomorphisme rappelé ci-dessus) que de montrer, à partir d'une étude des divers types de grandeurs et des nombres eux-mêmes, comment se construit une telle mise en relation. C'est en ce sens que je parlais d'une conception qualitative de la mesure des grandeurs avant que d'être quantitative : quelles sont les opérations sur ces grandeurs qui conduisent à la mesure d'icelles : mode de comparaison, comptage . . . ? Comment ces opérations conduisent-elles à ces constructions sophistiquées que sont les nombres rationnels, les nombres décimaux, les nombres réels?

C'est un point essentiel de l'ouvrage de Nicolas Bouche que cette distinction entre d'une part cette première étude « qualitative » de la mesure des grandeurs, cette numérisation progressive de la mesure, et d'autre part l'étude axiomatique nécessaire des nombres. Cela nous amène à voir non seulement comment s'élaborent les concepts mathématiques, mais aussi comment ils se transforment et quelle est la signification de ces transformations.

On a trop tendance, au nom d'une modernité réduite à son seul discours, à considérer que les transformations des concepts mathématiques se réduisent à des substitutions successives, les nouvelles conceptions éliminant les anciennes. Un tel point de vue conduit à un appauvrissement de sens; dans l'enseignement, il crée un fossé infranchissable entre les notions intuitives sur lesquelles se sont élaborés les concepts, y compris les plus sophistiqués, et les expressions langagières de ces mêmes concepts. On oublie ainsi que les transformations d'un concept ne renouvellent celui-ci que dans la mesure où elles englobent, d'une façon explicite ou implicite, son histoire, c'est-à-dire la diversité de ses formes et de ses significations. Que devient l'axiomatique hilbertienne coupée de la construction euclidienne sur laquelle elle s'appuie et des géométries non euclidiennes qui ont conduit au renouvellement de la pensée géométrique ? Que devient la physique quantique si on la sépare de la physique classique sur laquelle (et contre laquelle) elle s'est construite ? Que devient la notion de nombre réel si on la réduit à sa seule construction et si on oublie le lien entre le numérique et la mesure des grandeurs?

Le problème premier de l'enseignement reste donc de relier la connaissance intuitive et les constructions sophistiquées de la connaissance scientifique, l'enseignement élémentaire jouant un rôle essentiel dans la mise en œuvre de cette liaison. C'est cette nécessaire liaison que Nicolas Bouche a mise en valeur dans son ouvrage, apportant ainsi une remarquable contribution à l'enseignement de la mesure des grandeurs, laquelle reste un aspect essentiel de la pensée mathématique. On ne peut que souhaiter que les enseignants lisent et méditent cet ouvrage.

Rudolph Bkouche, professeur à l'Université de Lille I
Animateur à l'I.R.E.M. de Lille

Avant-propos de l'auteur

On enseigne les éléments de mathématiques aux enfants en s'appuyant sur la réalité familière, et c'est non seulement ce qu'il faut faire, mais il n'est tout simplement pas possible de faire autrement.

Toutefois - et on espère que le lecteur du présent ouvrage s'en convaincra - les mathématiques élémentaires ne sont pas une copie conforme de la réalité. Il est vrai qu'on peut souvent dire à un enfant *: « Regarde cette propriété mathématique, ça se passe comme telle chose dans la réalité. »* Mais la plupart des explications de ce genre sont locales. Ainsi par exemple, aucun ensemble structuré de tartes, de bâtonnets, de découpages ou d'autres choses de ce genre n'est une image complète et fidèle de la théorie des fractions et des rationnels. Qui plus est, certaines sous-structures mathématiques (l'exemple le plus frappant est le produit des rationnels) ont dans la réalité plusieurs images impossibles à organiser en un tout.

Il est donc exclu de faire découvrir les mathématiques dans la réalité, puisqu'elles n'y sont pas, même s'il est vrai qu'elles y ont de multiples points d'ancrage. L'éducation mathématique élémentaire consiste à faire découvrir aux enfants à la fois une multitude de phénomènes réels qui sont les sources intuitives des mathématiques, et les mathématiques elles-mêmes qui sont autre chose, avec une autre organisation.

La confusion de ces deux plans - la réalité quotidienne et les mathématiques - provoque un grand nombre d'obscurités et d'erreurs. Et lorsque les responsables de l'enseignement maternel et primaire demandent à un mathématicien de les tirer d'embarras, ils reçoivent souvent des réponses . . . de mathématicien, c'est-à-dire de quelqu'un qui comprend les mathématiques mais n'a le plus souvent pas exploré le monde des phénomènes quotidiens dont elles sont issues à travers de multiples difficultés. D'où de nouvelles confusions, d'autant que l'expert consulté est supposé dire la vérité scientifique alors qu'il navigue au-dessus des problèmes qu'on lui pose.

Ce que nous venons de décrire semble bien être une difficulté essentielle et très ancienne de l'enseignement des mathématiques élémentaires. On ne la résoudra pas par des demi-mesures, comme par exemple consulter un peu plus de mathématiciens professionnels lors de la mise au point des programmes ou des manuels. Ce n'est pas de consultations dont on a besoin, mais de collaborations. Et non de la collaboration limitée aux seuls milieux universitaires : il serait essentiel que des enseignants et autres responsables « de terrain», et des personnes ayant une connaissance profonde des mathématiques se mettent ensemble pour étudier l'épistémologie des mathématiques élémentaires, c'est-à-dire la genèse de celles-ci au départ des phénomènes quotidiens. Des instituteurs ne peuvent pas faire cela en l'absence de mathématiciens, et réciproquement. Le présent ouvrage, consacré à l'épistémologie des grandeurs et des nombres rationnels (et qui n'est en tout cas pas un projet d'enseignement) est écrit par un mathématicien qui a travaillé depuis trois ans de façon régulière avec des instituteurs et des professeurs d'école normale.

C'est un essai qui devrait être poursuivi, et aussi étendu à d'autres secteurs des mathématiques de base. Tel qu'il est, sans doute rendra-t-il déjà quelques services aux enseignants du maternel, du primaire, des écoles normales et aussi du secondaire, ainsi qu'aux chercheurs en didactique et aux mathématiciens intéressés par ces questions (qui recèlent â pour eux plus d'une surprise).

Ce livre est divisé en deux parties. La première explique en langage ordinaire les phénomènes et les questions qui conduisent des grandeurs aux nombres rationnels. Presque tous les chapitres y sont complétés par des appendices que l'on peut sauter en première lecture. La seconde partie expose formellement les aspects proprement mathématiques traités informellement dans la première. Le lecteur peut donc utilement lire les deux parties « en contrepoint », en faisant constamment le va-et-vient entre elles. Toutefois, le formalisme mathématique n'est pas parmi ses préoccupations, il pourra se contenter de lire la première partie, de toute façon la plus importante.

L'auteur et l'éditeur se sont accordés pour conserver un caractère plus vivant à la démonstration générale du présent ouvrage en conférant un aspect manuscrit aux différents dessins et graphiques qu'il contient; ils ont également décidé de faire suivre d'une date le nom de l'auteur d'un ouvrage cité : ce nom et cette date renvoient à la bibliographie fournie en fin de volume, et permettent d'identifier aisément le livre auquel il est fait référence.

Il nous reste pour terminer à souhaiter au lecteur de partager avec le grand ange d'Albert Dürer la perplexité où semblent le plonger le compas, la balance, le sablier, la règle et quelques autres de ces objets qui provoquent l'envol de l'esprit . . . tout en l'entravant.

Louvain-la-Neuve, mai 1991.

Chapitre 9 : Enfin les rationnels positifs
9.5 Appendices du chapitre 9

9.5.2 Les nombres depuis les Grecs jusqu'à nos jours

Quelques autres jalons historiques vont nous montrer maintenant à travers quelles difficultés les nombres généralisant les naturels se sont constitués, quelles ont été leurs relations séculaires avec les grandeurs et comment ces relations se sont finalement rompues. Faute de place, nous ne ferons qu'esquisser l'histoire. Et même un épisode aussi intéressant que le calcul égyptien des fractions n'apparaîtra pas ci-dessous.

Une précaution avant de commencer : rappelons encore, quitte à nous répéter, que toute notre étude depuis le chapitre 1 a porté sur un engendrement des rationnels à partir des grandeurs et que (parce que ce n'était pas notre sujet) nous n'avons traité que par allusions des incommensurables et irrationnels. Or l'histoire que nous allons survoler est fortement connotée par cette problématique des irrationnels. D'où sans doute une certaine difficulté à la mettre en relation avec le reste de notre étude. Il nous a semblé que malgré cette difficulté, cela valait la peine de mettre en évidence la forte adhérence historique des nombres aux grandeurs et les efforts qu'il a fallu pour donner aux nombres un statut indépendant abstrait.

Les artisans, commerçants et navigateurs contemporains d'Euclide utilisaient des fractions dans des opérations de mesure, comme l'avaient fait avant eux les Babyloniens et les Egyptiens. Ces fractions, à coup sûr concrètes (des fractions d'objets) ont dû contribuer à la constitution des fractions en un sens plus abstrait chez les mathématiciens.

On trouve en tous cas une présence claire des fractions comme nombres dans *Les Arithmétiques* de Diophante *([1984], R. Rashed, trad.)*[1]. Cet ouvrage, publié aux environs de l'an 250 de notre ère, est fait d'une longue suite de problèmes consistant à résoudre des équations algébriques en nombres entiers ou fractionnaires. Voici à titre d'exemple, le premier problème du Livre IV des Arithmétiques :

«Problème 1. Trouver deux nombres cubiques dont la somme soit un nombre carré. »

Diophante traite uniquement d'arithmétique et sans recours au raisonnement géométrique. En particulier il ne se soucie pas, comme Euclide, de ne pas dépasser la dimension trois. C'est ainsi qu'il définit, outre les (nombres) carré et cube, le carré-carré, le carré-cube et le cubocube. On voit que sur le plan terminologique, les nombres sont encore marqués par leur lien à la géométrie. Fait remarquable, les nombres fractionnaires sont admis par Diophante comme solutions d'équations : les nombres sont donc librement multipliés, élevés à certaines puissances et additionnés. Voici pour en témoigner l'exemple du problème 24 du Livre IV

« Problème 24. Trouver deux nombres carrés tels que la différence de leurs carrés soit un nombre cubique. »

La réponse (après raisonnement) est donnée par Diophante dans les termes suivants:

« On a donc trouvé deux nombres vérifiant la condition posée soixante-neuf plus quatre neuvièmes et deux cent soixante dix-sept plus sept neuvièmes. »

Bien que Diophante ait transgressé l'interdiction de dépasser la dimension 3, celle-ci a posé pendant des siècles sur le développement des mathématiques (*cf. M. Kline [1984], p. 278*)[2] au point que jusqu'aux environs de l'an 1500, les équations algébriques de degré supérieur à trois étaient considérées comme irréelles. Et encore au milieu du XVI^e^ siècle, on trouve sous la plume de M. Stifel : *« Dépasser le cube comme s'il existait plus de trois dimensions [. ..] est contre nature»* (ibid.). La persistance de cette limitation est peut-être due au prestige d'Euclide, mais sans doute davantage à ce que la géométrie s'imposait comme seule mathématique rigoureuse à une époque où les irrationnels étaient proscrits, l'esprit (et une certaine tradition philosophique) répugnant à considérer ces choses qu'on ne peut tenter de saisir que par un processus infini. A partir du XVIe siècle, on a librement dépassé la dimension 3.

Il existe une autre adhérence historique des nombres aux grandeurs celle qui a imposé pendant des siècles l'homogénéité des équations algébriques. Par exemple chez Viète dans la deuxième moitié du XVIe siècle, et encore chez Fermat au XVIIe, tous les termes d'une équation algébrique devaient être du même degré, car on ne conçoit pas que l'on puisse ajouter une longueur à une surface (par exemple). Il s'agissait du degré cumulé des coefficients et des inconnues, ce qui amenait à écrire un polynôme du troisième degré sous la forme

$$x^3 + ax^2 + b^2x + c^3,$$

et non sous la forme devenue habituelle depuis Descartes (*cf. R. Descartes [1637] p. 299 et C.B. Boyer [1968] p. 377*)[3]

$$x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Bourbaki *[1960]*[4] crédite R. Bombelli de cette dernière forme, qui aurait ainsi été introduite dès le XVIe siècle. Notons que d'Alembert *[1785]*[5] écrit encore : *«Tous les termes d'une fonction de x sont censés avoir la même dimension; quand ils ne l'ont pas, c'est qu'il y a une constante sous-entendue qu'on prend pour l'unité : ainsi, dans $x^2 + x^3$, on doit regarder x^2 comme égale à ax^2, a étant l'unité.»*

La longue résistance historique à l'acceptation des nombres négatifs témoigne aussi de ce que les nombres n'ont pu se détacher des grandeurs qu'avec beaucoup de peine. Carnot (*cité par J. Sip [1981]*) écrit en 1803, parmi d'autres objections

«Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien :opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? »

---

[1] **Diophante**, *Les Aritmétiques*, Tome III, R. Rashed trad., Les Belles Lettres, Paris, 1984.
[2] **Kline**, **M.**, *Mathematical Thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972.
[3] **Descartes**, **R.**, *La géométrie*, Leyde, 1937, rééd. Dover, New York, 1954.
Boyer, **C.B.**, *A history of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.
[4] **Bourbaki**, **N.**, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960.
[5] **d'Alembert**, **J. Le Rond** et al., *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, Panckoucke, Paris, 1785 (rééd. Par ACL-Editions, Paris, 1987.

Il faut savoir que dans ce contexte, *quantité* veut dire *« nombre indéterminé»*, dont d'Alembert *[1785]* p. 702 dit : *«Les* quantités *sont proprement le sujet de l'algèbre.* » . Enfin, le lien des nombres aux grandeurs est encore attesté par ce qu'en écrit Cauchy *[1821]*[6] au début de son *Cours d'analyse* :

« Nous prendrons toujours la dénomination de nombres dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue non munie d'un signe des grandeurs. »

Or Cauchy est avec Bolzano l'un des premiers à avoir travaillé à rendre l'analyse rigoureuse.

Les nombres rationnels et réels ont été rattachés axiomatiquement aux nombres naturels, et ceci sans plus de recours aux grandeurs ni à quoi que ce soit d'autre, dans la seconde moitié du XIX[e] siècle seulement. La proposition de faire abstraction de toute question d'origine et de signification dans le traitement mathématique des nombres, a trouvé son expression dans la doctrine *purement formelle* énoncée par exemple par Heine (1872) lorsqu'il dit *«que les nombres sont seulement des signes déterminés, et les règles des opérations qui se font sur eux sont des règles selon lesquelles deux nombres reliés par des symboles opératoires peuvent être échangés.» (F. Enriques [1924])*

Un exposé contemporain accessible et complet de cette théorie déductive des nombres est donné par E. Landau [1966].

9.5.3 Y a-t-il des nombres abstraits et des nombres concrets ?

Une tradition très ancienne distingue les nombres concrets et les nombres abstraits. Voici par exemple ce qu'en dit d'Alembert *[1785]*

« Nombre abstrait*, collection d'unités considérées en elles-mêmes, et qui ne désignent point de choses particulières et déterminées. Par exemple, 3 est un nombre* abstrait*; 3 fois est aussi un nombre* abstrait*; mais quand on dit 3* hommes*, 3* écus*, le nombre 3 est concret. »*

D'Alembert ne donne pour exemples que des nombres naturels, mais il est clair par ailleurs dans son ouvrage qu'un nombre quelconque (rationnel, irrationnel) peut être envisagé comme abstrait ou concret.

Pour éclairer cette définition, il est utile de se reporter ensuite à celle qu'il donne pour *unité* :

« C'est ce qui exprime une seule chose ou une partie individuelle d'une quantité quelconque. Quand on dit individuelle*, ce n'est pas que l'*unité *soit indivisible, mais c'est qu'on la considère comme n'étant pas divisée, et comme faisant partie d'un tout divisible.»*

La notion de nombre concret n'a pas disparu de l'usage courant (c'est-à-dire non mathématique) au XX[e] siècle, puisqu'on lit dans le Robert [1965][7] :

« Nombre concret, *exprimé en indiquant la nature de ses unités. »*

On voit ainsi à quel point la pensée mathématique pendant des siècles et la pensée commune jusqu'aujourd'hui ont dissocié difficilement les concepts de *nombre* d'une part et *d'ensemble fini* ou de *grandeur* d'autre part.

Le lecteur qui nous a suivi jusqu'ici aura, parcouru le chemin qui nous mène des grandeurs fortement liées au concret jusqu'à l'entrée du domaine des nombres purs, dont on étudie davantage les propriétés (formulées axiomatiquement) que la nature. Il n'aura, espérons-le, plus trop de peine à discerner les deux.

9.5.4 L'enseignement des rationnels vu par F. Klein

Dans son célèbre ouvrage *Les mathématiques élémentaires vues d'un point de vue avancé*, F. Klein *[1908]*[8] compare la présentation scolaire traditionnelle des nombres rationnels (celle qui s'appuie sur l'intuition des grandeurs) avec la présentation abstraite des rationnels fondée uniquement sur la connaissance des nombres naturels. Il écrit ceci (tous les passages soulignés le sont par Klein lui-même)

« <u>Comparons maintenant la présentation scolaire traditionnelle avec la conception moderne ainsi décrite</u>. Dans cette dernière nous demeurons vraiment [. . .] malgré l'extension du concept de nombre<u>, complètement dans le système des nombres entiers</u> : on suppose seulement que les nombres entiers sont saisis intuitivement ou que les règles opératoires qui les concernent sont connues; les nouveaux objets définis comme couples de nombres ou comme opérations avec des

---

[6] **Cauchy**, **A.-L.**, *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Debure, Paris 1821, (rééd. J. Gabay, 1989)
[77] **Robert**, **P.**, *Dictionnaire alaphabétique et analogique de la langue française*, Société du Nouveau Littré, Paris, 1960-65.
[8] **Klein**, **F.**, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Vol. I, Springer, Berlin, 1908; 4[e] éd. 1933.

nombres entiers s'inscrivent tout à fait dans ce cadre. La présentation scolaire par contre renvoie à l'intuition nouvelle venue des grandeurs mesurables, *qui offre une image intuitive immédiate des fractions. Nous percevons le mieux cette distinction quand nous nous représentons un être qui ne connaît que l'idée des nombres entiers mais ne possède aucune intuition des grandeurs mesurables : la présentation scolaire devrait lui demeurer parfaitement incompréhensible, tandis qu'il pourrait bien comprendre les considérations de Weber-Wellstein* [Auteur qui présente (comme Landau *[1966]*[9] les rationnels comme couples de naturels.] . »

« Et maintenant laquelle des deux présentations est la meilleure ? La réponse à ceci va ressembler à celle que nous avons faite à la question analogue sur les différentes présentations des nombres entiers : certainement la présentation moderne est plus pure, mais par ailleurs elle est aussi plus pauvre. De ce que l'étude traditionnelle offre comme un tout, elle ne donne en fait qu'une moitié : l'introduction abstraite et logiquement complète de certains concepts arithmétiques nommés «fractions» - et des opérations qu'on leur applique. Mais alors une question totalement indépendante et non moins importante demeure pendante : peut-on aussi réellement appliquer la doctrine théorique ainsi déduite aux grandeurs mesurables qui se présentent évidemment à nous ? On pourrait de nouveau appeler cela un problème de « mathématiques appliquées», pouvant faire l'objet d'un traitement entièrement séparé; mais il faut évidemment se demander en outre si une telle séparation est aussi pédagogiquement opportune. Chez Weber-Wellstein, cette division du problème en deux parties s'exprime d'ailleurs de façon très caractéristique : après l'introduction abstraite du calcul des fractions, la seule dont nous ayons parlé jusqu'ici, il consacre une section particulière (la cinquième) - intitulée « les proportions» - à la question de l'application effective des nombres rationnels au monde extérieur; et là aussi sa présentation est assurément plus conceptuelle qu'intuitive. »

Ainsi, pour qu'un concept soit disponible à l'esprit, prêt à fonctionner dans les applications, il semble bien utile (et peut-être même tout à fait nécessaire) qu'il soit établi sur une sorte de fondement intuitif. Dans la citation suivante, F. Gonseth *[1936]*[10] explique, à propos des concepts géométriques et plus particulièrement de la droite, cette présence de plusieurs « couches de sens ». Le lecteur n'aura pas de peine à étendre ce propos aux concepts de grandeur et de nombre qui nous occupent ici. Voici l'extrait de Gonseth :

«Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu ne varietur. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés : une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions : « droit devant soi» ou « sans incliner ni à droite ni à gauche». Le second avatar peut être placé sous le signe de la géométrie grecque, tandis que le troisième est celui de la relation logique. Il n'est pas vrai que le dernier remplace les précédents et les détruise. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance. »

« Au contraire, même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept droite continue à vivre parallèlement de ses existences antérieures. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes. »

---

[9] **Landau**, **E.**, *Foundations of analysis, the arithmetic of whole, rational, irrationnal and complex numbers*, Chelsea, New York, 3^{e} éd, 1966.

[10] **Gonseth**, **F.** , *Les Mathématiques et la réalité, Essai sur la méthode axiomatique*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris , 1936 (rééd. 1974).