La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France: de la réforme de 1902 à la réforme des *mathématiques modernes*[1]

Introduction

La place d'une discipline dans l'enseignement peut être regardée de deux points de vue, d'un point de vue interne et d'un point de vue externe. Le point de vue interne concerne la discipline à la fois comme domaine particulier de la connaissance et dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance. Le point de vue externe concerne la signification *sociale* du domaine de la connaissance concernée, en particulier la façon dont celui-ci est perçu à travers les divers lieux où il est censé intervenir (que cette intervention soit réelle ou fantasmatique). Ces deux points de vue ne sont pas sans relation en ce sens que, d'une part les conceptions du milieu savant marquent la façon dont est pensé un domaine de la connaissance, d'autre part ce milieu savant est lui-même influencé par les idéologies qui se développent autour de ce même domaine de la connaissance. C'est à partir de ce double point de vue que l'on peut essayer de comprendre la place des mathématiques dans les réformes de l'enseignement scientifique de ce siècle, de comprendre ce que ces deux réformes ont de commun et ce qui les différencie.

Quant à la géométrie, elle est, depuis les Grecs, le modèle de la construction de la rationalité, et par cela même le lieu privilégiée de la pensée démonstrative, conception de la géométrie que l'on retrouve dans les grands traités d'enseignement, en particulier dans les deux grands traités qui ont marqué l'enseignement français jusqu'à la réforme de 1970, celui de Legendre et celui de Lacroix qui accompagnent, dans la dernière décade du XVIIIème siècle, la création des "écoles centrales" lesquelles deviendront les lycées d'aujourd'hui.

C'est par rapport à une telle tradition qu'il faut situer la place de la géométrie dans les réformes, d'autant que, dans les deux réformes, celle de 1902 et celle de 1970, l'enseignement de la géométrie se définit en réaction contre cette tradition. Ces remises en question de la tradition se situent cependant dans des problématiques différentes, autant du point de vue interne que du point de vue externe.

La réforme de 1902

Nous ne reviendrons pas sur les raisons de cette réforme, renvoyant aux contributions d'Antoine Prost et Bruno Belhoste dans ce volume.

En ce qui concerne la géométrie, à côté de son rôle déjà signalé dans la construction de la connaissance rationnelle, il faut ajouter la prise en considération du *caractère expérimental* de la géométrie (Borel demandait l'institution de travaux pratiques de mathématiques dans un article de 1904 [Borel 1904]), lequel s'inscrit dans le développement scientifique qui se poursuit depuis le XVIIème siècle. Ainsi la géométrie participe des deux grandes méthodes de l'activité scientifique: la méthode rationnelle et la méthode expérimentale, point de vue qui sera renforcé en 1905 comme on peut le lire à travers les instructions accompagnant la nouvelle rédaction des programmes; c'est ainsi qu'on y lit [Belhoste 1995, p. 673]:

---

[1]in *Les Sciences au Lycée*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert, Paris 1996

"L'enseignement de la géométrie (dans le premier cycle) doit être essentiellement concret…

Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants… on peut, et cela est désirable, faire sentir dans certains cas, la nécessité d'une démonstration; mais il ne faut donner cette dernière que si l'élève est convaincu qu'elle est indispensable.

On aura ainsi l'occasion de montrer qu'il y a deux certitudes d'ordres différents; l'une expérimentale, qui appartient aux sciences physiques; l'autre logique qui est celle des vérités mathématiques; mais il y aurait un grave inconvénient à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la première qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autres fondements, tout au moins pour les élèves."

et le texte précise précise: *"Ce qu'il importe de faire ressortir, c'est l'importance du raisonnement logique, pour réduire au minimum les faits expérimentaux"*; mettant ainsi en avant le rôle organisateur de la logique.

Ce double caractère de la géométrie est marqué, dans l'enseignement d'icelle, par deux points qui apparaissent comme autant de transgressions de la tradition grecque: l'introduction du mouvement dans le développement de la géométrie et la *fusion* de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace.

La géométrie et le mouvement.

Le mouvement a été écarté de la géométrie par les Grecs, moins pour des raisons proprement scientifiques que pour des raisons d'ordre métaphysique (encore qu'il ne soit pas facile de distinguer, dans la pensée grecque, le scientifique et le métaphysique), raisons qui se situent dans la distinction entre l'être et le devenir, entre ce qui peut être l'objet d'une connaissance rationnelle et ce qui échappe à la rationalité .

On peut alors considérer que le principe fondamental de la géométrie d'Euclide, c'est-à-dire le principe de l'égalité par superposition énoncé par Euclide, que nous énonçons dans la traduction de Hoüel [Hoüel 1867, p. 13]:

"Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles",

d'une part s'appuie sur le mouvement et d'autre part exprime le moyen d'évacuer le mouvement de la géométrie (avec les classiques "cas d'égalité" des triangles) [Bkouche 1991, p. 187].

Pourtant le mouvement reste présent dans la géométrie grecque, sinon sur le plan de l'exposé dogmatique, du moins en ce qui concerne l'étude des grands problèmes pour lesquels les géomètres grecs introduiront diverses courbes engendrées par le mouvement d'un point [Delattre-Bkouche 1993].

C'est avec la *mathématisation de la mécanique* au XVIIème siècle que le mouvement prend sa place dans les sciences rationnelles, intervenant en tant que tel dans le raisonnement géométrique comme on peut le voir par exemple dans le problème des tangentes [Barbin-Itard 1993]. Cette mathématisation du mouvement conduira à la mise en place, au XIXème siècle, d'une étude purement géométrique du mouvement, d'abord en considérant le mouvement indépendamment de ses causes (ce sera la *cinématique* [Ampère 1834, p. 52]), ensuite en considérant un mouvement indépendant de toute considérations temporelles dont l'étude *"ne peut pas dépendre d'une autre* *science que la géométrie"* comme l'explique Hoüel qui précise: *"Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible"* [Hoüel 1867, p. 59].

De telles considérations conduiront Charles Méray à introduire explicitement le mouvement dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* [Méray 1874, chapitres III et IV]. Quant aux réformateurs de 1902, ils proposeront d'introduire la géométrie élémentaire à partir des translations et des rotations [Bkouche 1991, p. 209-211] et replaceront le mouvement dans le contexte du *Programme d'Erlangen* qu'ils interprètent comme une conception *dynamique* de la géométrie opposé au point de vue *statique* des Anciens. Ce point de vue, lié à la théorie des groupes, sera vivement critiqué par Méray qui ne reconnaîtra pas chez les réformateurs de 1902 les conceptions qu'il avait mise en avant quelques trente ans plus tôt [Méray 1907].

La fusion de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace

On peut noter la dissymétrie entre les deux expressions: *géométrie plane* et *géométrie dans l'espace;* si la première fait référence au plan, la seconde fait référence moins à l'espace en tant que tel qu'à ce qui a lieu dans l'espace. Si le plan est défini en tant qu'objet géométrique dans la tradition grecque, l'espace n'y intervient jamais en tant que tel et il faudra attendre le XVIIème siècle avec les théories perspectivistes et la géométrisation de la mécanique pour que l'espace apparaisse, encore est-il moins un objet géométrique que le lieu des phénomènes géométriques. *"Il* (l'espace) *ne fait que fournir les lieux que les corps occupent et remplissent"* explique Euler dans ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne"* [Euler 1772, volume 1, p. 271].

Notons aussi que dans la construction euclidienne, la géométrie plane précède l'étude des situations spatiales, cette dernière s'appuyant sur les résultats de la géométrie plane; c'est cet ordre euclidien que l'on retrouve dans les grands traités de géométrie élémentaire.

C'est la mise en évidence de ce que Chasles a appelé *"l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes"* [Chasles 1837, page 191] qui a conduit à remettre en cause l'ordre traditionnel, la géométrie des *situations spatiales* apparaissant plus "naturelle", d'autant qu'elle est celle de la vie pratique (en particulier de la vie professionnelle) comme l'expliqueront les partisans de la fusion, ainsi Cremona qui écrira un ouvrage de géométrie projective à l'intention des élèves des Instituts Techniques italiens [Cremona 1873], ainsi Méray dans son ouvrage déjà cité [Méray 1874].

La fusion sera introduite en France par Méray dans ses expériences d'enseignement dans les écoles normales de l'Académie de Dîjon (rappelons que Méray est professeur à la faculté des Sciences de Dîjon) et de façon plus systématique en Italie par Cremona [Candido 1899] [Loria 1905] [Brussotti 1950].

La réforme de 1902 introduira la fusion avec modération; d'une part elle est contraire à la tradition géométrique, d'autre part la géométrie dans l'espace, considérée comme plus difficile que la géométrie plane, ne peut être enseignée que dans un second temps, comme l'explique Hadamard dans l'avertissement de la seconde édition de ses *Leçons de géométrie élémentaire* publiée à l'époque de la réforme lorsqu'il écrit [Hadamard 1947, p. v]:

"Que cette fusion soit préférable au point de vue logique, je le veux bien. Mais il me paraît que, pédagogiquement, nous devons penser tout d'abord à diviser les difficultés. Celle de "voir dans l'espace" en est une sérieuse par elle-même, que je ne considère pas comme devant être ajoutée tout d'abord aux autres".

Le caractère expérimental de la géométrie.

Ce caractère expérimental marque la place de la géométrie parmi les sciences de la nature; et c'est l'un des points forts de la réforme de 1902 que de consacrer l'enseignement scientifique comme celui des sciences de la nature. Cette conception, que l'on retrouve dans l'ouvrage cité de Hoüel comme dans celui de Méray et plus tard dans divers textes de Bourlet et de Borel, affirme à la fois la part d'empirisme de la connaissance géométrique et le rôle de la rationalité dans le développement de cette connaissance.

Une telle conception permet de relier la part théorique et la part pratique de la géométrie, et plus généralement les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, ce qu'expliquait Carlo Bourlet dans une conférence prononcée lors d'une réunion de la *Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques* (fondée en 1908 sous l'impulsion de Felix Klein), au titre significatif: *La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire* [Bourlet 1910]. Revenant sur les principes de la réforme de 1902, Bourlet explique comment, en ce début de XXème siècle, se rejoignent les deux courants qui marquent l'activité scientifique, *"l'un partant de l'observation, l'autre du symbolisme pur"*. Les mathématiques sont devenues *"indispensables à la science appliquée"*, mais cela n'est que *"juste retour"* si l'on sait que *"c'est dans la Nature qu'elles ont trouvé leurs sources les plus fécondes"*. Et Bourlet termine sa conférence par ces mots:

"La limite entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées n'existe pas, car ces deux sciences, loin d'être séparées, doivent sans cesse s'entr'aider et se compléter."

La fin de la réforme

La réforme subira plusieurs critiques. On peut avoir une vue d'ensemble de ses critiques dans le débat sur l'enseignement de la philosophie organisée par la *Société Française de Philosophie* en 1907, la critique principale portant sur le "manque de rigueur" d'un enseignement de la géométrie trop expérimental tandis que Marotte reproche aux réformateurs de n'être pas allé assez loin, donnant l'exemple des *Elémens de géométrie* de Clairaut [SFP 1907].

La réforme prendra fin avec les nouveaux programmes de 1923 qui reviendrons à une conception plus classique. Sur le plan de la géométrie qui nous intéresse ici, il restera, dans les classes de mathématiques élémentaires, une part importante sur les transformations introduisant à ce que l'on appelait alors la *géométrie moderne*. Ainsi s'ajoutait au corpus mis en place par Legendre et Lacroix l'étude des transformations. Quant à la fusion qui a été peu acceptée, elle disparaîtra des nouveaux programmes, la géométrie dans l'espace étant étudiée après la géométrie plane et s'appuyant sur celle-ci.

La géométrie conservera cependant sa place privilégiée dans les programmes, restant jusqu'à la réforme des *mathématiques modernes*, le lieu essentiel de la démonstration.

La réforme des *mathématiques modernes*

La réforme dite des *mathématiques modernes* se situe dans un tout autre contexte et l'on peut voir dans la place (ou la non-place) de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques un miroir de ce contexte.

Si la géométrie avait une place cruciale dans la réforme de 1905, c'est par sa situation au carrefour des sciences mathématiques et des sciences de la nature. Le contexte est tout autre dans la seconde moitié de ce siècle, autant pour des raisons d'ordre interne au domaine mathématique que pour des raisons d'ordre externe; d'une part on assiste, dans la première partie du XXème siècle, au renouvellement de la pensée mathématique avec les travaux de l'école hilbertienne et la synthèse bourbakienne, d'autre part se développe une idéologie qui voit dans les mathématiques le modèle de toute connaissance et qui se propose de reconstruire, sur le mode mathématique les divers domaines de la connaissance, ce que j'appellerai *l'idéologie des mathématiques partout*.[Bkouche, Charlot, Rouche 1991, première partie].

Le renouvellement de la pensée mathématique

Les problèmes posés par les géométries non-euclidiennes d'abord, la théorie des ensembles ensuite, ont mis l'accent sur la forme du langage mathématique, mettant en retrait, du moins sur le plan des fondements, le sens des problèmes et des théories. C'est ainsi que Hilbert construisait une axiomatique de la géométrie élémentaire d'une façon purement syntaxique, éliminant, en droit sinon en fait, tout recours à ce que Gonseth appellera *les significations extérieures* [Gonseth 1936]; seules interviennent dans la construction hilbertienne les assertions primitives de la théorie (les axiomes) et les règles formelles du raisonnement, une assertion énoncée dans le langage de la théorie étant valide si et seulement si elle résulte d'une démonstration s'appuyant sur les axiomes et les assertions antérieurement démontrées et sur les seules règles du raisonnement à l'exclusion de tout recours à l'intuition [Hilbert 1899]. Une telle conception conduira à mettre en valeur ce que Bourbaki a appelé *l'architecture des mathématiques*: la construction des mathématiques n'est autre que la mise en place des grandes structures, les *structures-mères* (structures d'ordre, structures algébriques, structures topologiques) et l'activité du mathématicien consiste à étudier les interactions entre les diverses structures [Bourbaki 1948].

Dans cette nouvelle mathématique, les objets disparaissent derrière les relations. Si les mathématiques classiques s'intéressaient aux objets (que ceux-ci participent des idées platoniciennes ou soient issus de l'expérience sensible importe peu ici), s'efforçant de mettre à jour les relations entre ces objets, les mathématiques contemporaines issues des travaux de Hilbert se préoccupent essentiellement des relations, les objets n'étant définis que par ces relations; on est ainsi passé du primat des objets au primat des relations, c'est en ce sens qu'on peut parler de formalisme. Mais celui-ci est d'abord un formalisme méthodologique, il a permis de répondre à ce que l'on a appelé *la crise des fondements*, laquelle fut d'abord, comme l'explique Jean Cavaillès, une crise de légitimité du raisonnement [Cavaillès 1937]; ainsi se mettait en place un nouveau mode de légitimation du raisonnement mathématique intégrant et renouvelant les mathématiques classiques et ouvrant de nouveaux champs de recherches comme le montre le développement des mathématiques au XXème siècle.

Pourtant, derrière le discours, les significations extérieures restaient présentes. C'est ce qu'explique Gonseth lorsqu'il se propose de définir le degré d'autonomie du théorique par rapport à la connaissance intuitive et à la connaissance expérimentale [Gonseth 1936]. C'est encore ce qu'explique Hilbert dans un ouvrage trop longtemps méconnu en France (il ne fut jamais traduit en français!) dont le titre *Anschauliche Geometrie* (traduction anglaise: *Geometry and Imagination*) est significatif [Hilbert, Cohn-Vossen 1932]; Hilbert y parle des deux tendances du développement scientifique, d'une part *la tendance vers l'abstraction* qui se propose l'étude des relations logiques qui structurent et ordonnent le matériau étudié, d'autre part *la tendance vers la compréhension intuitive* des objets que l'on étudie.

Ce double aspect des mathématiques fut ignoré lors de la réforme des *mathématiques modernes*, les aspects formels prenant une place prépondérante, voire la seule, dans l'enseignement des mathématiques. Il est vrai que l'efficacité et la fécondité des méthodes formalistes dans le développement des mathématiques au XXème siècle pouvait conforter une telle position; il faut y ajouter la lecture formaliste des ouvrages de Bourbaki par des étudiants enthousiastes des années cinquante et soixante qui découvraient, après une formation classique, le nouveau paysage mathématique, ces étudiants qui deviendront les enseignants des années soixante-dix.

Le problème se posait alors du renouvellement de l'enseignement permettant un accès rapide à cette nouvelle mathématique, à *la mathématique vivante*, pour reprendre une expression d'André Revuz, l'un des pères de la réforme en France [Revuz 1963] et Gilbert Walusinski, présentant le courant réformateur, expliquait la nécessité de *"diminuer l'écart entre la mathématique qui s'enseigne et la mathématique qui se crée par la recherche"* [Walusinski 1970, p. 35].

Cet appel à l'enseignement de la mathématique vivante, nous conduit au second volet des raisons de la réforme, les raisons d'ordre idéologique et culturel.

L'idéologie des mathématiques partout

On ne peut comprendre la réforme des *mathématiques modernes* en s'en tenant au seul point de vue interne. Ce qui marque la réforme, c'est ce que j'ai appelé ci-dessus *l'idéologie des mathématiques partout* que Gilbert Walusinski présente ainsi [Walusinski 1970, p.9]:

"Aujourd'hui, ce qui est devenu difficile, c'est de trouver une activité où l'on soit assuré de ne jamais avoir recours à quelque idée, à quelque technique mathématique."

expliquant, dans la suite de l'ouvrage, comment les mathématiques interviennent dans tous les domaines de l'activité humaine. Par cela même leur apprentissage devient nécessaire pour comprendre le monde.

Parmi les raisons qui ont conduit à cette idéologie des mathématiques partout, notons le développement des sciences humaines et le désir d'icelles d'affirmer leur scientificité en *mimant* les sciences de la nature, en particulier en recourant aux mathématiques. Signe de ce désir de scientificité, paraissait en 1967 un ouvrage de Marcel Barbut intitulé *Mathématiques et Sciences Humaines* dans la préface duquel le psychologue Paul Fraisse expliquait d'une part la nécessaire mathématisation des sciences humaines et d'autre part l'adéquation des mathématiques contemporaines (celles des structures) aux sciences humaines [Barbut 1967].

Si la réforme de 1902 consacrait la place des mathématiques dans la connaissance de la nature, la réforme de 1970 insistait sur le rôle que jouent les mathématiques dans la connaissance elle-même.

Si les mathématiques devenaient la condition de toute connaissance, le langage mathématique prenait une place essentielle dans l'élaboration de la connaissance, se situant, selon Walusinski, parmi les quatre langage fondamentaux du monde moderne: la langue maternelle, les langues étrangères, le langage de la technologie et la mathématique considérée comme la langue universelle [Walusinski 1970, p. 17]; l'enseignement des mathématiques devenait ainsi l'apprentissage d'un langage, langage universel de la connaissance.

C'est l'un des points fondamentaux de la réforme que cette universalité affirmée des mathématiques, lesquelles deviennent un instrument essentiel de la compréhension et de la maîtrise du monde; en ce sens elles doivent être enseignées à tous, et cela dans leur version moderne, celle des structures.

Cette idéologie des mathématiques partout et des mathématiques pour tous est confortée par les découvertes de la pédagogie scientifique comme l'explique Walusinski lorsqu'il évoque *"… l'heureuse conjonction des idées dites modernes, en mathématiques, et des découvertes des sciences de l'éducation sur la formation des concepts dans l'esprit de l'enfant ainsi que sur les techniques des divers apprentissages"* [Walusinski 1970, p. 20].

Il nous faut alors revenir sur cette pédagogie scientifique qui, avec Piaget, affirme une harmonie entre la construction de la pensée chez l'enfant et *"la mathématique moderne"*.

L'épistémologie génétique de Piaget

Avec l'épistémologie génétique, Piaget se propose de faire entrer l'épistémologie dans le domaine scientifique comme il l'écrit dans la préface de son ouvrage *L'epistémologie génétique*, rappelant que la psychologie expérimentale, la sociologie et la logistique (la logique algébrique) se sont déjà émancipées de la philosophie pour se constituer en sciences. Il se propose alors d'examiner "*à quelles conditions il pourrait en être ainsi de l'épistémologie génétique, ou théorie de la connaissance scientifique fondée sur l'analyse du développement même de cette connaissance"* ce qui implique*"de chercher s'il est possible d'isoler l'objet d'une telle discipline et de constituer des méthodes spécifiques, propres à trouver la solution de ses problèmes particuliers"*. [Piaget, 1950, tome 1, p.13]

L'épistémologie génétique, constituée comme approche scientifique de la connaissance, doit donc délimiter l'objet qu'elle étudie, ce qui conduit Piaget à élaborer un *modèle* de sujet connaissant, sujet réduit à n'être qu'un ensemble de processus cognitifs, ensemble organisé par la théorie des stades ([Piaget 1970]).

Dans ce cadre, Piaget mettra l'accent sur l'analogie entre les structures qui sous-tendent le développement des connaissances mathématiques chez l'enfant et les structures mathématiques telles qu'elles sont définies par Nicolas Bourbaki dans son article-programme de 1948 [Bourbaki 1948]; les structures-mères de Bourbaki deviennent ainsi la marque de structures cognitives profondes. Il suffit de lire les textes de Piaget et de Dieudonné dans l'un des premiers ouvrages où se dessine une réflexion sur la réforme [Piaget et *als* 1955] pour comprendre comment s'est mise en place cette analogie qui n'est peut-être qu'un profond malentendu sur l'usage du terme et de la notion de structure.

Ainsi se dessine une harmonie entre le développement des mathématiques contemporaines et l'apprentissage des mathématiques, harmonie qui conduira Piaget et ses disciples à chercher dans la structuration bourbakienne les éléments d'une pédagogie des mathématiques. La construction bourbakienne y apparaît alors moins comme un moment de l'histoire des mathématiques que comme le mode de construction de la pensée mathématique, l'apprentissage des mathématiques passe ainsi par l'apprentissage des structures-mères dont Bourbaki avait expliqué, dans l'article cité ci-dessus, comment elle fondaient les mathématiques.

Piaget peut alors expliquer la construction de la connaissance géométrique chez l'enfant d'un point de vue structural: les structures topologiques précèdent les structures projectives, lesquelles précèdent les structures métriques; la connaissance géométrique se construit ainsi selon un schéma correspondant au *Programme d'Erlangen*. Les mathématiques contemporaines en adoptant le point de vue structural ont ainsi retrouvé l'ordre *"naturel"* de la construction de la connaissance, contrairement à l'ordre historique qui s'est d'abord appuyé, avec la géométrie grecque. On voit ainsi comment se met en place le point de vue structural, Piaget expliquant à propos de l'antériorité des structures sur les éléments qu'elles ordonnent [Piaget et *als* 1955, p. 14]:

"Si, historiquement, ces éléments semblent donnés antérieurement à la découverte de la structure, et si cette dernière joue ainsi essentiellement le rôle d'un instrument réflexif destiné à dégager leurs caractères les plus généraux, il ne faut pas oublier que, psychologiquement, l'ordre de la prise de conscience renverse celui de la genèse: ce qui est premier dans l'ordre de la construction apparaît en dernier à l'analyse réflexive, parce que le sujet prend conscience des résultats de la construction mentale avant d'en atteindre les mécanismes intimes."

Les conceptions piagétiennes conduiront ainsi à la mise en place d'un enseignement privilégiant les structures au dépens des contenus. C'est dans ce contexte qu'il faut comprendre l'enseignement (ou le non-enseignement) de la géométrie.

La place de la géométrie

Avec le point de vue structural la géométrie élémentaire devient un simple chapitre de l'algèbre linéaire et c'est ce point de vue qui est mis en avant dans l'apprentissage de la géométrie [Choquet 1964] [Dieudonné 1964], quitte à chercher les moyens pédagogiques d'introduire à un tel point de vue. C'est l'objet de l'ouvrage cité de Choquet qui cherche à mettre en place une axiomatique à la portée des élèves, tandis que Dieudonné, plus radical dans sa présentation de la géométrie, renvoie à une première approche *"expérimentale"* au sens de Papy [Papy 1963].

Si, en tant que science autonome, la géométrie a achevé son histoire, comme l'explique Bourbaki, ce dernier précise aussitôt que cette même géométrie s'est transfigurée *"en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparables"* [Bourbaki 1974 p. 172]. La géométrie est cependant bien plus qu'un simple langage; elle a permis, comme l'explique Dieudonné, le développement de nouvelles formes d'intuition conduisant à ce que Dieudonné appelle *"la domination universelle de la géométrie"* [Dieudonné 1980]. Mais cette nouvelle forme d'universalité de la géométrie s'inscrit dans sa propre histoire avec la linéarisation de la géométrie élémentaire, ce qui permet en retour la *géométrisation* des divers domaines des mathématiques dans lequel intervient le linéaire [Bkouche 1992a]. C'est ainsi que l'on peut comprendre la place restreinte et pourtant essentielle de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques, restreinte dans la mesure où la géométrie élémentaire disparait derrière sa représentation structurale, la géométrie du lycée s'inscrivant dans un enseignement de l'algèbre linéaire, essentielle dans la mesure où elle devient une clé de lecture des mathématiques contemporaines.

Si un tel enseignement occultait les raisons de ce dernier aspect de la géométrie, et cette occultation constituera l'une des difficultés de la réforme, il s'appuyait sur deux des principes qui guidaient la réforme: d'une part, il fallait arriver de la façon la plus économique à la mathématique d'aujourd'hui et la présentation *via* l'algèbre linéaire permettait cette économie, d'autre part l'analogie piagétienne entre le pont de vue structural des mathématiques et la construction de la connaissance justifiait cette présentation de la géométrie.

L'enseignement des mathématiques modernes

Les programmes mis en place par la réforme vont s'articuler essentiellement sur l'ordre structural [Bkouche 1992b].

La mathématique unifiée par le point de vue structural s'appuie la théorie des ensembles. L'enseignement du collège développe alors *une théorie naïve des ensembles* (opérations sur les ensembles, relations et applications), mais l'exposé se réduira à la mise en place d'un vocabulaire que l'on s'efforcera d'illustrer par des exemples *concrets* qui ont souvent bien peu de rapport avec les mathématiques, mais de tels exemples participent de l'universalité affirmée des mathématiques.

C'est ensuite l'algèbre qui est mise en valeur dans la mesure où l'on considère que c'est elle qui fonde l'activité mathématique contemporaine. On enseigne ainsi, dès le collège, la notion de loi de composition, en particulier la notion de groupe, et l'on subordonne l'enseignement de la géométrie à l'algèbre.

Enfin, on introduit au collège la notion de nombre réel, un nombre réel étant défini comme une suite décimale limitée ou illimitée. C'est seulement après l'introduction de **R** que l'on peut définir la notion de droite et développer la géométrie et, au lycée, les éléments d'analyse.

Un tel programme a conduit à l'échec que l'on sait, échec qui sera diversement interprété. Certains réformateurs mettront l'échec sur le compte d'un manque de préparation des enseignants, malgré l'effort de *recyclage* entrepris par les nouveaux *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (I.R.E.M.) mis en place pour accompagner la réforme. D'autres, parmi les partisans de la réforme (tel l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), rejetteront la responsabilité de l'échec sur l'institution, laquelle aurait détourné les idées de la réforme vers un formalisme stérile pour faire des mathématiques un instrument de sélection (ce que l'enseignement des mathématiques est effectivement devenu dans les années soixante-dix, mais cela était déjà inscrit dans la réforme Fouchet de 1963 avec la création des terminales "**C**").

Formalisme stérile, transformation des mathématiques en instrument de sélection, comment la réforme a-t-elle pu produire des effets si contraires aux intentions des réformateurs? Si la réforme a permis à l'institution de l'utiliser pour mettre en place une sélection par les mathématiques, c'est que d'une certaine façon elle s'y prêtait, moins par la volonté des réformateurs que par les idées qu'elle prônait, savoir, les mathématiques partout et les mathématiques pour tous. D'une part, le point de vue formaliste réduisait l'enseignement à la seule présentation du "bon" discours (ce que j'ai appelé *l'illusion langagière*), occultant ainsi le sens des mathématiques enseignées. D'autre part l'échec en mathématiques devenait échec social: si les mathématiques sont partout, celui qui échoue en mathématiques est incapable de comprendre le monde et ne peut que dépendre de ceux qui possèdent ce savoir premier, paradoxe d'un humanisme qui fonde ses valeurs sur la seule connaissance scientifique [Bkouche, Charlot, Rouche 1991, première partie].

L'après réforme

Au milieu des années soixante-dix on prend peu à peu conscience, d'une part du rôle joué par les mathématiques dans l'échec scolaire et le renforcement de la sélection, d'autre part de la perte de sens d'un enseignement qui privilégie les structures au dépens des contenus. Il faut y ajouter la marque d'une idéologie du *retour au concret*, idéologie qu'il faut relier à ce que Jean-François Lyotard a appelé la fin des grands récits [Lyotard 1985] [Bkouche 1992b].

L'enseignement de l'après-réforme s'est constitué comme une contre-réforme opposant aux excès de la réforme ses propres excès conduisant à une *dé-théorisation* de l'enseignement des mathématiques. La réforme des *mathématiques modernes* a conduit à confondre développement théorique et construction axiomatique, cette dernière étant réduite à son seul aspect hilbertien; une telle confusion conduisait à nier tout caractère théorique à toute construction ne relevant pas d'une axiomatique de type hilbertien; en refusant, non sans raisons, un enseignement fondé sur une telle axiomatique, la contre-réforme allait minimiser, sinon éliminer, tout aspect théorique de l'enseignement des mathématiques, oubliant ainsi l'histoire des mathématiques et, en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, une tradition bien antérieure à la réforme de 1970 [Bkouche, Charlot, Rouche 1991, chapitre 4].

On assiste alors peu à peu à la disparition de la cohérence d'un enseignement global pour une définition des programmes années par années, oubliant ainsi que chaque année n'a de sens que dans le projet global dans lequel elle s'inscrit; ainsi s'accumule les non-dits en même temps que chaque année impose sa marque à l'année suivante, ce qui se traduit essentiellement par des allègements de programmes qui ne rendent pas toujours facile la tâche des élèves, tant ils leur enlèvent les moyens d'une activité mathématique quelque peu consistante.

Du point de vue pédagogique, le retour au concret prôné par la contre-réforme, marque la fin de *l'illusion langagière* qui portait la réforme des mathématiques modernes, et s'accompagne d'une nouvelle forme de pédagogie que l'on pourrait appeler *l'activisme pédagogique* [Bkouche 1992b].

L'illusion langagière, en mettant l'accent sur le discours, n'est autre que cette croyance que la bonne forme du discours suffit pour en assurer la compréhension; c'est cette illusion qui a permis la mise en place de la réforme des *mathématiques modernes*; il suffisait que le langage soit en forme (et le renouvellement hilbertien avait permis cette mise en forme) et l'on demandait aux enseignants de s'appuyer sur cette mise en forme.

L'activisme pédagogique, par réaction contre cette illusion, propose au contraire de mettre l'accent sur l'activité des élèves. Au *dire* du professeur, on oppose le *faire* des élèves, sans que le statut de ce faire soit bien défini. Devant cette idéologie du faire, les contenus perdent de leur importance devant les méthodes, ainsi est mis en avant un enseignement des méthodes, mais ici, contrairement à l'époque des *mathématiques modernes*, c'est l'activité des élèves qui est mise en avant. Si le sujet cognitif *à la Piaget* semble avoir disparu, c'est pour laisser la place a un nouveau sujet cognitif, lequel construit de la connaissance via la réalisation de tâches bien définies. Avec la fin du grand récit de la science, le paradigme piagétien laisserait ainsi la place aux divers paradigmes issus nouvelles sciences cognitives et de l'influence se l'informatique sur les conceptions pédagogiques. Ce qui pose la question du lien entre le sujet cognitif, construction conceptuelle de la psychologie cognitive, et du sujet connaissant. Mais nous ne pouvons développer cette question dans le cadre de cet article.

C'est dans ce contexte que l'on assiste au retour de la géométrie dans l'enseignement comme on peut le voir à la lecture des programmes issus de la dernière en date des réformes (la réforme Chevènement mise en chantier en 1984).

L'élimination de la géométrie réduite à un chapitre de l'algèbre linéaire dans les programmes des *mathématiques modernes* avait été ressentie comme un manque dans une formation mathématique cohérente, d'autant que les mathématiques contemporaines comme les nouvelles technologies informatiques font appel à des connaissances géométriques sophistiquées. Mais l'enseignement de la géométrie de l'après-réforme, marqué par l'activisme pédagogique, manque de cohérence comme le montrent une lecture attentive des programmes et des commentaires qui les accompagnent, et certaines pratiques pédagogiques nous conduisent à poser quelques questions sur la signification d'un tel enseignement: acquisition d'une connaissance de la géométrie élémentaire ou simple prétexte à pédagogie? Quant à l'insistance sur le concret et la méfiance envers toute théorisation qui se manifestent autant dans les discours sur l'enseignement que dans certaines pratiques pédagogiques, elle pose la question même du sens d'un enseignement scientifique [Bkouche 1992a].

A côté de ce *retour au concret* prôné par les programmes de la contre-réforme, il faut ajouter que la nécessaire critique de l'idéologie des mathématiques partout s'est trop souvent exprimée comme une méfiance envers les mathématiques elles-memes, voire envers l'abstraction, mettant ainsi en cause la définition même d'une formation scientifique. En ce sens la fin du grand récit, au sens que dit Jean-François Lyotard, marque un arrêt, dans l'enseignement, de la tradition scientifique elle-même, autant celle du mathématisme grec que celle de l'empirisme des *Lumières* où caractère expérimental et mathématisation s'appuyaient l'un sur l'autre. Il est alors intéressant de noter que cette critique de la place des mathématiques dans l'enseignement se situe dans une société marquée par un développement technique qui s'appuie lui-même sur l'abstraction et la mathématisation. Autant dire que c'est la démocratisation de l'enseignement scientifique qui est en cause, nous y reviendrons.

Comparaison des principes des deux réformes

D'une certaine façon, l'enseignement de la géométrie nous éclaire sur les points de convergence et les points de divergence des deux réformes.

Les réformateurs de 1902 s'affirmaient proches de l'empirisme des *Lumières* lorsqu'ils insistaient sur le caractère expérimental des mathématiques. Les mathématiques participent des sciences de la nature non seulement parce qu'elles permettent la connaissance du monde mais parce que c'est à travers l'étude de la nature que se mettent en place les mathématiques, la géométrie qui constitue l'ossature de l'enseignement des mathématiques participant autant des sciences mathématiques que des sciences physiques. Il y a ainsi adéquation entre sciences mathématiques et sciences de la nature et cette adéquation doit être une composante de l'enseignement des sciences.

C'est une toute autre conception qui anime les réformateurs de 1970; nous distinguerons trois points forts de cette conception:

Premier point fort, l'efficacité du formalisme hilbertien a permis l'explosion mathématique que l'on sait. Le pas fut vite franchi qui voulut voir dans le formalisme, bien plus qu'une méthode, l'essence même des mathématiques; l'enseignement des mathématiques s'en trouvait par là même transformé.

Second point fort, l'unification des mathématiques apporte une meilleure compréhension d'icelles; cela implique que les principes de l'unité des mathématiques apparaissent dans l'enseignement, conformément au dogme piagétien sur l'analogie entre structures mathématiques et structures cognitives.

Enfin, l'idéologie des mathématiques partout s'appuie sur une distinction entre les mathématiques et leurs applications, distinction elle-même liée à la conception formaliste: l'adéquation ne se situe pas dans la réalité empirique mais dans la forme du discours. Les mathématiques se présentent ainsi comme le langage adéquat pour le développement de la connaissance.

Cependant, malgré ces différences de conception, ces deux réformes participent toutes deux d'un humanisme scientiste ancré dans la tradition des *Lumières*. D'abord, les réformateurs de 1902 comme ceux de 1970 considèrent que les mathématiques participent de la compréhension du monde, en ce sens elles doivent être enseignées à tous. Ensuite, les deux réformes s'inscrivent dans une tradition selon laquelle l'économie d'une société industrialisée exige d'une part un niveau élevé de qualification, d'autre part que cette qualification soit partagée. S'affirme ainsi un principe d'harmonie entre le progrès des connaissances, le progrès économique et l'humanisme [Condorcet 1790] dont les réformateurs se réclament aussi bien en 1902 qu'en 1970. Les deux réformes participent ainsi d'un même idéal de partage du savoir et de démocratisation de l'enseignement.

Reste que le développement industriel semble avoir montré le peu de pertinence du principe d'harmonie, que ce soit avec le développement du taylorisme ou que ce soit avec le développement de l'informatisation. La question se pose alors de savoir dans quelle mesure ce principe d'harmonie correspond à la réalité ou relève du mythe ou de l'utopie sociale.

Si la réforme de 1902 a vu le jour à une époque où le principe d'harmonie gardait encore sa force idéologique, il n'en est plus de même à l'époque des *mathématiques modernes*. Cette dernière réforme s'est réalisée dans le cadre mis en place par la réforme Fouchet, laquelle marque une première rupture avec le principe d'harmonie; c'est cette réforme qui institue les mathématiques comme instrument de sélection scolaire, sélection bien plus forte que la classique sélection par les humanités dans la mesure où, représentant l'instrument de la modernité technique, les mathématiques apportent une justification rationnelle à la hiérarchie sociale. En ce sens la réforme Fouchet marque un arrêt dans la démocratisation de l'enseignement (si l'on considère que la démocratisation de l'enseignement est d'abord partage du savoir), ouvrant la voie à l'école duale d'aujourd'hui.

Si l'Ecole de la Troisième République distinguait, selon la classification de Baudelot-Establet, deux réseaux d'enseignement, le réseau *Secondaire-Supérieur* et le réseau *Primaire-Professionnel* [Baudelot-Establet 1970], ces deux réseaux étaient cependant chacun porteur de savoirs, savoirs socialement hiérachisés il est vrai, le savoir du baccalauréat et des études universitaires pour les uns, le savoir du certificat d'études pour les autres, mais savoirs réels. L'école duale d'aujourd'hui marque, quant à elle, la distinction entre une école dispensatrice de savoir qui se donne pour objectif la formation des élites et une école-garderie qui distribue une illusion de savoir.

C'est ainsi la place du savoir dans l'enseignement qui est en question; la réforme des *mathématiques modernes* marque ainsi, dans l'enseignement, l'une des dernières grandes manifestations de la tradition des *Lumières* en même temps que la fin de cette tradition. Et l'on a dit combien la contre-réforme participe de cette remise en question de la tradition des Lumières, mais ce n'est pas ici le lieu de développer ce point, renvoyant à des articles à venir.

BIBLIOGRAPHIE

Ampère Jean-Marie
1834 *Essai sur la Philosophie des Sciences*, Culture et Civilisation, Bruxelles 1966
Barbin Evelyne, Itard Gilles
"Le courbe et le droit" in Commission Inter-IREM Epistémologie *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Ellipses, Paris1993, p. 113-137
Barbut Marcel
1967 *Mathématiques des Sciences Humaines*, PUF, Paris
Baudelot Christian , Establet Roger
1970 *L'école capitaliste en France*, Maspéro, Paris 1970
Belhoste Bruno
1995 *Les Sciences dans l'Enseignement Secondaire Français: textes officiels*, tome 1: 1789-1914, INRP & Editions Economica, Paris
Bkouche Rudolf
1991 "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert et *als*, *La France mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences n° 34, Paris
1992a "Le retour de la géométrie" in *Universalia* 1992
1992b "L'enseignement des mathématiques en France, 1970-1990" in *La Science au Présent* (2 volumes), Encyclopédie Universalis, Paris 1992, volume II, p. 491-493
Bkouche Rudolf, Charlot Bernard, Rouche Nicolas
1991 *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991
Borel Emile
1904 "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire", in *Oeuvres*, tome 4, CNRS, Paris 1972
Bourbaki Nicolas
1948 "L'architecture des mathématiques" in *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), Cahiers du Sud, Paris; réédition Blanchard, Paris 1962.
1974 *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris
Bourlet Carlo
1910 "La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire" (conférence à la réunion de la Commission Internationale sur l'enseignement des mathématiques), *L'Enseignement Mathématique*, volume 12, 1910, p. 372-387
Brussotti Luigi
1950 "Questioni Didattiche" in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*,, vol. iii, parte II, a cura di Luigi Berzalari, Ulrico Hoepli, Milano 1950
Candido G.
1899 "Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie", *L'Enseignement Mathématique*, tome 1, 1899, page 204
Cavaillès Jean
1937 *Méthode axiomatique et formalisme*, réédition Hermann, Paris 1981
Chasles Michel
1837 *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Gabay, Paris 1989
Choquet Gustave
1964 *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris 1964
Condorcet
1790 *Premier Mémoire sur l'Instruction Publique*, Introduction et notes de Bernard Jolibert, Editions Klincksieck, Paris 1989

Cremona Luigi
1873 *Elementi di Geometria Projettiva*, traduction française par Dewulf, *Eléments de Géométrie Projective*, Gauthier-Villars, Paris 1875
Delattre Joëlle, Bkouche Rudolf
"Pourquoi la règle et le compas" in Commission Inter-IREM Epistémologie *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, o.c. p. 87-112
Dieudonné Jean
1964 *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964
1980 *The universal domination of the geometry*, International Congress of Mathematical Education, Berkeley 1980
Euler Leonhard
1772 *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, (précédées de l'Eloge d'Euler par Condorcet et annotées par Cournot) 2 volumes, Hachette, Paris 1842
Gonseth Ferdinand
1936 *Les mathématiques et la réalité*, Blanchard, Paris, réédition 1974
Hadamard Jacques
1947 *Leçons de géométrie élémentaire* (nouvelle édition), Armand Colin, Paris 1947, réédition Gabay, Paris 1989.
Hilbert David
1899 *Les fondements de la géométrie*, (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971
Hilbert David, Cohn-Vossen
1932 *Geometry and Imagination* (translated by P. Nemenyi), Chelsea, New York 1952
Hoüel Jules
1867 *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867
Loria Gino
1905 "Sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie", *L'Enseignement Mathématique*, tome 7, 1905, page 11
Lyotard Jean-François
1985 "Histoire universelle et différences culturelles", *Critique* n° 456
Méray Charles
1874 *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Savy, Paris; réédition, Jobard, Dijon 1903
1907 "Mes «Nouveaux Eléments de Géométrie»", *Revue Scientifique* (Revue Rose) 5ème série, tome 7 pages 103-198 et 231-247
Papy Georges & Frédérique
1963 *Mathématique moderne* I, Didier, Bruxelles & Paris
Piaget Jean
1950 *Introduction à l'épistémologie génétique*, PUF, Paris; réédition 1973
1970 *L'épistémologie génétique*, "Que sais-je?", PUF, Paris
Piaget et *als*
1955 *L'Enseignement des mathématiques*, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955
Revuz André
1963 *Mathématique moderne, Mathématique vivante*, OCDL, Paris 1963
Walusinski Gilbert
1970 *Guide Blanc: pourquoi une mathématique moderne?* Armand Colin, Paris
Société Française de Philosophie
1907 *Bulletin de la Société Française de Philosophie*,