Autour du théorème de Thalès

(*variations sur les liens entre le géométrique et le numérique*)

> *"La connaissance évoluée, la connaissance fine, se fonde sur la connaissance "naturelle" qui ne peut cependant être envisagée que comme une approche sommaire de la connaissance évoluée."*[1]
>
> Ferdinand Gonseth

Introduction

Le théorème de Thalès[2] (ou théorème des lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité entre segments; en cela il est au cœur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique.
Commençons par rappeler le rôle de la proportionnalité dans la définition des figures semblables; cette définition marque la nature métrique de la notion de forme si l'on considère que la théorie de la similitude telle qu'elle se développe dans la géométrie élémentaire, exprime essentiellement que deux objets ont même forme[3]; ainsi Emile Borel dans un débat sur l'enseignement de la géométrie organisé par la Société Française de Philosophie à propos de la Réforme de 1902/1905, expliquait:

"Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur."[4]

Rappelons la définition des figures semblables telle que l'énonce Euclide

"Des figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux pris un par un et dont les côtés autour des angles égaux sont en proportion."[5]

---

[1] Gonseth [Go], p. 145

[2] L'appellation "Théorème de Thalès" est récente; dans les ouvrages de géométrie élémentaire de langue française, elle apparaît seulement à la fin du XIXème siècle, on peut citer le *Cours de Géométrie élémentaire* de Combette [Com] et quelques ouvrages du début du XXème siècle comme ceux de Bourlet [Bourl] ou ceux de Vacquant et Macé de Lépinay [VM]. L'appellation devient officielle seulement dans les programmes de 1925; le grand traité de Hadamard [Ha] ne l'emploie pas qui parle du théorème des lignes proportionnelles. Quand à la part prise par Thalès dans la découverte de ce théorème, elle reste problématique et nous renvoyons aux pages consacrées à Thalès dans *La Géométrie Grecque* de Paul Tannery [TanP] et dans *Les Ecoles Présocratiques* édité par Jean-Paul Dumont [Dum]. Enriques, dans son article de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [Enr], indique que le théorème des lignes proportionnelles est appelé par certains théoréme de Thalès tout en indiquant les réticences de Paul Tannery dans l'ouvrage cité ci-dessus. Pour l'histoire du théorème de Thalès et ses diverses formes dans les ouvrages de géométrie élémentaire, nous renvoyons à l'article de Henry Plane [Pl].

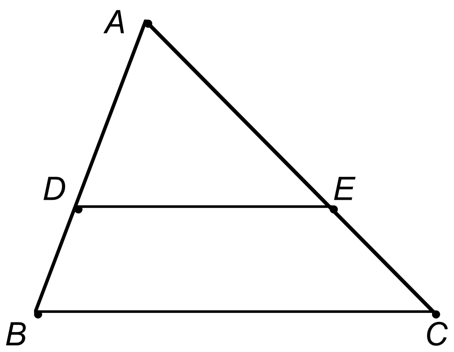
[3] Bkouche [Bk1]

[4] "L'Enseignement de la Géométrie", débat publié dans le *Bulletin de la Société française de Philosophie*, tome VII, ,1907

[5] Euclide [Eu2], Livre VI, définition 1, p. 144

définition qui fait intervenir à la fois l'égalité des angles et les relations de proportionnalité entre côtés; la théorie des proportions permet de définir de façon précise cette notion de proportionnalité, le théorème de Thalès énonçant, quant à lui, un critère de proportionnalité géométrique.
Nous rappellerons d'abord les deux formes traditionnelles de ce théorème :

Premier énoncé. *"Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les points de section sera parallèle au côté restant du triangle."*[6]



Autrement dit, si la droite DE est parallèle au côté BC, on a la relation:

$$AD/DB = AE/EC$$

et réciproquement. Euclide considère seulement le cas où les points B et D d'une part, C et E d'autre part sont du même côté par rapport à A.

Second énoncé. *"Deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles."*[7]

Ces deux énoncés (équivalents) correspondent à des approches géométriques différentes que nous développons ci-dessous, l'approche euclidienne d'une part, l'approche d'Arnauld d'autre part, laquelle se veut, selon les conceptions de son auteur, plus *naturelle*[8].
Mais peut-être plus important que la différence de forme des énoncés, faut-il mettre en avant d'une part la différence des démonstrations (cf. ci-dessous), d'autre part la différence de conception quant à la notion de mesure.
Euclide, pour répondre à la crise provoquée par la découverte des irrationnelles, développe une théorie des proportions s'appuyant sur la notion d'ordre éliminant tout recours au numérique (c'est la théorie d'Eudoxe exposée au Livre V des *Eléments*).
Arnauld, quant à lui, développe une notion d'approximation au statut mal défini, peut-être plus proche du calcul numérique, même s'il ne va pas jusqu'à identifier un rapport de longueur à un nombre. A la même époque, d'autres mathématiciens tels Stevin ou Descartes

---

[6]*ibid.* Livre VI, proposition 2, p. 159
[7]Hadamard [Ha], Livre III, chapitre I, p. 108
[8]Nous verrons qu'elle est plus proche de la pratique de la mesure alors que la construction d'Eudoxe se présente comme indépendante de toute pratique, ce qu'elle est effectivement.

acceptaient une telle identification même si le statut des nombres ainsi introduits (les nombres *sourds* ou *irrationnels*) restait incertain.
Il faudra attendre le XIXème siècle pour que le statut du numérique se précise avec la construction des nombres réels[9] permettant de redéfinir la relation entre le géométrique et le numérique. Cette relation se précisera avec la reformulation de la géométrie dans le cadre de l'algèbre linéaire.
Ainsi le théorème de Thalès assure la liaison entre la problématique de la similitude[10] et la problématique de la mesure (telle qu'elle est définie par la théorie des proportions (cf. ci-dessous)). Cela explique le rôle joué par ce théorème dans le développement de la géométrie élémentaire ; celle-ci étant essentiellement une théorie de la mesure des grandeurs géométriques, le théorème de Thalès permet de ramener l'étude de la forme des objets géométriques à des considérations de grandeur.

[9]Dedekind [De], préface
[10]Il s'agit ici du point de vue *relationnel* à l'exclusion de tout point de vue *transformationnel*: la similitude exprime une relation entre figures (Bk1]

PREMIERE PARTIE

LES DEMONSTRATIONS DU THEOREME DE THALES

La démonstration euclidienne

1. *La méthode des aires*
2. *La théorie des proportions*
3. *La démonstration d'Euclide*

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*
2. *La théorie des proportions*
3. *La théorie des parallèles*
4. *Le théorème des lignes proportionnelles*
5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*
2. *Les "Eléments de Géométrie" de Legendre*
3. *La méthode des aires*

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*
2. *Les proportions*
3. *Les lignes proportionnelles*

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*
2. *Constructions des nombres réels et mesures des grandeurs*
3. *Les grandeurs proportionnelles*

4- *La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie*

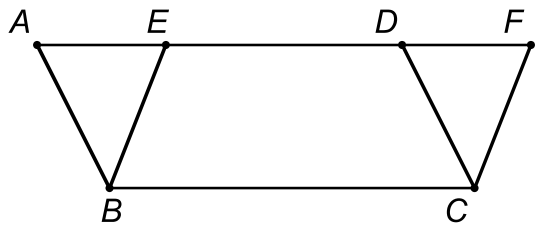
La démonstration euclidienne

La démonstration euclidienne s'appuie d'une part sur la méthode des aires, d'autre part sur la théorie des proportions.

1. *La méthode des aires*

La méthode des aires, telle qu'elle est exposée dans le Livre I des *Eléments*, énonce des critères d'égalité d'aires; on peut la considérer comme la légitimation du procédé empirique de découpage et de recomposition des aires qui permet d'affirmer que des surfaces sont égales. Elle est l'un des points forts de la méthode euclidienne que l'on retrouve tout au long des *Eléments* et plus généralement dans les travaux des géomètres grecs.
La méthode des aires s'appuie d'une part sur le postulat des parallèles (lequel permet de montrer l'égalité des angles alternes-internes ou des angles correspondants définis par une sécante coupant deux droites parallèles) et les cas d'égalité des triangles (qui légitiment l'opération de recomposition); ainsi la proposition 35 du Livre I:

"Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux."[11]



En fait l'égalité des triangles *ABE* et *DCF* (les côtés *AB* et *BE* sont respectivement égaux aux côtés *DC* et *CF*, les angles *ABE* et *DCF* sont égaux) implique l'égalité des aires des parallélogrammes *ABCD* et *EBCF*; en effet le quadrilatère *ABCF* est composé du triangle *ABE* et du parallélogramme *BCFE*, il est aussi composé du triangle *CDF* et du parallélogramme *ABCD*.
De façon plus générale on peut énoncer (proposition 36 du Livre I):

"Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."

On passe aux triangles en remarquant qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme (proposition 34 du Livre I), remarque évidente mais qu'Euclide démontre en utilisant l'égalité des angles alternes-internes et les cas d'égalité des triangles; on peut alors énoncer les deux propositions suivantes (propositions 37 et 38 du livre I):

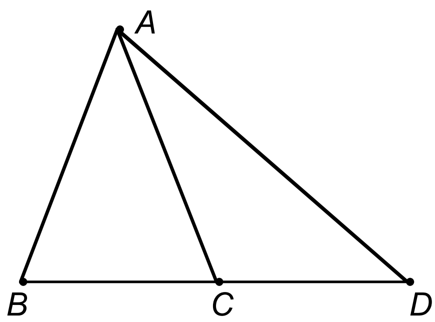
"Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."

"Des triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."

[11]Euclide [Eu1], p. 262

On remarquera les deux sens du terme *égalité*, égalité des aires et égalité au sens de la superposition; le sens est déterminé par le contexte[12].
Si, dans un premier temps, la méthode des aires permet d'affirmer l'égalité de deux surfaces, le problème de la mesure des aires est de comparer deux aires, d'exprimer leur rapport, c'est-à-dire combien de fois chacune des aires contient une *partie aliquote commune* (c'est-à-dire une partie contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles).
On peut alors énoncer (proposition 1 du Livre VI)

"Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases."[13]



autrement dit, on a la relation

$$\text{aire } ABC/\text{aire } ACD = BC/CD$$

Cela suppose d'avoir défini de façon précise sinon le rapport de deux grandeurs (ici des aires ou des longueurs) du moins l'égalité de ces rapports. Lorsque les grandeurs sont commensurables (c'est-à-dire, ont une partie aliquote commune), le rapport se définit comme on l'a dit ci-dessus. De façon précise, soit λ une partie aliquote commune de BC et CD, alors $BC = m\lambda$, $CD = n\lambda$, m et n étant des nombres entiers; on peut alors considérer une division de BC et CD en parties de longueur λ, la proposition 38 du Livre I montre alors que les triangles de sommet A et de base une partie de longueur λ ont même aire, soit σ l'aire d'un tel triangle, alors

$$\text{aire } \mathbf{ABC} = m\sigma$$

$$\text{aire } ACD = n\sigma$$

ce qui prouve l'assertion.
Ce raisonnement n'est plus valide si BC et CD sont incommensurables (c'est-à-dire, n'ont pas de partie aliquote commune), il devient alors nécessaire de construire une théorie des proportions (c'est-à-dire une théorie de l'égalité des rapports) pour des grandeurs incommensurables.

2. *La théorie des proportions.*

---

[12]En fait, la superposition doit être entendue comme un critère d'égalité, l'égalité étant l'égalité de grandeur, ce que laisse supposer les énoncés des *"notions communes"*. Notons cependant que, en ce qui concerne les longueurs et les angles, l'égalité est équivalente à la superposition comme on le voit dans la démonstration de la proposition 4 du Livre I (le deuxième cas d'égalité des triangles). Voir la remarque de Vitrac in [Eu1], p. 265.
[13]Euclide [Eu2], p. 155

Tant que les géomètres grecs ne connaissaient que des rapports de grandeurs commensurables, la théorie des proportions n'était qu'un simple chapitre de l'arithmétique, le rapport de deux grandeurs étant défini comme rapport d'entiers. La découverte (via le théorème de Pythagore) des grandeurs incommensurables posait un nouveau problème et il devenait nécessaire d'élaborer une théorie des proportions prenant en compte l'incommensurabilité[14].
La théorie des proportions fut développée par Eudoxe, mathématicien contemporain de Platon, elle est exposée au Livre V des Eléments d'Euclide auquel nous renvoyons, une partie de ce livre est exposée et commentée dans *Mathématiques au fil des âges*[15].
Nous rappelons ici les définitions euclidiennes nécessaires à la compréhension de la suite de l'exposé:

"3. Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille qu'il y a entre deux grandeurs de même genre.

4. Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

5. Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, chacun à chacun, et pris de manière correspondante.

6. Et que les grandeurs qui ont le même rapport soient dites en proportion.

7. Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première grandeur est dite avoir un plus grand rapport relativement à la deuxième que celui de la troisième relativement à la quatrième."[16]

En fait Euclide ne définit pas le rapport de deux grandeurs homogènes, il explique dans la définition 4 que si deux grandeurs ont un rapport entre elles, il existe un multiple de chacune d'elles qui surpasse l'autre, ce qui précise la définition 3.
La définition importante est la définition 5 qui explicite la relation "être dans le même rapport". En termes d'aujourd'hui on pourrait écrire:
a et b étant deux grandeurs homogènes, c et d étant deux autres grandeurs homogènes, alors

$$a/b = c/d$$

si, n et m étant deux nombres entiers, les assertions suivantes sont vérifiées:

$$\text{si } ma > nb, \text{ alors } mc > nd,$$

[14]Pour une étude historique de l'incommensurabilité, nous renvoyons aux ouvrages de Knorr [Kn] et de Caveing [Ca] ainsi qu'aux nombreuses notes qui accompagnent l'édition anglaise des *Eléments* d'Euclide par Heath [He1] ou l'édition récente de Bernard Vitrac [Eu2].
[15]*Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE], p. 120-122
[16]Euclide [Eu2], Livre V, définitions 3 à 6, p. 36- 41

$$\text{si } ma = nb, \text{ alors } mc = nd,$$

$$\text{si } ma < nb, \text{ alors } mc < nd.$$

De même, on pourrait énoncer la définition 7 en remarquant que l'inégalité

$$a/b > c/d$$

équivaut à dire que l'on peut trouver des entiers m et n tels que l'on ait simultanément

$$ma > nb \qquad\qquad mc < nd$$

Les définitions euclidiennes permettent alors de montrer les propriétés suivantes :

i : si $a/b = c/d$ alors $ma/nb = mc/nd$[17]

ii : soient a, b, c des grandeurs homogènes, alors $a = c$ implique $a/b = c/b$[18]

iii : soient a, b, c des grandeurs homogènes, alors $a > c$ implique $a/b > c/b$[19]

La démonstration donnée par Euclide est complexe, c'est la plus longue du livre V remarque Vitrac. On peut la simplifier en remarquant que tout revient à placer un multiple de b entre deux équimultiples de a et c. On peut raisonner de la façon suivante. Il existe un multiple de $a - c$, soit $n(a - c)$, qui surpasse b et par conséquent il existe un multiple de b situé entre nc et na.
On montre de même que l'inégalité $a > c$ implique $b/a < b/c$.

iv : soient a, b, c des grandeurs homogènes, si $a/b = c/b$ alors $a = c$, si $a/b > c/b$ alors $a > c$[20]

v : si $a/b = c/d$ et $c/d = e/f$, alors $a/b = e/f$[21]

vi : si $a/b = c/d$ et $c/d > e/f$, alors $a/b > e/f$[22]

vii : soient a, b, c, d des grandeurs homogènes et si $a/b = c/d$, alors $a > c$ implique $b > d$ (resp. $a < c$ implique $b < d$, resp. $a = c$ implique $b = d$).[23]

Supposons $a > c$, alors $a/b > c/b$; on en déduit l'inégalité $c/d > c/b$, soit $b/c > d/c$; un facile raisonnement par l'absurde montre l'inégalité $b > d$.

viii: $a/b = ma/mb$[24]

ix: si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $a/b = c/d$ implique $a/c = b/d$[25]

---

[17]Euclide [Eu2], Livre V, proposition 4, p. 74-76
[18]*ibid.* Livre V, proposition 7, p. 80-81
[19]*ibid.* Livre V, proposition 8, p. 82-85
[20]*ibid.* Livre V, propositions 9 et 10, p. 87- 89
[21]*ibid.* Livre V, proposition 11, p. 90-91
[22]*ibid.* Livre V, proposition 13, p.94-95
[23]*ibid.* Livre V, proposition 14, p. 96-97
[24]*ibid.* Livre V, proposition 15, p. 98-99

Pour montrer la propriété ix, il faut vérifier les assertions ci-dessous :

si $ma > nc$ alors $mb > nd$,

si $ma = nc$ alors $mb= nd$,

si $ma < nc$, alors $mb< nd$.

Supposons $ma > nc$. Puisque $a/b = c/d$, on obtient la relation $ma/mb = nc/nd$ et l'inégalité $ma > nc$ implique l'inégalité $mb > nd$ (propriété vii). On laisse au lecteur le soin d'achever la démonstration de la propriété ix.

Pour être complet, il resterait à démontrer que la relation > est une relation d'ordre, ce que nous abandonnons au plaisir du lecteur. Euclide s'est borné à démontrer les propriétés vi et vii ci-dessus.

Remarque: Le rapport de deux grandeurs n'est pas un nombre (sauf si la première est un multiple de la seconde) ni même un rapport de nombres (sauf si les grandeurs sont commensurables); la théorie d'Eudoxe-Euclide élimine ainsi le numérique. Notons cependant que, dans les calculs pratiques, les géomètres grecs savaient approcher les rapports de grandeurs par des rapports de nombres (les fractions d'aujourd'hui), un exemple est donné par le calcul approché de π par Archimède [26] ou les calculs d'aires et de volumes par Héron d'Alexandrie[27].

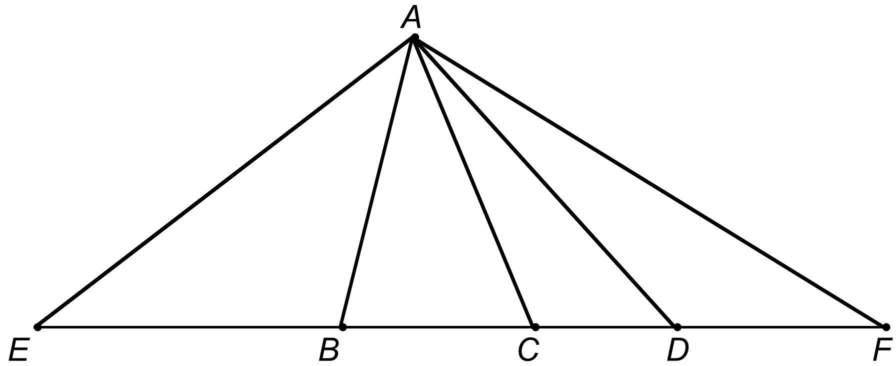
Les définitions d'Eudoxe-Euclide n'impliquent pas un calcul sur les rapports ; pour permettre un tel calcul, Euclide introduit l'opération de *composition* des rapports qui correspond, en termes numériques, à la multiplication, mais comme le remarque Bernard Vitrac, cette opération n'est pas explicitement définie[28]. Si Euclide définit au livre V la notion de *rapport doublé* et plus généralement celle de *rapport n-uple*[29], la composition des rapports intervient seulement au livre VI lorsque Euclide énonce et démontre que le rapport de deux parallélogrammes équiangles est égal au composé des rapports des côtés[30].
On peut expliciter la définition de la composition de la façon suivante qui en montre la difficulté : soient trois grandeurs a, b, c de même espèce, alors le composé des rapports a/b et b/c est par définition le rapport a/c.
Soient alors quatre grandeurs de même espèce a, b, c, d, on considère trois grandeurs p, q, r telles que $a/b = p/q$ et $c/d = q/r$, le composé des rapports a/b et c/d est par définition le rapport p/r. Cette définition suppose l'existence de la quatrième proportionnelle, c'est-à-dire l'existence, trois grandeurs de même espèce x, y, z étant données, d'une grandeur t telle que $x/y = z/t$[31]. Reste à montrer que le composé est bien défini, démonstration que nous laissons en exercice au lecteur.
Le rapport double d'un rapport donné est alors le composé de ce rapport avec lui même.

---

[25]*ibid.* Livre V, proposition 16, p. 99-100; la démonstration est essentiellement celle d'Euclide.
[26]Archimède [Arc], p. 140-143
[27]Heath [He2], vol. 2, p. 320-343
[28]Euclide [Eu 2], p. 150-153
[29]*ibid.* p. 48
[30]Euclide [Eu2], Livre VI, proposition 23, p. 214-218
[31]Euclide admet l'existence de la quatrième proportionnelle. Cependant, en ce qui concerne les longueurs, cette existence résulte d'une construction explicite déduite du théorème de Thalès (cf. ci-dessous).

3. *La démonstration*

Nous allons voir comment la notion d'égalité de raison permet de montrer la proposition 1 du Livre VI.



Soient m et n deux nombres entiers et soient les points **E** et **F** sur la droite **CD** tels que

$$\boldsymbol{CE} = m\boldsymbol{CB}$$

$$\boldsymbol{CF} = nCD$$

la proposition 38 du Livre I implique

$$\text{aire } ACE = m \text{ aire } ACB$$

$$\text{aire } \boldsymbol{ACF} = n \text{ aire } ACD$$

On montre aisément que si ***CE*** est plus grand que, égal à, ou plus petit que ***CF***, alors l'aire du triangle ***ACE*** est plus grande que, égale à, ou plus petite que l'aire du triangle ***ACF***; autrement dit

$m\boldsymbol{CB} > nCD$ implique m aire $ACB > n$ aire ACD

$mCB = nCD$ implique m aire $ACB = n$ aire ACD

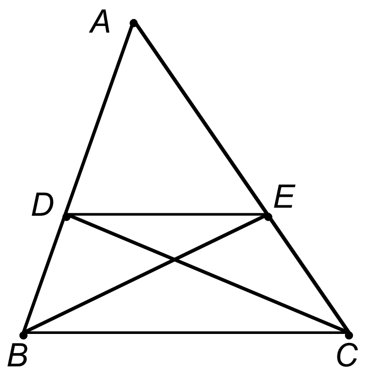
$m\boldsymbol{CB} < nCD$ implique m aire $ACB < n$ aire ACD

donc le rapport de BC à CD est le même que celui du triangle ABC au triangle ABD.

On peut alors montrer le "théorème de Thalès":

"Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les points de section sera parallèle au côté restant du triangle."[32]

[32]Euclide [Eu2], Livre VI, proposition 2, p. 159



On veut montrer l'égalité

$$BD/DA = CE/EA$$

On sait, d'après la proposition précédente, que

$$BD/DA = \text{aire } EBD/\text{aire } EDA$$

$$CE/CA = \text{aire } DCE/\text{aire } DAE$$

d'autre part, les triangles *BED* et *CED* ayant même base et compris entre les mêmes parallèles sont égaux, d'où la proposition.

On laisse au lecteur le plaisir de démontrer la réciproque.
Notons quelques conséquences développées dans le livre VI des *Eléments*.

i : Soit les droites K et L, il existe une *troisième proportionnelle*, c'est-à-dire une droite M telle que

$$K/L = L/M$$

ii : Soient K, L, M trois droites, il existe une *quatrième proportionnelle*, c'est-à-dire une droite N telle que

$$K/L = M/N$$

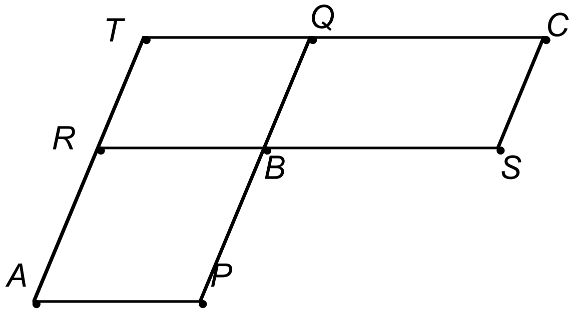
iii :

"Dans les parallélogrammes égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont inversement proportionnels; et parmi les parallélogrammes équiangles, ceux dont les côtés autour des angles égaux sont inversement proportionnels, ceux-là sont égaux."[33]

Supposons que les parallélogrammes équiangles *BPAR* et *BSCQ* aient même aire; on peut alors écrire

$$\text{aire } BPAR/\text{aire } BQTR = \text{aire } BSCQ/\text{aire } BRTQ$$

[33] *ibid.* Livre VI, proposition 14, p. 186



La proposition 1 du livre VI impliquent les relations

$$\text{aire } BPAR/\text{aire } BQTR = BP/BQ$$

$$\text{aire } BSCQ/\text{aire } BRTQ = BS/BR$$

ce qui implique

$$BP/BQ = BS/BR$$

Réciproquement, supposons que l'on ait l'égalité de rapports

$$BP/BQ = BS/BR$$

Dans ces conditions les égalités de rapport (proposition 1 du livre VI)

$$\text{aire } BPAR/\text{aire } BQTR = BP/BQ$$

$$\text{aire } BSCQ/\text{aire } BRTQ = BS/BR$$

impliquent l'égalité des aires des parallélogrammes *BPAR* et *BSCQ*.

iv :

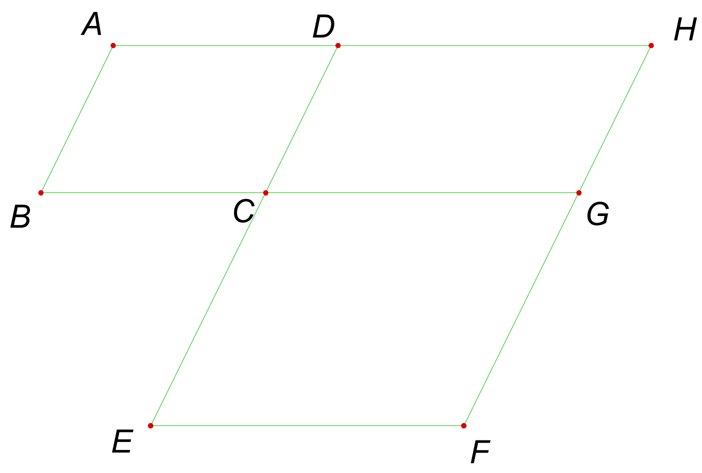
"Les parallélogrammes équiangles ont, l'un relativement à l'autre, le rapport composé à partir de ceux des côtés." [34]

On peut écrire la relation

$$\text{aire } ABCD/\text{aire}CEFG = \text{aire}ABCD/\text{aire}DCHG.\text{aire}DCHG/\text{aire}CEFG$$

qui exprime le premier rapport comme rapport composé.

[34] *ibid.* Livre VI, proposition 23, p. 214-215



On a les proportions

$$\text{aire}ABCD/\text{aire}DCHG = BC/CG$$

$$\text{aire}DCHG/\text{aire}CEFG = DC/CE$$

Soient trois longueurs K, L, M telles que *BC* soit à *CG* comme K est à L et *DC* soit à *CE* comme *L* est à *M*, alors

$$\text{aire}ABCD/\text{aire}DCHG = \mathrm{K}/\mathrm{L}$$

$$aireDCHG/aireCEFG = \mathrm{L}/\mathrm{M}$$

et par conséquent

$$\text{aire}ABCD/\text{aire}CEFG = \mathrm{K}/\mathrm{L}.\mathrm{L}/\mathrm{M}$$

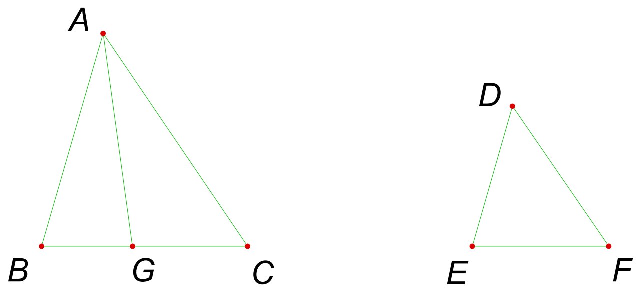
Rappelons que deux figures sont semblables si elles ont les angles égaux un à un et les côtés autour de ces angles proportionnels[35].
La théoire des proportions géométriques permet d'énoncer les cas de similitude des triangles[36].
On peut alors énoncer la proposition suivante

"Les triangles semblables sont l'un relativement à l'autre dans le rapport double de celui des côtés homologues"[37]

Soient *ABC* et *DEF* deux triangles semblables, on va montrer que le rapport des aires des triangles *ABC* et *DEF* est le rapport double du rapport des côtés *BC* et *EF*.

---

[35]*ibid*. Livre VI, p. 1
[36]*ibid*. Livre VI, proposition 4, p. 167, proposition 5, p. 169, proposition 6, p. 171
[37]*ibid*. Livre VI, proposition 19, p. 199-200



Soit BG la troisième proportionnelle des côtés BC, EF, c'est-à-dire que l'on a

$$BC/EF = EF/BG$$

Alors

$$\text{aire}ABC/\text{aire}ABG = BC/BG = BC/EF.EF/BG$$

et, puisque les angles ABG et DEF sont égaux, on a la relation

$$\text{aire}ABG/\text{aire}DEF = AB/DE.BG/EF = BC/EF.BG/EF$$

et par composition

$$\text{aire}ABC/\text{aire}DEF = BC/EF.BC/EF$$

ce qui prouve la proposition.

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*

La démonstration euclidienne ne veut laisser aucun point obscur dans la démonstration, c'est-à-dire que les principes ayant été énoncés (définitions, postulats, axiomes), les propositions s'enchaînent logiquement sans faire appel à des références extérieures à ces principes et aux règles de la logique (ce qui n'exclut pas de s'appuyer sur l'intuition géométrique, c'est-à-dire sur une appréhension globale des objets que l'on étudie).
Ainsi, le postulat des parallèles une fois énoncé, Euclide peut montrer l'égalité des angles correspondants et des angles alternes-internes définis par une sécante coupant deux droites parallèles, de même le principe de l'égalité par superposition permet de montrer les cas d'égalité des triangles ; on a ainsi les ingrédients nécessaires à la mise en place de la méthode des aires. La théorie des proportions d'Eudoxe permet alors de démontrer la proposition 1 du Livre VI et d'en déduire le théorème de Thalès.
Si la rigueur de l'enchaînement des raisonnements conduit à la certitude, la démonstration elle-même n'explique pas les raisons de la propriété démontrée, on comprend qu'elle est non seulement vraie mais aussi nécessairement vraie (elle ne peut pas ne pas être vraie), on ne comprend pas pourquoi elle est vraie. C'est la critique que feront les philosophes de Port-Royal à la démonstration euclidienne, critique que Antoine Arnauld et Pierre Nicole vont développer dans *La Logique de Port-Royal* en énumérant les défauts de la méthode des géométres (c'est-à-dire des géomètres grecs et de leurs successeurs), parmi lesquels nous citerons[38]:

"Avoir plus le soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plus que de l'éclairer."

"Prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves."

"Démonstration par l'impossible."[39]

"Démontrer par des voies trop éloignées."

"N'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature."

Cette dernière critique est un point essentiel de la philosophie de Port-Royal, la recherche du *vrai ordre de la nature* auquel s'identifierait un ordre naturel de la connaissance, ce qu'Arnauld exprime au début de ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* :

"Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous connaissons naturellement."[40]

Cette recherche d'un ordre naturel explique la position critique de Port-Royal envers la méthode euclidienne; si la science se construit sur ce que nous savons naturellement, ce savoir naturel n'a, quant à lui, pas besoin d'être prouvé, ce que Pascal expliquait déjà dans la

---

[38]Arnauld, Nicole [AN], quatrième partie, chapitre IX; pour une analyse de la critique de Port-Royal, cf. Barbin [Ba].
[39]Il s'agit de la démonstration par l'absurde; nous verrons cependant que Arnauld ne peut s'en passer dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*.
[40]Arnauld [Arn1], livre I .

première des règles de la démonstration qu'il énonçait dans son opuscule *De l'Esprit géométrique et de l'Art de persuader*:

"N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on ait rien de plus clair pour les prouver."[41]

Le rôle de la démonstration n'est plus alors seulement de convaincre par un discours logiquement parfait.

"Il ne suffit pas pour avoir une parfaite science de quelque vérité, d'être convaincu que cela est vrai, si de plus on ne pénètre par des raisons prises de la nature de la chose même pourquoi cela est vrai."[42]

écrivent Arnauld et Nicole, précisant que c'est la seule façon de satisfaire l'esprit.
C'est en cela que les démonstrations par des voies trop éloignées ne sauraient être satisfaisantes; en effet, introduisant, pour des raisons liées à l'ordre logique du discours, des notions qui peuvent être étrangères à la nature même des objets sur lesquels portent ces démonstrations, elles occultent les *vraies raisons* de la vérité des assertions démontrées.
Parmi ces entorses au vrai ordre de la nature, Arnauld et Nicole citeront la place de la théorie des proportions (livre V) au milieu d'un exposé de géométrie plane (livres I à IV et livre VI) et l'usage des aires pour montrer des propriétés de lignes. C'est évidemment la place accordée à la méthode des aires qui est critiquée, en particulier, en ce qui nous concerne, le détour par les aires pour montrer que des lignes sont proportionnelles.
L'ouvrage d'Arnauld, publié en 1667, se propose alors de mettre *un ordre naturel* dans l'exposé de la géométrie, ce que l'auteur explique dans sa préface:

"étant persuadé que c'est une chose fort avantageuse de s'accoutumer à réduire les pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclairent les unes par les autres, il (l'auteur) *a toujours quelques pensées de ce que les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion."*[43]

et, revenant sur le vrai ordre qu'il se propose d'introduire dans son ouvrage, Arnauld précise:

"Il (l'auteur) *ajoutait même que cet ordre ne servait pas seulement à faciliter l'intelligence et à soulager la mémoire, mais qu'il donnait lieu de trouver des principes plus féconds et des démonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire... démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui y sont etablis..."*

Notre propos n'est pas d'analyser l'ouvrage d'Arnauld et l'ordre de son développement mais d'expliciter à travers l'étude du théorème de Thalès, le principe de la méthode et de la comparer à celle d'Euclide. Nous avons dit ailleurs l'influence des idées de Port-Royal dans le développement de l'enseignement de la géométrie en France[44], nous verrons ici comment cette influence s'est manifestée à propos du théorème des lignes proportionnelles.
2. *La théorie des proportions*

---

[41] Pascal[Pa], p. 357
[42] Arnauld, Nicole [AN], Quatrième partie, chapitre IX, p. 398.
[43] Arnauld [Arn1], préface.
[44] Bkouche [Bk2]

A l'époque où Arnauld écrit son ouvrage, la notion de nombre s'est élargie, même si les nombres *sourds*[45] qui représentent les rapports de grandeurs incommensurables n'ont pas un statut théorique bien défini. On sait cependant effectuer les opérations arithmétiques sur les raisons (qu'elles soient de nombre à nombre, c'est-à-dire des raisons de grandeurs commensurables, ou qu'elles soient sourdes, c'est-à-dire des raisons de grandeurs incommensurables) et en calculer des approximations; on sait aussi, une longueur étant donnée, construire une seconde longueur ayant une raison donnée (de nombre à nombre ou sourde) avec la première. Cela conduira Stevin à identifier nombres et raisons et ainsi énoncer une notion *unifiée* de nombre même s'il n'en définit pas le statut[46]. Ce *coup de force* ne sera pas accepté sans réserve et l'on verra les auteurs se partager entre ceux qui acceptent cette identification et ceux qui, plus prudents, continuent à distinguer raisons et nombres.[47]
Notre propos n'est pas de faire un historique de la notion de nombre, nous dirons seulement que s'est mise en place une arithmétique qui unifie les opérations sur les nombres et les opérations sur les grandeurs, même si elle distingue nombres et grandeurs[48]
C'est sur une telle arithmétique qu'Arnauld va fonder la théorie des proportions. C'est ainsi que son ouvrage commence par quatre livres consacrés à cette arithmétique.
Après avoir expliqué, dans un premier livre, les opérations arithmétiques sur les nombres et les grandeurs, Arnauld étudie au livre II la théorie des proportions[49] :
L'auteur commence par définir la raison comme la manière dont une grandeur (l'antécédent) est contenue dans, ou contient, une autre (le conséquent), distinguant deux sortes de raisons:

"L'une est quand la grandeur ou quelqu'une de ses aliquotes est contenue tant de fois précisément dans une autre."

ce qu'il appelle *"raison exacte"* ou *"raison de nombre à nombre"*, puisque dans ce cas la raison peut s'exprimer comme raison d'un nombre entier à un autre.

"L'autre manière selon laquelle une grandeur est contenue dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre."

ce qu'on appelle une *"raison sourde"*.
Une proportion est alors une égalité de raison qu'Arnauld définit ainsi:

"Deux raisons sont appelées égales quand les antécédents contiennent également les conséquents, ou sont également contenus dans les conséquents."

Si cette première définition donne une idée de ce qu'est une proportion, elle est insuffisante pour les raisons sourdes, ce qui amène Arnauld à donner une seconde définition:

"Deux raisons sont appelées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antécédents sont chacune également contenues dans chaque conséquent."

---

[45]Le terme sourd signifie *"que la raison n'entend pas"*, autrement dit *inaccessible à la raison*; cette expression est d'origine arabe.
[46]Stevin, *Théorie des incommensurables grandeurs* (1585), cité dans *Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE].
[47]On peut lire à ce sujet l'article *"Nombres"* dans l'Encyclopédie (cf. *Encyclopédie Méthodique* [Enc], section Mathématiques, tome deuxième, p. 464 et sq.).
[48]Il faudrait citer les travaux de Viète qui, distinguant le calcul numérique (calcul sur les nombres) et le calcul spécieux (calcul sur les grandeurs), les unifie *via* le calcul littéral.
[49]Arnauld [Arn1], livre II

autrement dit, soient a, b, c, d quatre grandeurs, a et b homogènes, c et d homogènes, nous dirons que la raison de a à b est égale à la raison de c à d (a est à b comme c est à d, ce qu'Arnauld note $a.b :: c.d$)) si x et y étant deux mêmes parties aliquotes de a et c (c'est-à-dire telles que $a = mx$ et $c = my$, m étant un nombre entier) l'une des deux assertions est vérifiée:
i) si x est précisément tant de fois dans b, alors y est autant de fois dans d, auquel cas la raison de chaque antécédent à son conséquent est de nombre à nombre.
ii) si x n'est jamais précisément tant de fois dans b, mais toujours avec quelque résidu, alors y est autant de fois dans d mais avec quelque résidu, auquel cas la raison est sourde.
Arnauld remarque alors que, si aucune partie aliquote de a n'est contenue un nombre entier de fois dans b, il se pourrait que pour l'une d'entre entre elles, la partie aliquote de c correspondante soit contenue un nombre entier de fois dans d; il montrera plus loin que cela est impossible. Nous proposons , à titre d'exercice, que le lecteur vérifie cette proposition qui prouve qu'une raison sourde ne peut être égale à une raison de nombre à nombre, assurant la cohérence de la théorie des proportions selon Arnauld.
Arnauld peut alors étudier les propriétés des proportions ce que nous ne ferons pas ici, renvoyant à l'ouvrage d'Arnauld. Toutefois nous proposons au lecteur, à titre d'exercice, de montrer, façon Arnauld, les propriétés suivantes[50]:

i) $a/b = c/d$ implique $b/a = d/c$

ii) $a/b = c/d$ implique $(a + b)/b = (c + d)/d$

iii) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $a/b = c/d$ implique $a/c = b/d$

Notons que Arnauld ne dit pas qu'une raison est un nombre.
Arnauld donnera une nouvelle formulation de la théorie des proportions dans les éditions ultérieures de son ouvrage[51], se proposant de rendre plus accessibles les seconds et troisième livres (ceux consacrés à la théorie des proportions et au calcul des raisons).
La raison devient *"la quantité relative d'une grandeur comparée à une autre"*[52], ce qui, à défaut de clarifier le concept de raison, en souligne le caractère quantitatif par rapport à la *"manière"* de la première édition.
En précisant que la raison est une quantité, Arnauld exprime que l'on peut comparer les raisons:

"Comme la raison est une quantité, quoique relative, toutes les propriétés de la quantité lui conviennent; c'est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison"[53]

Arnauld distingue encore raison de nombre à nombre et raison sourde; si la raison de nombre à nombre est représentée par une *"fraction"* ou *"nombre rompu"*, la raison sourde *"ne peut être marquée par aucun nombre"*[54]
Arnauld énonce alors plusieurs axiomes sur les proportions qui vont lui permettre d'énoncer le théorème suivant:

---

[50]*ibid* p. 5et 6
[51]une seconde édition sera publiée en 1683, puis corrigée en 1693; cette dernière est publiée dans le tome 42 des *Oeuvres complètes* d'Arnauld.
[52]Arnauld [Arn2], p. 39
[53]*ibid.*
[54]*ibid.*

"Deux raisons sont égales quand toutes les aliquotes communes pareilles de chaque antécédent sont également contenues dans son conséquent"[55]

Ainsi Arnauld démontre ce qui lui servait de définition de l'égalité des raisons dans la première édition.
Le théorème est évident dans le cas des raisons de nombre à nombre.
Dans le cas des raisons sourdes, Arnauld utilise le fait que, des raisons étant des grandeurs, on peut les comparer. Il montre alors, en utilisant la classique double réduction à l'absurde (la méthode d'exhaustion! [56]) que si les aliquotes pareilles des antécédents sont également contenues dans les antécédents, alors les raisons sont égales.
En effet, considérons les raisons a/b et c/d (notons que dans la troisième édition, Arnauld emploie la notation a/b pour désigner la raison de a à b, a étant appelé le numérateur et b le dénominateur) telles que les aliquotes pareilles de a et c sont également contenues dans b et d; cela signifie que si α est une partie aliquote de a et γ la partie aliquote pareille de c, soit

$$a = n\alpha \qquad c = n\gamma$$

alors b contient un même nombre de fois α augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que α et d contient le même nombre de fois γ augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que γ, soit

$$b = p\alpha + \varepsilon \qquad \varepsilon < \alpha$$

$$d = p\gamma + \eta \qquad \eta < \gamma$$

Si a/b et c/d ne sont pas égales, alors a/b est supérieure ou inférieure à c/d.
Supposons a/b supérieure à c/d, alors en augmentant le conséquent b, on diminue la raison a/b jusqu'à la rendre égale à c/d (le fait que a/b diminue lorsque b augmente est une conséquence des axiomes énoncés par Arnauld[57]). On peut alors trouver z tel que $a/(b + z) = c/d$; si on prend une partie aliquote de a inférieure à z, on arrive à une contradiction comme le vérifiera aisément le lecteur. Ainsi a/b ne peut être supérieur à c/d. Un raisonnement analogue montre que a/b ne peut être inférieur à c/d. On en conclut l'égalité des deux raisons.
Ici encore, Arnauld utilise le raisonnement par l'impossible. Ce caractère incontournable est lié à *"la divisibilité à l'infini"* comme le remarque Arnauld qui écrit:

"Or il est clair que tout ce qui tient de l'infini ne saurait être compris par un esprit fini tel que celui de l'homme."[58]

Il s'ensuit que l'on ne peut avoir pour des raisons sourdes *"des notions aussi claires"* que pour les raisons de nombre à nombre; Arnauld distingue ainsi les preuves négatives dans lesquelles intervient le raisonnement par l'absurde des preuves positives. Le terme *négatif* marque ici la

---

[55] *ibid.* p. 49

[56] rappelons l'ambiguïté du terme *"exhaustion"* inventé par Grégoire de Saint-Vincent pour lequel il signifie *"l'épuisement"* d'une surface ou d'un volume par une somme infinie de surfaces polygonales ou de volumes polyédraux (cf. l'article de Jean-Pierre Le Goff [LeG] cité dans la bibliographie). Il faut ici entendre le terme *"exhaustion"* comme signifiant l'exhaustion des cas : deux grandeurs étant données, l'une d'elles est nécessairement supérieure, inférieure ou égale à la seconde, si l'on montre que les deux premiers cas conduisent à une contradiction, alors l'égalité est vraie. La méthode d'exhaustion participe ainsi du raisonnement par l'absurde.

[57] Arnauld [Arn2], troisième axiome p.46.

[58] *ibid.* p. 97

limite de la compréhension humaine; on le retrouve dans la classique notion de *théologie négative*, laquelle se propose moins de dire ce que Dieu est que d'approcher la connaissance de Dieu en exprimant ce qu'il n'est pas.

3. *La théorie des parallèles*

Au livre VI de ses *Nouveaux Elémens de Géométrie*, Arnauld énonce deux manières de considérer des parallèles, l'une négative et l'autre positive:

"La négative est de ne se rencontrer jamais, quoi que prolongée à l'infini."

"La positive, d'être toujours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points sont également distants de l'autre: c'est-à-dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, sont égales."[59]

et l'auteur remarque que la notion négative est une conséquence de la notion positive.
Avec la définition dite positive, Arnauld admet implicitement qu'une ligne dont les points sont à une même distance d'une droite donnée est encore une droite, on sait aujourd'hui que cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles. La définition positive permet à Arnauld d'énoncer que, si deux droites sont perpendiculaires à une droite donnée, alors toute perpendiculaire à l'une d'elle est perpendiculaire à la seconde (sixième lemme) et d'en déduire que ces deux droites sont parallèles (première proposition).
Par contre, pour montrer l'égalité des angles alternes-internes, Arnauld a besoin de la mesure des angles qu'il relie à la mesure des arcs de cercle, et ce n'est qu'au livre VIII qu'il énonce la propriété suivante:

"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."[60]

Etant donnée l'importance de cette propriété, nous expliquons comment Arnauld la démontre.
Arnauld montre d'abord la possibilité de définir la mesure des arcs de cercle indépendamment du rayon, pour cela il énonce (huitième théorème du livre VII):

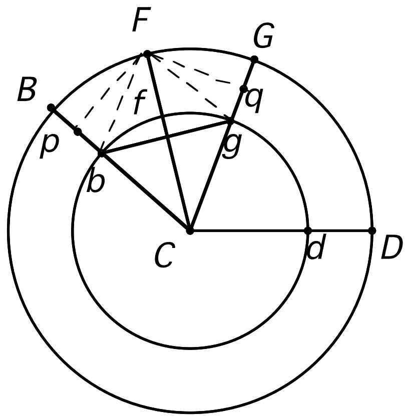
"Quand plusieurs circonférences sont concentriques et que du centre on tire des lignes indéfinies, les arcs de toutes ces circonférences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonférences."

La démonstration repose sur la théorie des proportions précédemment définies.
Notons d'abord que, dans un cercle ou dans deux cercles égaux, l'égalité des arcs soutenus par des cordes égales et l'égalité des cordes soutenant des arcs égaux (pourvu que ces arcs soient plus petits qu'un demi-cercle) sont posées en axiome (cinquième axiome du livre V), conséquence *"évidemment nécessaire de l'entière uniformité de la circonférence"*[61].
Arnauld définit alors le *sinus* d'un arc moindre que le quart de la circonférence comme la perpendiculaire menée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité et remarque que le sinus n'est autre que la moitié de la corde sous-tendant le double

---

[59]Arnauld [Arn1], livre VI, p. 103-104
[60]*ibid.* livre VIII, p. 152
[61]ibid. livre V, p. 86

de l'arc (notons que le sinus est une ligne), deux arcs égaux ont ainsi même sinus et réciproquement[62]. Arnauld peut alors démontrer le huitième théorème du livre VII.
La démonstration repose sur l'idée qu'une partie aliquote de l'arc de la grande circonférence définit une partie aliquote de l'arc de la petite circonférence et que la première partie aliquote est contenue dans la grande circonférence, avec peut-être un résidu, autant de fois que la seconde partie aliquote est contenue dans la petite circonférence[63].



On veut montrer que les arcs *BD* et *bd* sont entre eux comme les circonférences qui les portent.

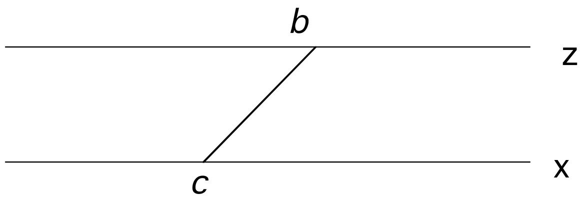
Soit **X** une partie aliquote de *BD*, et *BF* égal à cette aliquote, alors *bf* est la même aliquote de *bd*; pour le prouver, Arnauld construit l'arc *FG* égal à l'arc *BF* et montre que les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

En effet les arcs égaux *BF*, *FG* ont même sinus, alors les droites *pb* et *qg* sont égales (cela résulte de ce que deux cordes égales sont équidistantes du centre, quatrième du livre VII) et par conséquent les droites *Fb* et *Fg* sont égales, la droite *Fc* est donc la perpendiculaire à *bg* passant par son milieu et coupe l'arc *bg* en son milieu (second théorème du livre VII), ainsi les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

On laisse au lecteur le soin de terminer.
Le huitième théorème du livre VII permet alors de définir la mesure des arcs, la circonférence ou une partie déterminée de la circonférence étant prise pour unité[64].
L'angle étant défini, au début du livre VIII, comme une surface comprise entre deux lignes qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, ce point étant le sommet de l'angle, Arnauld peut alors énoncer alors la relation usuelle entre angle et arc de cercle, relation qui permet de définir la mesure des angles à partir de la mesure des arcs[65]. En particulier on peut définir le *sinus* d'un angle, un rayon (c'est-à-dire la longueur des côtés) étant donnée. On peut alors énoncer la proposition suivante (premier corollaire du livre VIII)

"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."

[62]ibid. livre VII, p. 126-127
[63]ibid. livre VII, p. 128
[64]ibid. livre VII, p. 129
[65]*ibid.* livre VIII, p. 142-143



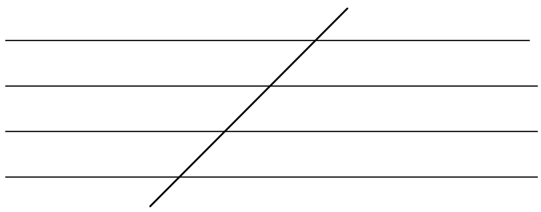
Pour le montrer, Arnauld remarque que, si l'on prend pour rayon la ligne *bc*, les sinus des angles alternes sont égaux.
Arnauld en déduit les deux corollaires (second et troisième corollaires):

"Les obliques égales entre les mêmes parallèles font des angles égaux (avec les parallèles)."

"Les obliques entre parallèles qui font des angles égaux sont égales."

ce qui implique (septième corollaire):

"Plusieurs parallèles étant également distantes les unes des autres, c'est-à-dire la première de la deuxième, la deuxième de la troisième, la troisième de la quatrième..., si une même ligne les coupent toutes, toutes les portions de ces lignes comprises entre deux de ces parallèles sont égales."

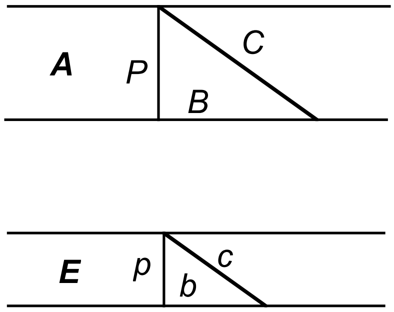


4. *Le théorème des lignes proportionnelles*

Au début du livre X consacré à l'étude des lignes proportionnelle, Arnauld introduit la notion d'espace parallèle, *"un espace compris d'une part entre deux droites parallèles et indéfini de l'autre"*[66].
Après avoir rappelé les résultats du livre VIII, Arnauld peut alors énoncer la proposition fondamentale:

"Lorsque deux lignes sont également inclinées en deux différents espaces parallèles, elles sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces, et leur éloignement de la perpendiculaire sont aussi en même raison."[67]

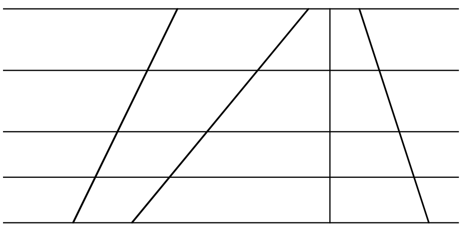
[66]*ibid.* livre X, p. 188
[67]*ibid.* livre X;, p. 190

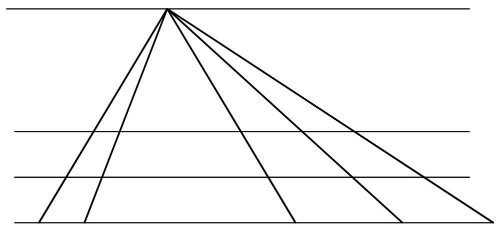


Soient les deux espaces ***A*** et ***E***, on notera *P* et *p* les perpendiculaires respectives dans l'espace ***A*** et dans l'espace ***E***, de même *C* et *c* les obliques respectives, *B* et *b* les éloignements respectifs. Alors *P* est à *p* comme *C* est à *c* et comme *B* est à *b*.
Divisons *P* en parties égales, *x* étant la partie aliquote de *P* ainsi définie, et menons par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace ***A***, lesquelles rencontrent *C* qu'elles divisent en parties égales, soit *y* la partie aliquote de *C* ainsi définie; par les points de division de *C*, on mène des parallèles à *P*, lesquelles rencontrent *B* qu'elles divisent en parties égales et on note *z* la partie aliquote de *B* ainsi obtenue; il est clair que *P* contient autant de fois *x* que *C* contient *y* et que *B* contient *z*.
Cela fait, prenons *x* pour mesurer *p* de l'espace ***E***, *x* est contenu un certain nombre de fois dans *p* avec peut-être un résidu moindre que *x*, alors en menant par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace ***E***, on divise *c* en autant de parties égales avec peut être un résidu, et en menant par les points de division de *c* des parallèles à *p*, on divise de même *b* en autant de parties égales avec peut-être un résidu; ainsi par la définition des grandeurs proportionnelles, *P* est à *p* comme *C* est à *c* et comme *B* est à *b*, ce qui prouve la proposition fondamentale.
Arnauld énonce plusieurs conséquences parmi lesquelles les deux suivantes (premier et second corollaires)[68]:

"Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième... comme chaque autre toute à la même partie première, ou deuxième, ou troisième..."

"Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celle qui les termine."





On comparera l'énoncé du premier corollaire du livre X avec celui du septième corollaire du livre VIII, cité ci-dessus.

68*ibid.* livre X, p. 193-194

5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Après la découverte des irrationnelles le numérique (les nombres entiers et les fractions d'entiers) devenait insuffisant pour construire une théorie de la mesure des grandeurs ; la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide se proposait alors de définir la mesure à partir de la seule considération des grandeurs ; elle s'appuyait pour cela sur la notion d'ordre et la mesure des grandeurs se définissait comme comparaison de grandeurs indépendamment de toute détermination numérique ; en cela la théorie de la mesure se différenciait de la pratique de la mesure. D'une part, mesurer consiste essentiellement, la grandeur unité ayant été choisie, à associer un *nombre* à la grandeur que l'on mesure, savoir, le nombre de fois que la grandeur contient l'unité (ou une partie de l'unité) ; or la théorie d'Eudoxe élimine le numérique pour les raisons que nous avons dites, elle énonce des règles de comparaison de rapports, non une méthode de détermination de la *valeur* d'un rapport. D'autre part, la pratique de la mesure s'appuie sur la détermination de parties (au sens des sous-multiples) de la grandeur que l'on mesure et de l'unité, alors que la théorie d'Eudoxe s'appuie sur de considérations d'équimultiples.
La problématique d'Arnauld nous semble, au contraire, beaucoup plus proche de la pratique de la mesure : une unité étant choisie, la mesure est définie par le nombre de fois que la grandeur contient l'unité, ou une partie de l'unité, avec peut-être un résidu, c'est la façon même dont Arnauld explicite le rapport de deux grandeurs homogènes lorsqu'il prend comme unité une partie aliquote de la première.
Ainsi deux points de vue apparaissent. Le premier propose une construction rigoureuse s'appuyant sur la notion d'ordre ; s'il élimine la difficulté posée par l'incommensurabilité, il s'écarte, pour les raisons que l'on a dites, de la pratique qu'il veut théoriser. Le second reste plus proche de la pratique de la mesure, contribuant ainsi à mettre en valeur la relation entre le numérique et le géométrique même s'il reste impuissant à définir ce lien de façon rigoureuse jusqu'à la construction des nombres réels.
Du point de vue géométrique, alors que les géomètres grecs vont chercher dans la méthode des aires les conditions de la rigueur, la notion d'aire devenant une notion première de la géométrie, Arnauld, conformément à sa recherche du *vrai ordre de la nature*, pose l'antériorité de la ligne par rapport à la surface; c'est cet ordre posé *a priori* qui l'amène à mettre en valeur, d'abord la définition positive des parallèles, ensuite la propriété qui énonce que des parallèles équidistantes découpent sur une sécante des segments égaux, propriété qu'il énonce deux fois, d'abord au livre VIII (septième corollaire), ensuite au livre X (huitième lemme), propriété qui énonce *la raison géométrique* du théorème des lignes proportionnelles, c'est elle en effet qui, une fois définie la théorie des proportions, guide la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, respectant ainsi le *vrai ordre de la nature*.
Notons le détour par la mesure des angles que propose Arnauld pour démontrer l'égalité des angles alternes-internes; les auteurs ultérieurs qui s'inspireront des méthodes d'Arnauld en donneront une démonstration plus simple s'appuyant sur les cas d'égalité des triangles, lesquels ne semblent pas avoir dans l'ouvrage d'Arnauld l'importante place qu'ils occupent dans l'œuvre euclidienne ; cependant la démonstration de la proportionnalité des angles et des arcs proposée par Arnauld restera un point important des traités de géométrie élémentaire.
D'Alembert pourra ainsi affirmer :

"Les propositions fondamentales (de la géométrie) peuvent être réduites à deux : la mesure des angles et le principe de superposition."[69]

---

[69]D'Alembert [Dal], *Essai*, p.113; voir aussi l'article *"Géométrie"* dans l'Encyclopédie [Eu].

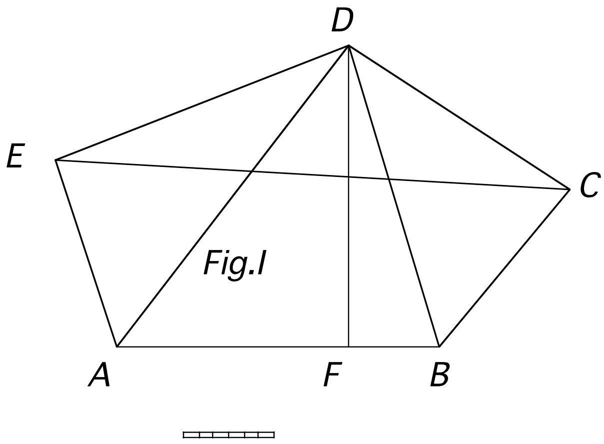
Euclide, après avoir montré que des angles au centre égaux découpent sur des cercles égaux des arcs égaux (*Eléments* Livre III, Propositions 24, 26, 27), utilisait la théorie des proportions du Livre V pour montrer cette proportionnalité (Livre VI, Proposition 33)[70]. Nous verrons ci-dessous comment les auteurs des grands traités de géométrie ont résolu le problème de la proportionnalité des angles et des arcs d'une façon analogue à celle dont ils démontrent le théorème des lignes proportionnelles.

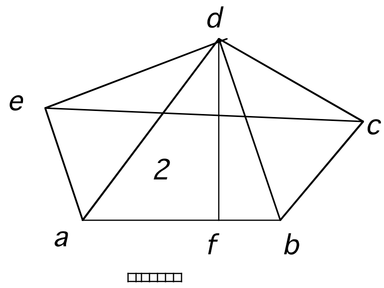
[70]Notons la difficulté posée par la définition d'un multiple d'un angle ou d'un arc; en effet pour Euclide, la notion d'angle implique que celui-ci est moindre que deux droits, cependant Euclide peut être amené à considérer des sommes d'angles plus grandes que deux droits; pour une discussion de ce problème, nous renvoyons à l'ouvrage cité de Heath [He1] (tome II, p. 275-276). Le point de vue d'Arnauld qui utilise les parties évite cette difficulté.

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*

On a vu que pour Arnauld la théorie de la mesure des grandeurs relève d'une arithmétique englobant nombres et grandeurs et que la théorie des proportions s'inscrit dans cette arithmétique. Cette conception, qui remet en question l'ordre euclidien, sera reprise dans la plupart des grands traités de géométrie élémentaire ultérieurs; dans ces traités le chapitre consacré aux lignes proportionnelles, qui devient le chapitre introductif à la mesure des grandeurs, s'appuie sur cette arithmétique préalable qui traite des raisons, mêlant arithmétique des nombres et arithmétique des grandeurs (le calcul numérique et le calcul spécieux de Viète) ; on évite ainsi une définition précise des proportions, se contentant de les définir comme des égalités de rapports sans que la notion de rapport soit toujours explicitée, soit que l'auteur renvoie à un traité d'arithmétique, soit qu'il juge inutile de préciser une notion qui lui apparaît claire.
Les idées développées par Arnauld seront reprises tout au long du XVIIIème siècle, nous ne pouvons ici citer tous les ouvrages traitant de la théorie des proportions géométriques, nous arrêtant seulement à deux traités, les *Elémens de Géométrie* de Clairaut qui restent l'un des meilleurs ouvrages d'introduction à la géométrie écrit jusqu'à ce jour (ouvrage malheureusement ignoré par l'enseignement) et le *Traité Elémentaire de Géométrie* de Bossut pour la démonstration qu'il donne du théorème des lignes proportionnelles.
Dans la préface de son ouvrage, Clairaut précise ses conceptions quant à l'enseignement de la géométrie insistant sur la nécessité de construire cet enseignement à partir d'une problématique bien définie. C'est ainsi qu'il s'appuie sur la mesure des terrains, problématique qu'il a choisi dans la mesure où elle lui sert *"d'occasion pour faire découvrir les principales propriétés géométriques"*[71].
C'est la nécessité de représenter à l'échelle les terrains que l'on veut mesurer qui conduit Clairaut à introduire la notion de figures semblables.

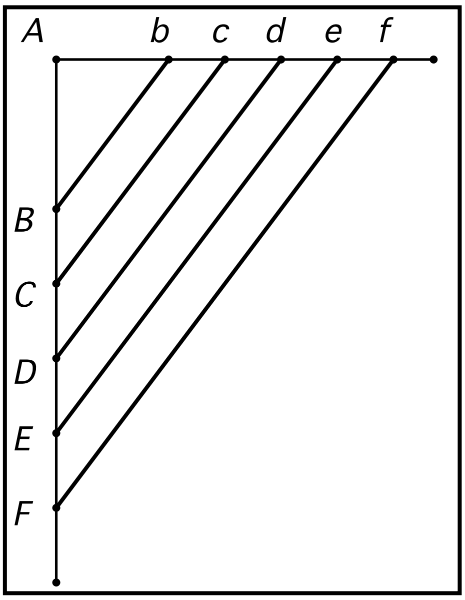


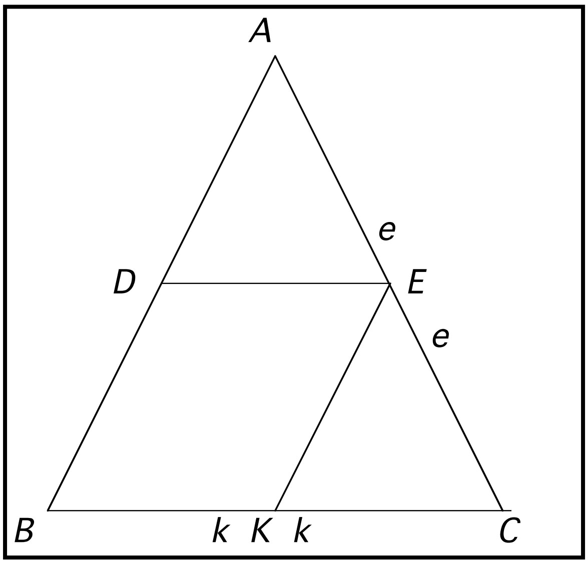


Deux figures *ABCDE* et *abcde* sont semblables si d'une part les angles *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sont respectivement égaux aux angles correspondant *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et si chacun des cotés *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* de la seconde figure contient une partie *p* autant de fois que chacun des côtés

[71]Clairaut [Cl], p. xiv

correspondants AB, BC, CD, DE, EA contient une partie P[72]. C'est cette dernière condition qui définit, selon Clairaut, la proportionnalité[73].
Dans un premier temps, Clairaut développe la théorie des figures semblables pour les seuls rapports commensurables; il montre en particulier que deux triangles équiangles sont semblables, de façon précise si les triangles ABC et abc sont équiangles et si ab est égal à une fraction de AB, alors ac (resp: bc) est égal à la même fraction de AC (resp: BC)[74].
C'est seulement à la fin du livre II, consacré à des calculs d'aires, que Clairaut étudie le cas des rapports incommensurables en utilisant une méthode d'approximation proche de celle d'Arnauld[75].
Le traité de Bossut a été rédigé à l'usage des candidats des concours d'entrée aux Ecoles militaires[76].
Dans la section de son traité relative aux lignes proportionnelles, Bossut montre d'abord que, si un côté d'un angle est divisé en parties égales et si l'on mène à partir des points de division des droites parallèles, elles découperont sur l'autre côté des parties égales (proposition I[77]). Il peut alors énoncer que dans un triangle ABC, une parallèle DE au côté BC partage les deux autres côtés en parties proportionnelles (proposition II[78]); lorsque AB et AD sont des grandeurs commensurables, Bossut divise AB en parties égales à une partie aliquote commune et la démonstration se réduit à un comptage, lorsque AB et AD sont des grandeurs incommensurables, Bossut divise le côté AB en *"une infinité de parties égales"*, les parallèles à BC menées par les points de division partagent le côté AC en parties égales, alors les points D et E *"tomberont ou seront censés tomber sur deux points de division de AB et AC"*, ce qui implique la proposition.





[72]ibid. Livre I, Article XXXIII
[73]ibid. Livre I, Article XXXV
[74]ibid. Livre I, Article XXXIX
[75]ibid. Livre II, Article XXVII
[76]Taton et alii. [Tat]
[77]Bossut [Bos], chapitre III, section I, p. 83
[78]ibid, p. 86

On peut comprendre une telle démonstration si on la relie à la géométrie de l'infini telle que l'ont développée Wallis et plus tard Fontenelle, variante de la théorie des indivisibles, l'infini apparaissant comme un *"nombre"* supérieur à tous les entiers[79].
On pourrait alors poser le problème d'une mise en forme d'une telle démonstration dans le cadre d'une géométrie non-standard qui userait des méthodes proches de celles de de l'analyse non-standard.

2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*

Avec l'ouvrage de Legendre[80], c'est un retour à Euclide qui se met en place ; nous n'analyserons pas ici l'ouvrage dans son ensemble, nous nous contenterons ici d'étudier la démonstration du théorème de Thalès et la relation entre le numérique et le géométrique sur laquelle elle s'appuie. Si Legendre revient à la méthode des aires pour retrouver la rigueur euclidienne (on verra en particulier l'utilisation de la méthode d'exhaustion), sa théorie de la mesure s'appuie sur une arithmétique préalable dont il rappelle les résultats au début de son ouvrage, et à laquelle il renvoie les notions de raison et de proportion, comme il l'explique dans la préface des premières éditions :

"Il est nécessaire, pour l'intelligence de cet ouvrage, que le lecteur ait la connaissance de la théorie des proportions, que l'on trouve expliquée dans les traités ordinaires d'arithmétique ou d'algèbre..."[81]

Il peut ainsi mêler dans ses raisonnements, comme nous le verrons, les méthodes euclidiennes et les propriétés numériques.
Au début du livre III, intitulé *Les proportions des figures* Legendre remarque à propos des proportions:

"Si on a la proportion **A**:**B** :: **C**:**D** (**A** est à **B** comme **C** est à **D**)*, on sait que le produit des extrêmes* **A** x **D** *est égal au produit des moyens* **B** x **C**.*"*[82],

et il explique

*"Cette vérité est incontestable pour les nombres; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres; et c'est ce qu'on peut toujours supposer: par exemple, si **A**, **B**, **C**, **D**, sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité; alors **A**, **B**, **C**, **D**, représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes **A**, **B**, **C**, **D**, devient une proportion de nombres."*

mêlant ainsi calcul numérique et calcul sur les grandeurs.
Ainsi la théorie des proportions présuppose la mesure sans que Legendre explicite les conditions de la mesure.

3. *La méthode des aires*

---

[79]cf. Wallis [Wa] et Fontenelle [Fo]; cf. aussi Anne Chevalier [Ch1] et Michel Blay [Bl].
[80]Legendre [Le]
[81]Legendre [Le], préface de la troisième édition, p. ii
[82]ibid, p. 61

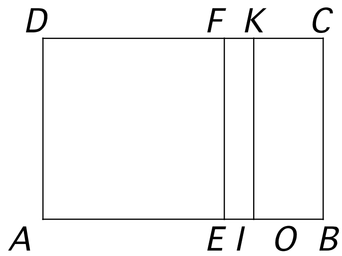
Notons d'abord que l'un des objectifs de Legendre est de démontrer le postulat des parallèles qu'il énonce sous la forme :

"Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits."

Les diverses éditions de son ouvrage correspondent aux différents démonstrations qu'il donne de cette assertion, (notons que dans les neuvième, dixième et onzième éditions, devant les critiques, il renonce à cette démonstration jusqu'à ce qu'il en trouve une nouvelle qu'il publie dans la douzième édition), mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici.
Une fois démontrée cette assertion, Legendre peut démontrer la proposition énoncée comme postulat par Euclide, puis l'égalité des angles correspondants et alternes-internes définis par deux droites parallèles coupant une autre droite. Au livre III de son ouvrage, Legendre montre d'abord, à la façon d'Euclide, que les parallélogrammes (resp. les triangles) ayant des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents (c'est-à-dire ont des aires égales), puis il énonce l'assertion (proposition 3) :

"Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases."

Lorsque les bases commensurables, l'assertion résulte d'un découpage convenable.
Lorsque les bases sont incommensurables, Legendre utilise la méthode d'exhaustion (c'est-à-dire la double réduction à l'absurde)



On veut montrer que l'aire *ABCD* est à l'aire *AEFD* comme *AB* est à *AE*, on considère le point *O* défini par la proportion

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEFD :: AB : AO$$

l'existence du point *O* étant assurée par les propriétés arithmétiques des proportions numériques (en particulier le recours à l'arithmétique assure l'existence de la quatrième proportionnelle, dans la mesure où l'on admet que l'unité de longueur étant donnée, à tout nombre correspond une longueur).
On va montrer que *O* et *E* coïncident en prouvant que chacune des inégalités $AO > AE$ et $AO < AE$ conduit à une contradiction.
Supposons $AO > AE$, auquel cas le point *O* est entre *E* et *B*; divisons *AB* en parties égales à une longueur inférieure à celle de *EO*, il existe alors un point de division *I* situé entre *E* et *O*, auquel cas, considérant le rectangle *AIKD*, on peut écrire

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AIKD :: AB : AI$$

et par conséquent,

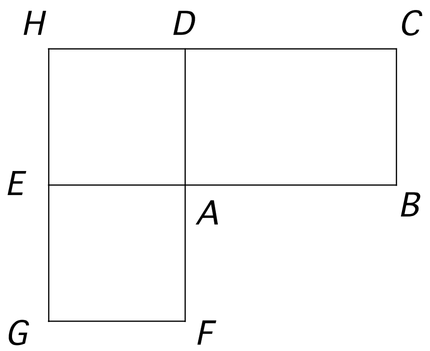
$$\text{aire } AIKD : \text{aire } AEFD :: AI : AO$$

mais *AEFD* est plus petit que *AIKD* et *AO* est plus grand que *AI*, ce qui est contradictoire.
De même, on montre que l'hypothèse $AO < AE$ est contradictoire, ce qui prouve l'égalité $AO = AE$, donc les points *O* et *E* coîncident.
Les ingrédients de la démonstration du théorème de Thalès par la méthode des aires sont ainsi en place, mais le théorème apparaît seulement à la proposition 15 ; avant d'utiliser la méthode des aires, Legendre explique comment on peut dire que l'aire d'un rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur, en reliant cette formule au choix des unités. En fait, Legendre énonce la propriété suivante (proposition 4) :

Deux rectangles quelconques ABCD, AEGF sont entre eux comme les produits des bases multipliés par les hauteurs, de sorte qu'on a

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEGF :: AB \times AD : AE \times AF$$

En effet, disposant les deux rectangles comme ci-dessous



on a les proportions

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEHD :: AB : AE$$

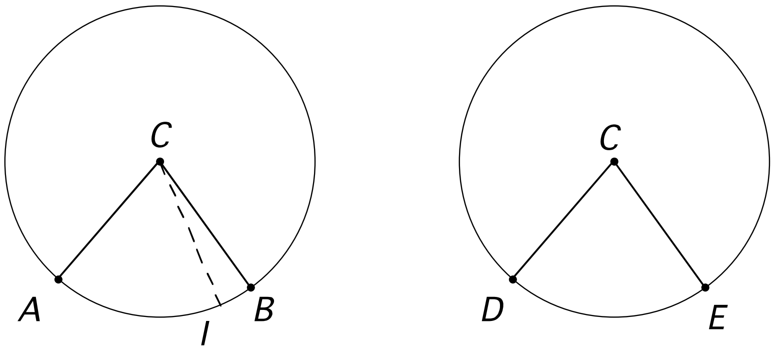
$$\text{aire } AEHD : \text{aire } AEGF :: AD : AF$$

on obtient la proportion cherchée par multiplication.
Legendre remarque alors que *"l'on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la base, et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur"*[83].
Legendre explique que cette mesure n'est pas absolue, mais qu'elle le devient si on prend comme unité de surface le carré dont le côté est l'unité de longueur.
Cela étant dit, la méthode des aires devient une méthode de calcul et c'est ainsi qu'il l'utilise dans la suite, transformant en calcul le raisonnement euclidien, mêlant calcul numérique et calcul sur les grandeurs.
Legendre démontre ainsi plusieurs résultats des livres I et II des *Eléments* d'Euclide, dont le théorème de Pythagore (sa démonstration est celle d'Euclide), le théorème de Thalès est énoncé seulement à la proposition 15, l'énoncé et la démonstration sont ceux d'Euclide.
La suite du livre III est consacrée à l'étude des figures semblables. Il en déduit les classiques relations métriques dans un triangle. Ces relations portent, une fois l'unité choisie, sur les

[83]ibid, p. 66

mesures de longueurs; les démonstrations se ramènent ainsi à un simple calcul (en cela Legendre se détache de la tradition euclidienne).
Notons que Legendre utilise la même méthode pour montrer la proportionnalité des angles au centre et des arcs[84]. Il montre d'abord, en utilisant le principe de superposition, la proposition suivante (Livre II, proposition 15):

"Dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, les angles égaux ACB, DCE dont les sommets sont au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux AB, DE. Réciproquement, si les arcs AB, DE sont égaux, les angles ACB, DCE seront aussi égaux."



Legendre montre alors l'égalité des rapports des angles aux centres et des rapports des arcs qu'ils sous-tendent dans le cas commensurables (proposition 16), puis, utilisant une méthode analogue à celle qu'il utilisera pour la démonstration de la proposition 3 du Livre III (cf. ci-dessus), il montre l'égalité des rapports dans le cas incommensurable (proposition 17). Nous laissons au lecteur le plaisir d'écrire une telle démonstration, sachant que Legendre admet, comme Euclide, l'existence de la quatrième proportionnelle. Ici la démonstration est indépendante de tout recours au numérique.

4. *Les éditions posthumes*

L'ouvrage de Legendre deviendra, jusqu'à la réforme des mathématiques modernes des années soixante de ce siècle, une référence sur l'enseignement de la géométrie. En particulier on retiendra le division en livres (auquel on ajoutera un livre sur les coniques) mais aussi l'ambiguïté quant aux relations entre les grandeurs et leurs mesures mais nous reviendrons ultérieurement sur ce dernier point.
Après la mort de Legendre (1833), l'ouvrage sera remanié par Blanchet qui le publiera cependant sous le même titre avec Legendre comme nom d'auteur.
Si Blanchet introduit la méthode des limites[85] qui lui permet de calculer la circonférence d'un cercle, il reprend le texte de Legendre en ce qui concerne la théorie des proportions, la méthode des aires et le théorème des liges proportionnelles.

---

[84]*ibid*, p. 43 et sqq
[85]Blanchet[Bl], p. 116-118

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

On dit souvent que, jusqu'à la réforme dite des *mathématiques modernes*, l'enseignement de la géométrie en France a suivi l'ouvrage de Legendre, c'est en partie vrai[86], mais c'est oublier l'influence de Lacroix et à travers lui de Port-Royal. Lacroix s'appuie à la fois sur les logiciens de Port-Royal et sur l'empirisme des Lumières, en particulier le sensualisme de Condillac, comme il l'explique dans un long discours préliminaire publié dans certaines éditions de ses *Elémens de Géométrie*[87].

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*

Les *Elémens* de Géométrie de Lacroix constituent le troisième volume d'un cours élémentaire de mathématiques pures à l'usage des élèves de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations[88], cours qui comprend un *Traité élémentaire d'Arithmétique*, des *Elémens d'Algèbre*, les *Elémens de Géométrie*, un *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, ainsi que des *Compléments des Elémens d'Algèbre*.

Dans le discours préliminaire qui introduit les *Elémens de Géométrie*, Lacroix exprime les principes généraux qui ont guidé l'ouvrage et qui reposent sur *le vrai ordre de la nature* et la correspondance entre cet ordre et l'ordre de la connaissance, *l'ordre des abstractions* pour utiliser le langage de Condillac. En fait, même si les logiciens de Port-Royal refusent l'empirisme[89], un empiriste comme Condillac partage avec eux le principe d'un ordre de la nature et le principe d'une correspondance entre l'ordre de la connaissance et l'ordre naturel. Ainsi Condillac écrit dans son *Essai sur l'origine des connaissances humaines*:

"La nature indique elle-même l'ordre qu'on doit tenir dans l'exposition de la vérité."[90]

C'est ce souci du *"vrai ordre de la nature"* qui conduit Lacroix à reprendre, en ce qui concerne les propriétés des lignes proportionnelles, l'exposé d'Arnauld qui démontre ces propriétés en s'appuyant sur les lignes, évitant le détour euclidien par les aires, mais ce souci du vrai ordre de la nature n'exclut pas la rigueur, et la rigueur est celle d'Euclide, comme l'explique Lacroix dans son discours préliminaire, se proposant de montrer *"qu'on peut accorder l'ordre et la rigueur"*[91], l'ordre de la nature et non l'ordre artificiel de la construction euclidienne, et la rigueur euclidienne trop oubliée dans les ouvrages du XVIIIème siècle.

Nous noterons cependant l'usage de la méthode d'exhaustion dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, même si Lacroix utilise la méthode des limites pour d'autres questions, méthode qui nous semble plus proche du point de vue d'Arnauld; mais c'est que la relation entre le géométrique et le numérique se heurte encore à la question de la définition des nombres, question qui ne sera résolue que par la construction des réels dans la seconde partie du siècle. Lacroix hésite dans son exposé entre une méthode d'exhaustion qui reste la méthode rigoureuse, même si elle apparaît comme un détour peu naturel, et une méthode des limites plus naturelle mais encore floue. Nous verrons ci-dessous comment

---

[86]En particulier la division en Livres du cours de géométrie est restée celle de l'ouvrage de Legendre jusqu'au milieu de notre siècle.

[87]Lacroix [Lac 3], discours préliminaire (publié dans la quatrième édition)

[88]Les écoles centrales crées en l'an III de la Révolution deviendront les lycées en en 1802.

[89]Arnauld, Nicole [AN], p. 69-72

[90]Condillac [Cn], p. 288

[91]Lacroix [Lac 3], discours préliminaire, p. xxii; Lacroix se réfère à l'exemple donné par Bertrand qui a publié en 1778 un ouvrage intitulé *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques*, ouvrage souvent cité à l'époque.

Lacroix, à propos des incommensurables qu'il ne sait pas définir rigoureusement, évite la question dans ses *Elémens d'Algèbre* et, pour rendre rigoureux son discours géométrique, admet implicitement, comme le fait Legendre, l'existence d'une quatrième proportionnelle ; par contre, pour éviter les difficultés du calcul sur les grandeurs, il exprime, *via* la mesure, les relations métriques comme des relations numériques. Nous verrons plus loin quelle fut son influence sur les traités de géométrie élémentaire des XIXème et XXème siècle.

2. *Les proportions*

Les *Elémens de Géométrie* s'appuient sur la connaissance préalable de l'arithmétique dont relève la théorie des proportions ; notons que le *Traité d'Arithmétique* ne traite que des rapports entiers ou fractionnaires[92], de même le supplément d'arithmétique placé au début des *Elémens de Géométrie*, qui traite du calcul des proportions. Les nombres irrationnels apparaissent dans les *Elémens d'Algèbre* avec le calcul des racines carrées; Lacroix y montre que la racine carrée d'un entier n'est en général pas un entier mais ajoute:

"Cependant on sent qu'il doit exister une quantité qui, multipliée par elle-même, produise un nombre quelconque..."[93]

ce qui le conduit à distinguer deux sortes de nombres, les nombres rationnels qui sont commensurables avec l'unité et les nombres irrationnels qui sont incommensurables, avant d'exposer la méthode arithmétique de calcul approché des racines carrées.

En ce qui concerne la géométrie, il explique dans les premières pages de son ouvrage comment trouver la commune mesure de deux droites, méthode analogue à la recherche du p.g.c.d. de deux nombres, distinguant deux cas suivant que l'opération s'arrête ou non[94].

3. *Les lignes proportionnelles*

Nous ferons d'abord quelques remarques sur la théorie des parallèles; celles-ci étant définies comme des droites d'un même plan qui ne se rencontrent pas, Lacroix admet l'axiome qui dit que *"une droite perpendiculaire à une autre, est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre"*[95] ; rappelons qu'un axiome est, pour Lacroix comme pour Legendre, *"une propriété évidente par elle-même"*.

Il peut alors montrer l'égalité des angles correspondants et alternes-internes en utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles[96] :

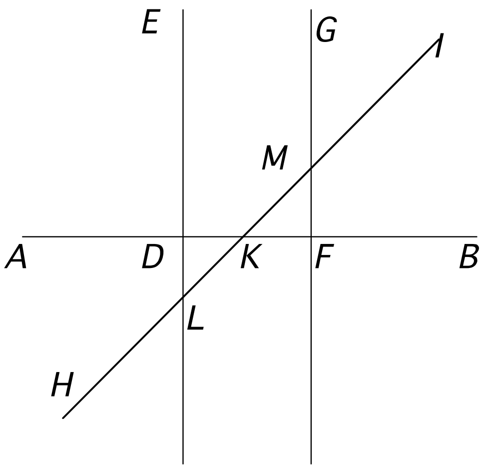
[92] Lacroix [Lac 1], n° 108-120

[93] Lacroix [Lac 2], n° 99

[94] Lacroix [Lac 3], n° 4-5

[95] *ibid*, n° 39

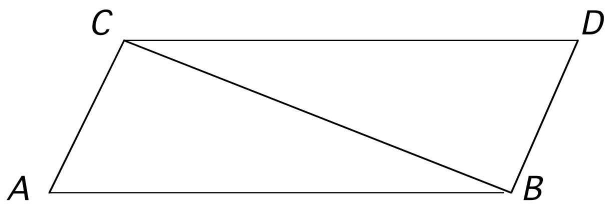
[96] *ibid*, n° 44-47



Soit la droite *HI* coupant les parallèles *DE* et *FG* en deux points *L* et *M* et soit *K* le milieu de *LM*, on mène de *K* la perpendiculaire aux deux parallèles données, alors les triangles rectangles *DLK* et *FMK* sont égaux, ce qui implique les égalités cherchées.

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème:

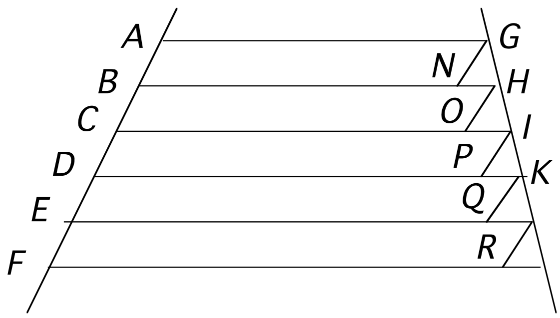
"Les parties AC et BD de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement."[97]



Il suffit de remarquer que les triangles *ABD* et *ACD* sont égaux. On en déduit que deux parallèles *"sont partout également éloignées l'une de l'autre"*[98].

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème:

"Si deux droites quelconques AF et GM sont coupées par un nombre quelconque de parallèles, AG, BH, CI, etc. menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties GH, HI, IK, etc. de la seconde, seront aussi égales entre elles."[99]



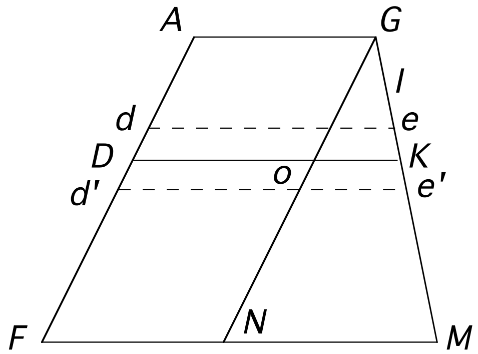
[97]ibid, n° 54
[98]ibid, n° 55
[99]ibid, n° 56

Il suffit de remarquer, d'abord que les droites *GN*, *HO*, *IP*, etc. sont égales, puis que les triangles *GNH*, *HOI*, *IPK*, etc. sont égaux.

On montre alors le théorème:

"Trois parallèles AG, DK, FM, coupent deux droites quelconques AF et GM en parties proportionnelles."[100]

Si *AD* (Cf. figure ci-dessous) est commensurable avec *AF*, c'est une conséquence du théorème précédent. Lorsque *AD* et *AF* sont incommensurables, Lacroix utilise la méthode d'exhaustion, admettant implicitement, comme nous l'avons déjà dit, l'existence d'une quatrième proportionnelle.



Soit I le point de la droite GM tel que

$$AF : AD :: GM : GI$$

on va montrer que les points I et K coïncident.

Supposons $GI < GK$, et divisons AF en parties égales suffisamment petites de sorte qu'il existe un point de division d tel que la parallèle menée par d à AG rencontre GM en un point e situé entre I et K, alors

$$AF : Ad :: GM : Ge$$

et par conséquent

$$Ad : AD :: Ge : GI$$

or $Ad < AD$ et $Ge > GI$, ce qui est contradictoire.

De même si on suppose $GI > GK$, on obtient une contradiction, par conséquent $GI = GK$, autrement dit I et K coïncident.

Notons que ce même raisonnement d'exhaustion est employé dans la suite de l'ouvrage pour montrer la proportionnalité entre angles et arcs[101], c'est aussi, nous l'avons vu, la méthode qu'emploie Legendre dans ses *Elémens de Géométrie*.

Une fois démontré le théorème des lignes proportionnelles, Lacroix étudie la similitude et en déduit les relations métriques usuelles dans les triangles; comme chez Le-

---

[100]ibid, n° 58

[101]ibid, n° 109

gendre, ces relations portent sur les mesures des grandeurs considérées. C'est ainsi que Lacroix énonce le théorème de Pythagore:

".. les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse, est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côté."[102]

En fait il montre d'abord le théorème:

"Si de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on appelle hypoténuse,
1°. cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux.
2°. elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou segments, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière.
3°. La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse."[103]

Dans l'énoncé et dans la démonstration de ce théorème, Lacroix travaille sur les lignes, mais pour effectuer les calculs qui conduisent au théorème de Pythagore, il utilise les mesures, se ramenant à un calcul purement numérique; en cela il se distingue de Legendre qui, comme on l'a déjà remarqué, mêle calcul numérique et calcul spécieux.

Enfin notons que l'ouvrage de Lacroix marque l'abandon dans les traités d'enseignement de la méthode des aires.

---

[102]ibid, n° 75
[103]ibid, n∞ 74

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*

Tout au long du XIXème siècle et dans la première partie du XXème siècle[104] on retrouve plusieurs points communs dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles (qui deviendra le théorème de Thalès), lesquels se rattachent essentiellement au point de vue de Lacroix[105].

D'un point de vue géométrique, on abandonne définitivement la méthode des aires et on utilise essentiellement la démonstration de Lacroix, que l'on énonce le théorème pour un triangle ou pour la figure formée par deux droites coupées par des parallèles. Nous n'insisterons pas sur ce point.

En ce qui concerne les rapports de grandeurs, les auteurs s'appuient une arithmétique préalable, soit qu'ils renvoient à d'autres ouvrages, soit qu'ils explicitent cette arithmétique préalable dans leur ouvrage.

Les rapports de grandeurs sont définis via la mesure des grandeurs dont on admet qu'elle est possible (rejoignant ainsi le point de vue de Legendre (cf. ci-dessus)).

Voici par exemple la définition donnée en 1883 par Amiot dans ses *Eléments de Géométrie* (rédigés d'après les programmes de l'enseignement scientifique des lycées):

"Le rapport de deux grandeurs de même espèce est le nombre qui exprimerait la mesure de la première si on prenait la seconde pour unité."[106]

Amiot distingue alors entre rapports de grandeurs commensurables et rapport de grandeurs incommensurables;dans le premier cas, le rapport est un nombre entier ou fractionnaire, dans le second cas, *"il est impossible de mesurer la première en prenant la seconde comme unité"*.[107]

Amiot remarque alors que deux grandeurs **A** et **B** incommensurables étant données, on peut trouver une grandeur **A'** commensurable à **B** *"qui diffère de* **A** *aussi peu que l'on veut"*, et il précise: *"dans les applications numériques, on remplace* **A** *par* **A'**, *et lorsqu'on parle du rapport de* **A** *à* **B**, *il faut entendre celui de* **A'** *à* **B**[108].

L'égalité des rapports se ramène ainsi, sans que Amiot l'explicite plus, à l'égalité des rapports commensurables.

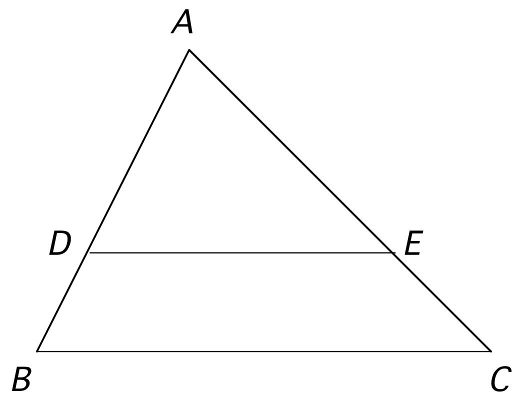
Dans un ouvrage antérieur, le *Cours de Géométrie élémentaire* (à l'usage des Lycées et Collèges et de tous les établissements d'instruction publique) publié en 1859, Guilmin, après avoir énoncé le théorème:

"Toute ligne parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles"[109]

et démontré celui-ci dans le cas ou *AB* et *AD* sont commensurables,

---

[104]nous ne parlerons pas dans cet article des ouvrages de la réforme de 1970 et des contre-réformes qui ont suivi.
[105]on peut noter ici une continuité depuis le point de vue développé par Arnauld et les Philosophes de Port-Royal
[106]Amiot [Am], p.55
[107]Ainsi la question se pose encore de savoir si un rapport incommensurable peut être représenté par un nombre.
[108]Amiot [Am], p. 56
[109]Guilmin [Gu], p. 77



expliquait:

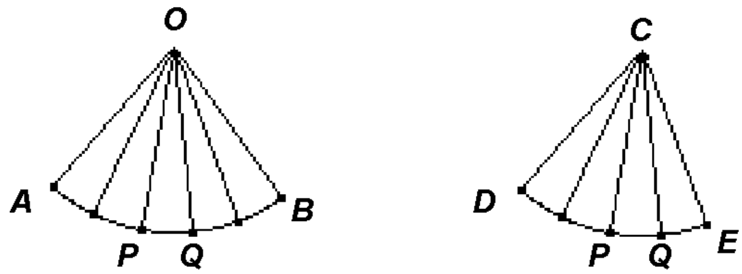
*"Ce raisonnement démontre le théorème pour tous les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, entre les segments **AD**, **DB** du même côté de AB, ce théorème est donc vrai en général."*[110]

On rencontre de telles explications encore au XXème siècle. Ainsi dans les *Eléments de Géométrie* de Vacquant et Macé de Lépinay (à l'usage des classes de sciences des lycées), les auteurs écrivent, après avoir donné une démonstration de l'égalité des rapports des arcs et des angles qui les sous-tendent en utilisant des approximations rationnelles des rapports incommensurables,

"Pour le commençant, il convient de terminer comme il suit la démonstration (donnée dans le cas commensurable): le théorème étant vrai quelque soit la commune mesure entre les arcs, il est encore vrai quand les arcs sont incommensurables."[111]

La démonstration donnée par Vacquant et Macé de Lépinay met l'accent sur les problèmes de l'incommensurabilité d'une façon qui, si elle reste insuffisante du point de vue canonique (les nombres réels ne sont pas définis), met en valeur les points essentiels du problème; nous indiquons ici les grandes lignes de la démonstration[112].

"Si, des sommets de deux angles comme centre, on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles est égal au rapport des arcs compris entre les côtés de chacun des deux angles."



[110]Guilmin [Gu], p. 78

[111]Vacquant et Macé de Lépinay [VM], p. 81, note 1

[112]ibid. p. 80-81; en ce qui concerne le théorème de Thalès (ainsi appelé dans l'ouvrage), les auteurs renvoient à cette démonstration, cf. p. 134.

Les auteurs démontrent d'abord le théorème dans le cas ou les arcs *AB* et *DE* ont une commune mesure; c'est alors un simple exercice de comptage.

Dans le cas où les arcs *AB* et *DE* sont incommensurables, on partage *DE* en un certain nombre de parties égales, soit n; supposons que *AB* soit supérieur à m de ces parties mais inférieur à $m+1$ d'entr'elles, les auteurs raisonnent de la façon suivante:

"Les nombres m/n et $(m + 1)/n$ sont les valeurs approchées par défaut et par excès, à moins de $1/n$, du rapport des arcs AB et DE. Or si nous menons les rayons par les points de division des arcs ***AB*** *et* ***DE****, l'angle DCE se trouve partagé en n parties égales, et l'angle AOB est supérieur à m de ces parties et inférieur à $m + 1$. Les nombres m/n* et *$(m + 1)/n$ sont donc aussi les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $1/n$, du rapport des angles* ***AOB*** *et* ***DCE****. Les valeurs approchées à moins de $1/n$ des deux rapports étant égales, quelque soit n, les rapports sont égaux."*

L'argument renvoie à une propriété énoncée au début de l'ouvrage à propos de la mesure des grandeurs.

Vacquant et Macé de Lépinay y appelle *"**rapport** de deux grandeurs de même espèce, rangée dans un certain ordre, le nombre qui est la **mesure** de la première quand on prend la seconde pour unité"*[113].

La mesure est définie soit par un nombre entier ou fractionnaire lorsque les grandeurs sont commensurables, soit comme limite de valeurs approchées lorsqu'on compare la première grandeur à une grandeur commensurable à la seconde (la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$ près du rapport de **A** à **B** est le nombre m/n tel que **A** contienne m fois la n-ième partie de **B** mais soit contenu dans $m + 1$ fois cette partie). Cette limite (dont l'existence est admise) est appelée un *"nombre incommensurable"*.

Vacquant et Macé de Lépinay expliquent alors que, quatre grandeurs de même espèce étant données, le rapport de **A** à **B** et le rapport de **C** à **D** sont égaux si ces rapports ont même valeur approchée à moins de $1/n$ près pour toute valeur de n. On peut y voir une forme plus élaborée de la définition d'Arnauld.

On trouve ici la trace de la construction des réels élaborée dans la seconde partie du XIXème siècle et la mise en place d'une théorie de la mesure s'appuyant sur cette construction, même si les auteurs, s'adressant à des élèves de lycées s'en tiennent à un niveau intuitif. En fait, il s'agit moins de donner une construction rigoureuse que d'indiquer les grandes lignes de ce que serait cette construction en précisant la notion d'approximation, celle-ci restant liée à l'opération même de mesure, et l'existence du nombre défini par l'opération de mesure étant admise[114].

On voit ici, par rapport aux ouvrages du siècle précédent, un effort de rigueur dans la définition des rapports incommensurables; en particulier, la mesure n'est plus un simple donné auquel on renvoie comme le fait Legendre, elle est au coeur de la construction et l'arithmétique préalable s'inscrit dans le géométrique[115]. On peut comprendre alors que les auteurs demandent, dans une première lecture, de passer outre et d'admettre le pseudo-raisonnement qu'ils proposent au commençant.

2- *Constructions des nombres réels et mesure des grandeurs*

---

[113]ibid. p. 5-7

[114]On trouve une démonstration analogue (toujours à propos de la mesure des arcs et des angles dans le Cours de Géométrie de Neveu et Bellanger à l'usage des Ecoles Primaire Supérieure [NB] (1ère année, p. 152-156). La démonstration du théorème de Thalès (2ème année, p. 17) renvoie à cette démonstration.

[115]Il faut toutefois noter que les nombres ont ici une existence propre indépendante de la géométrie.

Nous avons déjà cité dans le paragraphe précédent des ouvrages s'appuyant, implicitement ou explicitement, sur la notion des nombres réels telle qu'elle s'est élaborée dans la seconde moitié du XIXème siècle. C'est l'aspect géométrique (ou plus généralement l'aspect mesure des grandeurs) qui est mis en valeur. Mais la notion de grandeur n'est pas absente de la construction des réels même si cette construction se réduit à des considérations purement arithmétiques (ce que l'on a appelé *l'arithmétisation de l'analyse*), l'arithmétique jouant ici le rôle d'un principe unificateur des mathématiques avant que ce rôle ne soit dévolu à la théorie des ensembles.

Le lien entre arithmétique et géométrie est souligné par Dedekind dans son cours d'analyse lorsqu'il développe la construction des nombres réels par les coupures[116].

Même si la problématique de Dedekind relève de l'analyse (comment fonder le calcul différentiel[117]), c'est la géométrie qui va guider la construction (la *création* dit Dedekind) des nombres réels; c'est pour établir une correspondance biunivoque entre les nombres et les points de la droite et assurer ainsi la continuité des nombres que Dedekind fabrique les nombres réels; en retour, la construction *arithmétique* des nombres réels, indépendamment de tout recours à la géométrie, permet de préciser ce qu'on entend par continuité de la droite[118]. En ce sens, c'est la construction du continu arithmétique qui permet de redéfinir le continu géométrique.

Ce n'est pas ici le lieu de raconter l'histoire des nombres réels, celle-ci ne nous intéresse que par ses relations avec la mesure des grandeurs. Une construction purement arithmétique du numérique permet une nouvelle définition de la mesure des grandeurs, définition qui, nous le verrons, est plus proche de la pratique de la mesure (associer un nombre à une grandeur) que la construction d'Eudoxe, tout en apportant du point de vue de la rigueur le fondement qui manquait aux méthodes d'approximations développées aux XVIIème et XVIIIème siècles[119].

C'est une telle construction de la mesure des grandeurs que développe Jules Tannery dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, ouvrage qui s'inscrit dans une collection dirigée par Gaston Darboux à l'usage de la classe de Mathématiques[120], collection qui comprend entre autres les *Leçons de Géométrie* de Hadamard.

Les trois derniers chapitres qui *"s'adressent aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques"*[121] exposent la construction des nombres réels (chapitre XII), la théorie de la mesure des grandeurs (Chapitre XIII) et une introduction à la théorie des nombres (chapitre XIV).

Après avoir construit les nombres réels par la méthode des coupures de Dedekind, Tannery définit la mesure des grandeurs comme correspondance entre grandeurs et nombres.

---

[116]Ce cours eut lieu en 1862-1863 mais ne sera publié qu'en 1872. Il constitue la première partie de l'édition anglaise: *Essay on the theory of numbers* [Ded]. Pour une étude de cet ouvrage, nous renvoyons a l'ouvrage de Pierre Dugac [Dug].

[117]Dedekind [Ded], p. 1

[118]Comme l'explique Dedekind, la continuité de la droite *"n'est d'autre qu'un axiome"* (ibid, p. 12), l'existence de l'espace n'impliquant pas la nécessité qu'il soit continu. Une fois les nombres réels construits, c'est un axiome géométrique qui précisera la correspondance biunivoque entre les nombres réels et les points de la droite, ce que l'on a appelé *l'axiome de Cantor-Dedekind* (voir par exemple: Valiron [Va], p. 3 et l'article de Enriques dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [Enr], p. 34-36).

[119]Bourbaki [Bou], p. 184-185

[120]Il s'agit de la classe terminale appelée plus tard classe de *mathématiques élémentaires* devenue après la réforme Fouchet de 1965, la **TC** (terminale **C**).

[121]Tannery (TanJ], préface de la première édition (1894), p.vi de l'édition citée. On peut voir, à la lecture de ces ouvrages, que ceux-ci ne se réduisent pas à de simple manuels.

Les nombres ayant été construits de façon autonome (c'est-à-dire indépendamment de toutes considérations de grandeurs), Tannery se propose de mettre en forme la définition classique

"On appelle grandeur ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution."[122]

Tannery élimine d'abord de son étude les grandeurs discrètes (dont la mesure ne relève que du comptage) et s'intéresse aux grandeurs satisfaisant la propriété suivante:

"Si l'on compare deux états **A**, **A'** *quelconques, mais distincts, il y a au moins un état intermédiaire* **A''**. *"* [123]

autrement dit, si **A** < **A'**, il existe **A''** tel que **A** < **A''** < **A'** ; Tannery remarque alors qu'il y a une infinité d'états intermédiaires.

Il peut alors établir la correspondance suivante:

"Etant donné deux états **A**, **A'** *de la grandeur* (**G**) *et supposons qu'on ait* **A** < **A'** (...) *imaginons qu'on fasse correspondre aux états* **A** et **A'** *deux nombres entiers,* 10 *et* 20 *par exemple, en ayant soin de faire correspondre le plus petit entier* 10 *à la plus petite des grandeurs* **A**, **A'**.

Aux différents nombres entre 10 *et* 20, *nous allons faire correspondre des états intermédiaires à* **A** *et* **A'** *en observant la condition suivante que j'appellerai la condition fondamentale, si aux nombres distincts b, c, on fait correspondre les états distincts* **B**, **C**, *on aura* **B** < **C** *ou* **B** > **C** *suivant que b < c ou b > c. A des nombres égaux, on fera correspondre les mêmes états de grandeur.*

Aux nombres entiers compris entre 10 *et* 20 f*aisons correspondre, d'après une loi déterminée mais d'ailleurs arbitraire, des états intermédiaires à* **A** *et* **A'**, *en observant la graduation précédente.*

On a ainsi établi une certaine échelle des graduations entre **A** *et* **A'**.*"*[124]

On peut alors affiner l'échelle en ajoutant des nombres fractionnaires entre 10 et 20, cet affinement pouvant être mené aussi loin qu'on le veut; on peut ainsi associer à tout nombre rationnel (ici compris entre 10 et 20) un état de la grandeur considérée (**G**).

Tannery remarque alors qu'un état **B** de la grandeur (**G**) est alors soit numéroté par un rationnel, soit n'est pas numéroté. Dans ce dernier cas, il est clair que **B** détermine une coupure donc un nombre irrationnel; à tout état **B** de la grandeur (**G**) intermédiaire à **A** et **A'**, on associe ainsi un nombre réel compris entre 10 et 20. On peut dire que la grandeur (**G**) est *continue* si à tout nombre réel *b* compris entre 10 et 20 correspond un état **B** de la grandeur (**G**).

La construction se précise lorsque la grandeur (**G**) est additive, c'est-à-dire si l'on sait associer à deux états **A** et **B** de la grandeur (**G**) une grandeur **A** + **B**, l'opération d'addition satisfaisant aux propriétés suivantes[125]:

---

[122]Tannery (TanJ], p. 470

[123]*ibid*, p. 471

[124]*ibid*, p. 471-472

[125]*ibid*, p. 477; noter que Tannery ne considère que des grandeurs positives ou, comme on dit aussi, des *grandeurs arithmétiques*. Les propriétés iv et v expriment alors le lien entre l'ordre et le calcul: **A** > **B** *si et seulement si il existe* **C** *tel que* **A** = **B** + **C***"* (pour une étude historique et épistémologique de ce lien, cf. Sinaceur [Si])

i) si **A** et **A'** sont égales, si **B** et **B'** sont égales, alors **A** + **B** et **A'** + **B'** sont égales.

ii) l'addition est commutative et associative.

iii) il existe une grandeur nulle, c'est à dire telle que l'addition de cette grandeur à une grandeur donnée ne change pas cette dernière.

iv) si **C** n'est pas la grandeur nulle, alors **A** + **C** > **A**.

v) si **A** > **B**, il existe une grandeur **C** telle que **A** = **B** + **C**.

vi) **A** et **B** étant données toutes deux non nulles, il existe un entier m tel que $m\mathbf{A} > \mathbf{B}$ (axiome d'Archimède).

vii) étant donné un entier m, pour toute grandeur **B**, il existe une grandeur **A** telle que $\mathbf{B} = m\mathbf{A}$, autrement dit on peut diviser une grandeur en m parties égales.

Ce sont les propriétés nécessaires pour construire un correspondance additive entre états d'une grandeur et nombres. Tannery montre ensuite quelques propriétés qu'on pourrait énoncer ainsi:

$$m\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$$
$$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$$
$$(mn)\mathbf{A} = m(n\mathbf{A})$$

m et n étant des entiers.

Tannery peut alors définir la mesure d'une grandeur, une unité $\mathbf{A_1}$ étant choisie.

Un état de la grandeur $\mathbf{A_1}$ ayant été choisi comme état unité, on peut définir une graduation de (**G**) associant à tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ la grandeur $\mathbf{A} = \frac{p}{q}\,\mathbf{A_1}$; $\frac{p}{q}$ est appelé la mesure de **A** lorsqu'on a choisi $\mathbf{A_1}$ comme unité, c'est aussi par définition le rapport de **A** à $\mathbf{A_1}$.

Un état **B** de la grandeur (**G**), s'il n'est pas une fraction de $\mathbf{A_1}$ définit de façon évidente une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, donc un nombre réel (nécessairement positif dans le cas qui nous intéresse ici); ce nombre réel a est appelé la mesure de **B** lorsqu'on a choisi $\mathbf{A_1}$ comme unité, c'est aussi le rapport de **B** à $\mathbf{A_1}$.

Ainsi la classique définition du rapport de deux grandeurs comme le nombre qui mesure la première quand on a choisi la seconde comme unité prend tout son sens.

Tannery montre que la mesure ainsi définie est additive, cela est évident pour les nombres rationnels et résulte de la définition de l'addition des nombres réels dans le cas général.

L'étude des changements d'unité montre que le rapport de deux grandeurs est égal, une unité ayant été choisie, au rapport de leurs mesures. La démonstration, facile, est laissée au plaisir du lecteur.

Enfin une grandeur est *continue* si, une unité ayant été choisie, tout réel (ici il s'agit de réels positifs) est la mesure d'un état; cette propriété est évidemment indépendante de l'unité choisie[126].

3- *Les grandeurs proportionnelles*.[127]

---

[126]cf. note 105 ci-dessus. On peut rapprocher cette définition des grandeurs continues du dernier groupe d'axiomes de la construction hilbertienne, lequel exprime la propriété de *continuité* de la géométrie (Hilbert [Hi], p. 40-45) ; ce groupe contient deux axiomes, l'axiome de la mesure ou d'Archimède et l'axiome d'intégrité, ce dernier axiome assure l'existence d'une correspondance biunivoque conservant l'ordre entre l'ensemble des points d'une droite et l'ensemble des nombres réels (Hilbert [Hi], p. 88-89); en un certain sens, cet axiome définit une construction géométrique des nombres réels. Notons que l'axiome d'intégrité est lié à la propriéré que **R** est *le plus grand* corps ordonné archimédien (Hilbert [Hi], p. 40-45).

La proportionnalité concerne les grandeurs additives. Nous en rappelons la définition

Etant données deux espèces de grandeurs additives (**G**) *et* (**G'**), *une correspondance entre* (**G**) *et* (**G'**) *est dite proportionnelle si, étant donnés deux états* **A** *et* **B** *de la première grandeur et les états correspondants* **A'** *et* **B'** *de la deuxième grandeur, les rapports* **A**/**B** *et* **A'**/**B'** *sont égaux*.

Tannery établit alors la propriété que l'on peut énoncer de la façon suivante:

Considérons une correspondance entre deux espèces de grandeurs (**G**) *et* (**G'**) *telle que*
i) à deux grandeurs égales de l'espèce (**G**) *correspondent deux grandeurs égales de l'espèce* (**G'**)
ii) la correspondance est additive, c'est-à-dire qu'à la somme de deux grandeurs de l'espèce (**G**) *correspond la somme des grandeurs correspondantes de l'espèce* (**G'**)
alors la correspondance considérée est proportionnelle.[128]

Tannery montre d'abord qu'à la grandeur nulle de (**G**) correspond la grandeur nulle de (**G'**); en effet la grandeur nulle est la seule qui, ajoutée à une autre grandeur, donne la même grandeur.

En outre, la définition de la soustraction implique que la correspondance conserve l'ordre[129].

En effet, soit **A** et **B** deux états de la grandeur (**G**) tels que **A** soit inférieur à **B**, on notera **A'** et **B'** les états de (**G'**) correspondant à **A** et **B**; puisque **A** < **B**, il existe un état **C** tel que **B** = **A** + **C**. Notons **C'** l'état correspondant à **C**, alors **B'** = **A'** + **C'**, ce qui prouve **A'** < **B'**.

Considérons alors deux grandeurs **A** et **B** d'espèce (**G**) et les grandeurs correspondantes **A'** et **B'** d'espèce (**G'**),
i) si **B**/**A** est un nombre rationnel, l'additivité implique l'égalité des rapports **A**/**B** et **A'**/**B'**.
ii) si **B**/**A** est un nombre irrationnel, la conservation de l'ordre implique que **B**/**A** et **B'**/**A'** déterminent la même coupure, par conséquent **B**/**A** = **B'**/**A'**.
ce qui achève la démonstration.[130].

Le critère de proportionnalité énoncé par Tannery permet d'obtenir les théorèmes de proportionnalité de la géométrie élémentaire: proportionnalité des angles et des arcs, théorème des lignes proportionnelles (théorème de Thalès), calculs d'aires. C'est ainsi que dans ses *Leçons de Géométrie*, Hadamard renvoie au critère de Tannery[131] même si, pour des raisons de cohérence interne de l'ouvrage, il indique le principe de la démonstration, remarquant qu'il ne fait que reproduire la démarche de Tannery[132].

4- *La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie*

---

[127] *ibid*, p. 483 et sqq.

[128] On peut rapprocher la proposition de Tannery du classique théorème: *Soit f une application monotone et additive de* **R** *dans* **R**, *alors f est une application linéaire*.

[129] Rappelons que l'on ne considère que des grandeurs positives .

[130] En fait, Tannery ne parle pas en terme de coupures mais renvoie à la notion de graduation telle qu'il l'a définie auparavant.

[131] Rappelons que les ouvrages de Hadamard et de Tannery font partie d'une même collection à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques (cf. note 107 ci-dessus).

[132] Hadamard [Ha], p. 19-20, 198-199, 239

La méthode de Tannery s'appuie sur une construction explicite des nombres réels, ici la méthode des coupures de Dedekind. D'autres auteurs vont travailler directement sur les grandeurs, les nombres irrationnels étant introduits pour mesurer les grandeurs n'ayant pas de commune mesure avec l'unité.

Nous citerons ainsi le classique *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse[133].

La notion de nombre entier étant considérée comme connue, le propos de Rouché et Comberousse est de définir la mesure des grandeurs. Les auteurs précisent d'abord ce qu'il faut entendre par grandeur en écrivant:

"On ne considère, en mathématiques, que des grandeurs dont on peut définir d'une manière précise l'égalité et l'addition".

On peut alors définir multiples et parties aliquotes d'une grandeur. Deux grandeurs sont alors dite *commensurables* si elles sont des multiples d'une même grandeur, laquelle est appelée une *commune mesure*; si les grandeurs données n'ont pas de commune mesure, on dit qu'elles sont *incommensurables*.

Une unité étant choisie, mesurer une grandeur commensurable avec l'unité, c'est chercher combien cette grandeur renferme d'unités ou de parties aliquotes de l'unité. Les auteurs expliquent alors que, suivant que la grandeur que l'on mesure est un multiple de l'unité ou un multiple d'une partie aliquote de l'unité, le nombre qui la mesure est un nombre entier ou fractionnaire (un rapport d'entier). La mesure des grandeurs commensurables avec l'unité renvoie ainsi à l'arithmétique.

Lorsque la grandeur que l'on mesure est incommensurable avec l'unité, Rouché et Comberousse introduisent la notion de valeur approchée.

Soient **U** la grandeur unité et **A** une grandeur incommensurable avec l'unité, un nombre entier ou fractionnaire n étant donné, *la valeur approchée par défaut à moins de* $1/n$ est égale à m/n où m est le nombre entier qui mesure le plus grand multiple de $\mathbf{U}/n$ contenu dans **A**; autrement dit, **A** contient m fois $\mathbf{U}/n$ avec un reste moindre que $\mathbf{U}/n$. Le nombre $(m + 1)/n$ est appelé *la valeur approchée par excès à moins* de $1/n$..

Notant pour tout nombre n ,a_n la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$, a'_n la valeur approchée par excès à moins de $1/n$, Rouché et Comberousse définissent alors la mesure de **A** comme *la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées par défaut à moins de* $1/n$ *lorsque n croît indéfiniment*..

Le problème se pose alors de justifier cette définition en montrant l'existence et l'unicité de la limite (rappelons que les seuls nombres définis sont les entiers et les nombres fractionnaires)

Les auteurs remarquent d'abord que a_n n'augmente pas toujours avec n[134], de même a'_n ne diminue pas toujours lorsque n augmente; pour définir la limite, il définissent alors *les valeurs principales* par défaut et par excès à moins de $1/n$ d'une grandeur **A**, respectivement notée α_n et α'_n.

La valeur principale par défaut à moins de $1/n$ est la plus grande des valeurs approchées par défaut à moins de $1/\nu$ pour ν non supérieure à n. De même la valeur principale par excès à moins de 1/n est la plus petite des valeurs approchées par excès à moins de $1/\nu$ pour ν non inférieure à n.

Il est alors clair que α_n augmente (ou du moins ne diminue pas) et α'_n diminue (ou du moins n'augmente pas) lorsque n augmente; comme les α_n sont majorés par les α'_n et comme

---

[133]Rouché Comberousse [RC], Première Partie: Géométrie Plane, Note I, p. 411-419

[134]ainsi, si **A** est la diagonale du carré de côté égal à l'unité, on montre $a_n = 14/10$ et $a_{n+1} = 15/11$ (cf. Rouché Comberousse [RC], p. 413, note 1)

$\alpha'_n - \alpha_n$ est moindre que la fraction 1/n, laquelle tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, on *"voit de suite"* que α_n et α'_n ont une limite commune qui n'est autre que la mesure cherchée.

On voit ici les problèmes que pose un tel raisonnement; comment se justifie l'existence de la limite et quel est le statut de ce nombre limite? La réponse est donnée par la définition des nombres incommensurables.

Voici la définition donnée par Rouché et Comberousse:

*"Un nombre est dit **commensurable** ou **incommensurable** suivant que la grandeur dont il exprime la mesure est commensurable ou incommensurable avec l'unité adoptée. Les nombres commensurables sont les entiers et les fractions".*

Reste à définir les opérations sur les nombres incommensurables

"Par définition, le résultat d'une opération sur les nombres incommensurables est la limite du résultat de la même opération sur leurs valeurs approchées à moins de 1/n, lorsque n croît indéfiniment".

Il faut alors démontrer l'existence et l'unicité de la limite, ce que les auteurs font pour chacune des opérations arithmétiques[135].

Cela fait, on peut définir le rapport de deux grandeurs comme le nombre par lequel il faut multiplier la première pour avoir la seconde; les auteurs démontrent alors que le rapport de deux grandeurs est égal au nombre qui mesure la première lorsque l'on prend la seconde comme unité.

Enfin, après avoir défini des grandeurs proportionnelles comme des grandeurs (qui peuvent être de nature différente) qui se correspondent de telle façon que le rapport de deux valeurs de la première soit égal au rapport des valeurs correspondantes de la seconde, Rouché et Comberousse démontrent le théorème

"Deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre si, à deux valeurs quelconques, mais égales, de la première grandeur répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde".

La démonstration utilise ici les propriétés des valeurs approchés.

Ce théorème est alors utilisé dans le cours de l'ouvrage pour démontrer les théorèmes usuels de proportionnalité (arcs et angles[136], lignes proportionnelles[137], calculs d'aires[138])

Il reste que malgré un souci de rigueur dans les démonstration des (en particulier les problèmes d'existence), il manque dans cet exposé une définition *numérique* de la notion de nombre en ce sens que les nombres ne sont définis que comme mesure de grandeurs[139]. En outre, la notion de limite de grandeurs reste intuitive et c'est l'intuition d'icelle qui conduit à définir la limite de nombres, c'est ainsi que les auteurs admettent, sans précaution aucune, que la suite des valeurs principales par défaut, dans la mesure où elle est majorée, a une limite. On

[135]Rouché Comberousse [RC], p. 414-416
[136]Rouché Comberousse [RC], p. 63
[137]Rouché Comberousse [RC], p. 111
[138]Rouché Comberousse [RC], p. 310
[139]Il s'agit ici moins d'une définition explicite que de l'hypothèse implicite assurant que, une unité étant choisie, tout grandeur est mesurée par un nombre; la définition de la mesure par les valeurs approchées et la notion de nombre incommensurable qui la représente ne font alors qu'exprimer la correspondance, dont l'existence est admise, entre grandeurs et nombres.

doit admettre alors, pour démontrer le théorème sur les grandeurs proportionnelles, que deux grandeurs de nature différents étant données, si, des unités convenables étant choisies, une grandeur de la première espèce et une grandeur de la seconde espèce ont les mêmes valeurs approchées, elles sont mesurées par le même nombre, ce qui est effectivement admis par les auteurs.

Le cours de *Géométrie Plane* de Niewenglowski et Gérard, publié en 1898, propose une présentation axiomatique de la mesure des grandeurs[140], qu'il relie à la théorie des nombres irrationnels pour laquelle les auteurs renvoient au *Cours d'Algèbre* de Niewenglowski[141].

Un système de grandeur de même espèce est un ensemble d'êtres pour lesquels on a défini l'*égalité* et l'*addition*. On entend par là, précisent les auteurs, que l'on a indiqué dans quel cas deux de ces êtres doivent êtres considérés comme *égaux*, et que l'on a indiqué un procédé au moyen duquel, étant donné deux quelconques de ces êtres, **A** et **B**, on peut en trouver un troisième **C** que l'on appellera *somme* de **A** et **B** et que l'on notera **A** + **B**[142]. L'addition permet de définir une notion d'ordre: on dit que la grandeur **A** est plus grande que la grandeur **B** s'il existe une grandeur **C** telle que **A** = **B** + **C**.

On suppose alors que l'égalité et l'addition satisfont aux axiomes suivants[143] (que l'on peut comparer aux axiomes de Tannery):

i) L'égalité doit être réflexive, symétrique, transitive

ii) L'addition doit être univoque, commutative et associative

iii) Entre deux grandeurs quelconques, **A** et **B**, du système, il doit y avoir une des trois relations

$$\mathbf{A} = \mathbf{B},\ \mathbf{A} > \mathbf{B},\ \mathbf{A} < \mathbf{B}$$

et chacune de ses relations doit être incompatible avec les deux autres.

Ces axiomes étant posés, on peut alors définir les multiples entiers d'une grandeur. La notion de sous-multiple (partie aliquote) est définie si l'on admet que *"étant donnés une grandeur quelconque* **A** *du système et un entier quelconque n, on peut trouver une autre grandeur* **X** *du système, telle que n***X** = **A***"*[144]. On montre aisément, tenant compte de l'axiome iii, l'unicité de **X**. On peut alors définir les multiples fractionnaires d'une grandeur.

Niewenglowski et Gérard énoncent alors l'axiome d'Archimède.

Pour achever la théorie de la mesure des grandeurs, il reste d'une part à expliciter la notion de limite, d'autre part à définir le produit d'une grandeur par un nombre irrationnel.

La notion de limite est définie pour les grandeurs: une suite illimitée de grandeurs, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, …, $\mathbf{A}_n$, … étant donnée, on dit que "l*a suite a pour limite la grandeur* **L** *lorsque n augmente indéfiniment, si, à toute grandeur* **G**, *on peut faire correspondre une grandeur* ν, *tel que, pour n* > ν, l*a différence entre* $\mathbf{A}_n$ et **L** *soit moindre que* **G***"*[145].

On vérifie aisément l'unicité de la limite.

---

[140]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 316-335

[141]Niewenglowski B. [N], tome 1, p. 4-21

[142]Ces précisions nous montre que le point de vue métrologique n'est pas absent de la notion de mesure des grandeurs, c'est un tel point de vue qui guide la construction de Tannery (cf. ci-dessus). Cet aspect métrologique nous semble inséparable de la notion de mesure des grandeurs, nous y reviendrons dans la seconde partie de cet article.

[143]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 316-317

[144]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 318

[145]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 321

Niewenglowski et Gérard énoncent alors les deux axiomes qui relient les notions d'ordre et de limite:

Axiome 1- *Si la grandeur* $\mathbf{A}_n$ *croît avec n, mais reste toujours inférieure à une grandeur déterminée* **B**, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* **L**.

Axiome 2- *Si la grandeur* $\mathbf{A}_n$ *décroît quand n augmente, mais reste toujours supérieure à une grandeur déterminée* **B**, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* **L**.

Reste à définir le produit par un nombre irrationnel.

Les auteurs renvoient au *Cours d'Algèbre* de Niewenglowski déjà cité.

Un nombre irrationnel est défini par la donnée de deux suites illimitées de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

vérifiant les inégalités

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a'_n < \ldots < a'_2 < a'_1$$

et tels que la différence $a'_n - a_n$ tende vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, c'est-à-dire, précisent les auteurs, qu'à tout nombre rationnel positif δ, on puisse faire correspondre un entier ν tel que, pour $n > \nu$, on ait $a'_n - a_n < \delta$.

Niewenglowski et Gérard distingue alors deux cas.

Il existe un nombre rationnel a supérieur à tous les a_n et inférieur à tous les a'_n, alors, une grandeur **A** étant donnée, la grandeur $a\mathbf{A}$ est supérieure à toutes les grandeurs $a_n\mathbf{A}$ et inférieure à toutes les grandeurs $a'_n\mathbf{A}$ et c'est la seule grandeur vérifiant cette propriété.

Il n'existe aucun nombre rationnel supérieur à tous les a_n et inférieur à tous les a'_n, dans ce cas *"on convient de dire que les deux suites définissent un nombre irrationnel* α*"*[146]; il existe alors une grandeur et une seule supérieure à toutes les grandeurs $a_n\mathbf{A}$ et inférieure à toutes les grandeurs $a'_n\mathbf{A}$ (cela résulte des axiomes sur les limites), c'est cette grandeur notée $\alpha\mathbf{A}$ que Niewenglowski et Gérard appellent le produit de la grandeur **A** par le nombre irrationnel α.

On montre aisément (la démonstration est laissée au lecteur) les propriétés suivantes:

Soient **A** une grandeur, α et β deux nombres (rationnels ou irrationnels), alors

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$$

Soient **A** et **B** deux grandeurs, α un nombre (rationnel ou irrationnel), alors

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

---

[146]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 323; dans son Cours d'Algèbre, Niewenglowski explicite, à partir de cette construction, la condition d'égalité de deux nombres irrationnels, la relation d'ordre sur les nombres ainsi que les opérations arithmétiques ([N], tome 1, p. 5-11); le lecteur pourra, à titre d'exercice, expliciter ces diverses constructions dans le contexte proposé par Niewenglowski.

Soient **A** et **B** alors deux grandeurs de même espèce, il existe un nombre et un seul x tel que $\mathbf{A} = x\mathbf{B}$; c'est le *rapport* de **A** à **B** ou la *mesure de* **A** *quand on prend* **B** *pour unité*. (la démonstration est classique, nous laissons au lecteur le plaisir de l'écrire dans le contexte de l'ouvrage de Niewenglowski et Gérard).

Niewenglowski et Gérard montrent alors que, quatre grandeurs étant données, **A** et **B** d'une même espèce et **A'** et **B'** d'une même espèce, les rapports de **A** à **B** et de **A'** à **B'** sont égaux si et seulement *si, quelle que soit la fraction f, les différences* **A** - *f***B** *et* **A'** - *f***B'** *sont de même signe*, cette dernière expression signifiant que si **A** est supérieure (resp. inférieure) à *f***B** alors **A'** est supérieure (resp. inférieure) à *f***B'**. (on laisse au lecteur le soin de vérifier cette assertion)[147].

Etant donné deux systèmes de grandeurs, elles sont proportionnelles si elles se correspondent de telle sorte que le rapport de deux grandeurs du premier système est égal au rapport des grandeurs correspondantes de la seconde espèce; Niewenglowski et Gérard montrent alors le théorème

"Pour que les grandeurs de deux systèmes soient proportionnelles, il faut et il suffit que: 1° à deux grandeurs égales du premier système correspondent deux grandeurs égales du second; 2° à la somme de deux grandeurs quelconques du système corresponde la somme des grandeurs correspondantes du second."[148]

Nous indiquons ici les idées essentielles de la démonstration de Niewenglowski et Gérard: il suffit de montrer qu'une correspondance satisfaisant les propriétés 1° et 2° est une correspondance proportionnelle.

Soient **A** et **B** deux grandeurs de la première espèce, **A'** et **B'** les grandeurs correspondantes de la seconde espèce, supposons que $\mathbf{B} = \frac{m}{n}\mathbf{A}$, on montre aisément, à partir des propriétés 1° et 2° que $\mathbf{B'} = \frac{m}{n}\mathbf{A'}$.

Lorsque $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$ où α est un nombre irrationnel, on va montrer que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les différences $\mathbf{B} - \frac{m}{n}\mathbf{A}$ et $\mathbf{B'} - \frac{m}{n}\mathbf{A'}$ sont de même signe.

Si $\mathbf{B} > \frac{m}{n}\mathbf{A}$, alors $\mathbf{B} = \frac{m}{n}\mathbf{A} + \mathbf{C}$ et par conséquent $\mathbf{B'} = \frac{m}{n}\mathbf{A'} + \mathbf{C'}$, où **C'** est la grandeur du second système qui correspond à **C**, ce qui implique $\mathbf{B'} > \frac{m}{n}\mathbf{A}$.

Si $\mathbf{B} < \frac{m}{n}\mathbf{A}$, un raisonnement analogue montre que $\mathbf{B'} < \frac{m}{n}\mathbf{A}$.

On en déduit l'égalité des rapports **A/B** et **A'/B'**.

Notons que Niewenglowski et Gérard n'utilisent pas cette dernière proposition dans le cours du texte; en fait ils montrent que deux rapports **A/B** et **A'/B'** sont égaux en vérifiant que, une fraction $\frac{m}{n}$ étant donnée, l'inégalité $\mathbf{A} > \frac{m}{n}\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{A} < \frac{m}{n}\mathbf{B}$) implique l'inégalité $\mathbf{A} > \frac{m}{n}\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{A} < \frac{m}{n}\mathbf{B}$)[149].

---

[147]On peut comparer cette remarque de Niewenglowski et Gérard avec la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide et avec la théorie exposée par Jules Tannery à partir de la notion de coupure.

[148]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 333

[149]Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], (arcs et angles)p. 79-81, (lignes proportionnelles) p. 125-127, (aire d'un rectangle) p. 286

BIBLIOGRAPHIE

Amiot A. [Am], *Eléments de Géométrie*, Delagrave, Paris 1883

Archimède [Arc], "La mesure du cercle", in *Oeuvres* (texte établi et traduit par Charles Mugler) Les Belles Lettres, Paris 1970; tome I, p. 135-143

Arnauld Antoine [Arn1], *Nouveaux Elémens de Géométrie* , Paris 1667

Arnauld Antoine [Arn2], *Nouveaux Elémens de Géométrie* (3ème édition), La Haye 1693, publiée in *Oeuvres Complètes*, Paris1771

Arnauld Antoine, Nicole Pierre [AN], *La Logique de Port-Royal* (première édition 1667), Flammarion, Paris 1970

Barbin Evelyne [Ba], "La démonstration mathématique, signification épistémologique et questions didactiques", *Bulletin APMEP* n°366, décembre 1988

Bkouche Rudolf [Bk1], "De la géométrie et des transformations", *Repères-IREM* n° 4, 1991

Bkouche Rudolf [Bk2], "Variations autour de la réforme de 1902/1905", in Hélène Gispert Hélène et als : *La France Mathématique* Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France 1991.

Blanchet M.A. [Bl], *Eléments de Géométrie par A.M. Legendre avec additions et modifications par M.A Blanchet*, deuxième édition, suivie de la quinzième édition donnée par A.M. Legendre, Firmin Didot, Paris 1848

Blay Michel, "Du Système de l'Infini au Statut des Nombres incommensurables dans les Eléments de la Géométrie de Fontenelle" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Springer-Verlag France, Paris 1992; "Les *Eléments de géométrie de l'infini* de Fontenelle" in Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992, p. 301-316

Bossut [Bos], *Traité élémentaire de Géométrie*, Paris 1775

Bourbaki Nicolas [Bou], *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris 1974

Bourlet Carlo [Bourl], *Cours abrégé de Géométrie*, Hachette, Paris 1905

Caveing Emile [Ca], *La constitution du type mathématique de l'idéalité*, Publications de l'Université de Lille, 1982

Chevalier Anne [Ch], "Présentation de l'Arithmetica Infinitorum de John Wallis", Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992

Clairaut Alexis-Claude[Cl], *Elémens de Géométrie* (1743), Gauthier-Villars, Paris 1922

Combette [Com], *Cours de géométrie élémentaire*, Felix Alcan, Paris 1882

Condillac [Con], *Essai sur l'origine des connaissances humaines* (1746), Editions Galilée, Paris 1973

D'Alembert Jean Le Rond [Da], *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986

Dedekind Richard [Ded], *Essay on the theory of numbers* (translated by W.W. Beman), Dover, New York 1963

Descartes René [Des]: "La Géométrie", in *Le Discours de la Méthode*, Fayard, Paris 1986, livre premier, p. 333

Dugac [Dug], *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques* (prÈface de Jean Dieudonné), Vrin, Paris 1976

Dumont Jean-Paul et als [Dum], *Les Ecoles Présocratiques*, Gallimard, Paris 1991

Encyclopédie Méthodique [Enc]: "Mathématiques", Panckoucke, Paris 1784, réédition ACL Editions, Paris 1987

Enriques Federigo [Enr], "Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées* (édition française), Tome III, Article 1, Gauthier-Villars, Paris et Teubner, Leipzig, 1911; réédition Jacques Gabay, Paris 1991

Euclide [Eu1], *Les Eléments*, volume 1: Introduction générale, Livres I à IV, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1990

Euclide [Eu2], *Les Eléments*, volume 2: Livres V à IX, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1994

Fontenelle Bernard de [Fo], *La Géométrie de l'Infini*, Paris 1727

Gonseth Ferdinand [Go], *Philosophie néo-scolastique et philosophie ouverte*, L'Age d'Homme, ,Lausanne 1973

Groupe Inter-IREM Epistémologie [GIIE], *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris 1987

Gulmin A. [Gu], *Cours de Géométrie élémentaire*, Durand, Paris 1859

Hadamard Jacques [Ha], *Leçons de Géométrie élémentaire*, Armand Colin, Paris 1898/1947, réédition de la dernière édition Jacques Gabay, Paris 1989

Heath Thomas L. [He1], *The thirteen books of Elements of Euclid* (translation, introduction and commentaries) (1908/1925), Dover Publications, New-York 1956

Heath Thomas L. [He2], *A History of Greek Mathematics* (1921), Dover Publications, New-York 1981

Hilbert David [Hi], *Les Fondements de la Géométrie*(1899) (édition critique avec introduction et compléments préparés par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971

Klein Felix [Kl], *Le Programme d'Erlangen*, (1972) (traduction française Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974

Knorr Wilbur Richard [Kn], *The Evolution of Euclidean Elements*, Reidel Publisching Company, Dodrecht, Boston 1975

Lacroix Sylvestre [Lac 1], *Traité élémentaire d'Arithmétique*

Lacroix Sylvestre [Lac 2], *Elémens d'Algèbre*

Lacroix Sylvestre [Lac 3], *Elémens de Géométrie*, quatrième édition, Paris 1804

Legendre Adrien-Marie [Le], *Elémens de Géométrie* (douzième édition), Firmin-Didot, Paris 1823

Le Goff Jean-Pierre [LeG], "De la méthode d'exhaustion, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)" in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Colloque Inter-IREM Epistémologie (Besançon 1989), IREM de Besançon-IREM de Lyon 1990

Legendre [Le], *Elémens de Géométrie* (douzième édition), Paris 1823

Neveu H. et Bellanger H. [NB], *Cours de Géométrie* (8ème édition), Masson, Paris 1925

Niewengloski B. [N], *Cours dAlgèbre* (troisième édition), Armand Colin, Paris 1893

Niewengloski B. et Gérard L. [NG], *Cours de Géométrie élémentaire: Géométrie plane*, Gauthier-Villars, Paris 1898

Pascal Blaise [Pa], "De l'esprit géométrique et de l'art de persuader", in *Oeuvres complètes* (édité par Lafuma), Le Seuil, Paris 1963

Peyrard [Pe], *Les Oeuvres d'Euclide*, 2 volumes (1819), Blanchard, Paris 1966

Plane Henri [Pl], Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, Limoges 1992

Rouché Eugène, Comberousse Charles de [RC], *Traité de géométrie* (2 volumes), 6ème édition, Gauthier-Villars, Paris 1891

Sinaceur Hourya [Si], "La Construction Algébrique du Continu: Calcul, Ordre, Continuité" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Sprincer-Verlag France, Paris 1992

Soussan M'hammed [Sou], *Le traitement des proportions entre Eudoxe et Euclide (la théorie alternative de Knorr)*, mémoire de DEA, Université Charles de Gaulle, Villeneuve d'Ascq 1993 (à paraître)

Tannery Jules [TanJ], *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* (7ème édition), Armand Colin, Paris 1917

Tannery Paul [TanP], *La Géométrie Grecque*, Gauthier-Villars, Paris 1887; réédition Jacques Gabay, Paris 1988
Taton René et als [Tat], *L'enseignement scientifique en France au XVIIIème siècle*, Hermann, Paris 1986
Vacquant et Macé de Lépinay [VM], *Eléménts de Géométrie*, (21ème édition), Masson, Paris 1917
Valiron Georges [Va], *Théorie des fonctions*, Masson, Paris 1946
Viète [Vi], *Introduction en l'Art Analytique*, in Vaulézard, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète* (1630), Fayard, Paris 1986
Wallis John [W], *Arithmetica Infinitorum*, 1655