Une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques[1]

rudolf bkouche
IREM de Lille
2011

Introduction

Les études sur l'apport de l'histoire dans l'enseignement des sciences sont anciennes et on peut citer un ouvrage de Jules et Paul Tannery destiné aux élèves de la clase de philosophie[2] ou, plus proche de nous, l'ouvrage de Dedron et Itard, *Mathématiques et Mathématiciens*[3]. La notion de perspective historique dans l'enseignement des mathématiques a été développée par la Commission Inter-IREM Epistémologie[4]. Cette notion doit être distinguée de l'introduction, d'un enseignement d'histoire des mathématiques, elle concerne de façon générale l'apport de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement d'icelles et s'adresse d'abord aux professeurs. En cela elle participe de la culture des professeurs, mettant l'accent sur le rôle des professeurs dans l'enseignement, rôle quelque peu négligé ces dernières années au nom de l'idéologie de la centralité de l'élève.

L'histoire des mathématiques est une discipline à part entière, discipline difficile dont l'enseignement est loin d'être aisé, et une bonne connaissance des mathématiques est un préalable à l'étude de leur histoire. Il ne saurait donc être question de proposer l'histoire des mathématiques comme introduction à l'enseignement des mathématiques. Par contre il nous apparaît plus important de mettre l'accent sur ce que la connaissance de l'histoire peut apporter à ceux qui enseignent les mathématiques pour penser leur cours, en particulier penser les difficultés que rencontrent les élèves dans l'apprentissage des mathématiques et comprendre que ces difficultés, loin de se réduire à un problème pédagogique, sont liées aux mathématiques elles-mêmes.

Il faut ici éviter deux écueils. Le premier est de chercher dans l'histoire des mathématiques des recettes permettant de rendre l'enseignement plus facile ; reproduire une démarche historique dans la classe n'est pas nécessairement plus facile pour les élèves et peut au contraire ajouter de nouvelles difficultés. Le second écueil est de penser que le recours à l'histoire est un passage obligé pour penser l'enseignement.

Nous avons dit ailleurs que les mathématiques, et plus généralement les sciences, n'ont pas pour objectif d'être enseignées. Si les raisons qui conduisent à enseigner un domaine de la connaissance relève d'un choix de société, et par conséquent d'un choix politique, une fois décidé d'enseigner ce domaine de la connaissance, la question des méthodes d'enseignement est interne à chacune des disciplines enseignées. Cela implique de définir les divers enjeux de l'enseignement de chacune des disciplines en question, enjeux d'ordre épistémologique liés aux modes de connaissance de la discipline enseignée et enjeux d'ordre social et culturel liés à la signification de cette discipline dans la société, ces deux types d'enjeux renvoyant aux deux aspects de l'enseignement que sont l'émancipation des individus et l'intégration des nouvelles générations.

---

[1]Ce texte peut être considéré comme la suite d'un texte plus ancien de l'auteur : "Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science", *Repères-IREM* n°39, avril 2000, p. 35-59 http://michel.delord/rb/rb-persp_hist1-2000.pdf ou http://micheldelord.info/rb/rb-persp_hist1-2000.pdf

[2]Jules Tannery, Paul Tannery, *Notions de mathématiques, Notions historiques*, troisième édition revue et corrigée, augmentée de *Notions d'Astronomie*, Delagrave, Paris 1905

[3]Pierre Dedron, Jean Itard, *Mathématiques et Mathématiciens*, Magnard, Paris 1965

[4]*Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin Inter-IREM Epistémologie, Lyon 1988

Nous nous restreindrons ici essentiellement aux enjeux d'ordre épistémologique que pose l'enseignement des mathématiques, ce qui renvoie aux problématiques qui conduisent aux notions que l'on se propose d'enseigner. Nous entendons par problématique un ensemble de problèmes que l'on se propose de résoudre, lesquels s'unifient autour de quelques grandes questions, les unes internes aux mathématiques, d'autres liés à des questions non mathématiques mais que certains chapitres des mathématiques permettent de résoudre. Le terme "problématique" reste assez vague et, loin d'en chercher une définition précise, nous préférons l'illustrer à travers quelques exemples. Pour préciser cependant cette notion de problématique, nous rappelons ici les trois aspects de l'épistémologie tels que nous les avons définis dans notre article déjà cité[5].

Prolongeant l'analyse de Gonseth qui distingue entre une *stratégie de fondement* et une *stratégie d'engagement* dans la construction de la connaissance[6], nous pouvons distinguer trois aspects de l'épistémologie, une *épistémologie des fondements*, une *épistémologie du fonctionnement* et une *épistémologie des problématiques*. Nous revenons ici sur l'épistémologie des problématiques et le rôle qu'elle joue dans la réflexion didactique. L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit les hommes à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes. Si, comme le dit Max Weber, *"la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation"*[7], c'est à travers les problèmes que la méthode scientifique s'est construite et c'est dans le caractère même de ces problèmes et leur formulation que l'on peut essayer de comprendre comment se sont mises en place les théories plus ou moins sophistiquées qui constituent la science. Cela nous conduit à privilégier la notion de problématique dans l'étude des conditions de la construction de la science. Précisons ici que l'épistémologie des problématiques ne se situe pas seulement dans le cadre d'une genèse (que ce soit celle de l'histoire collective ou celle de l'histoire individuelle) et en ce sens, si le recours aux problématiques fait largement appel à l'histoire des sciences, il ne se réduit pas à celle-ci. La problématisation participe ainsi de la construction de la science en tant qu'elle est une science, c'est-à-dire une systématisation et une organisation de connaissances. Nous en donnerons ici deux exemples, d'abord la notion de grandeur, montrant comment la mesure des grandeurs a contribué à la généralisation de la notion de nombre, ensuite la mise en place du calcul littéral[8].

Avant de continuer, nous ferons une remarque sur le terme *"problème"*. On a dit et répété trop souvent que « *"faire des mathématiques"* c'est *"résoudre des problèmes"* ». Cette formulation, aussi intéressante soit-elle, est ambiguë. Il faut préciser d'abord qu'il s'agit de problèmes de mathématiques ou de problèmes renvoyant à des mathématiques, ce qui constitue un cercle. Mais plus important que ce cercle, c'est ce qu'occulte cette expression.

Un problème s'inscrit dans un ensemble, un *"chantier de problèmes"* pour reprendre l'heureuse expression de Nicolas Rouche du GEM (Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve). Il s'agit moins d'aborder des problèmes disparates que de mettre en place un ensemble cohérent de problèmes, ce qui conduit à développer des méthodes de résolution et les théories permettant de légitimer ces méthodes. Ensuite, les mathématiques, comme toute autre science, s'expriment *via* un discours cohérent, et il importe que cette cohérence

[5]Rudolf Bkouche, "Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science", o.c.

[6]Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation,* L'Age d'Homme, Lausanne 1975, préface.

[7]Max Weber, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965, p. 203

[8]Nous avons abordé dans notre article cité trois autres grandes problématiques, la notion de limite, la géométrie dans l'espace et la question de la représentation, la linéarisation de la géométrie élémentaire.

apparaisse dans l'enseignement, sous peine de réduire celui-ci à n'être qu'une forme d'activisme pédagogique[9].
Ici encore une réflexion sur l'histoire des mathématiques permet de comprendre comment s'est construite cette cohérence et comment celle-ci se modifie au cours de l'histoire. On peut alors définir la place de cette cohérence dans l'enseignement et expliciter comment les conditions de cette cohérence se transforment au fur et à mesure que les élèves avancent dans la connaissance.

La notion de grandeur

La notion de grandeur a disparu de l'enseignement des mathématiques avec la réforme dite des *mathématiques modernes*. Cette notion, dont nous verrons qu'elle a joué un rôle important dans le développement des mathématiques et en particulier dans ce que l'on appelle la généralisation de la notion de nombre, a été considérée comme relevant des mathématiques appliquées. A la décharge des réformateurs enfermés dans leur volonté d'enseigner les mathématiques qui se font[10], rappelons que le point de vue ensembliste a permis de présenter la généralisation de la notion de nombre sous une forme purement arithmétique ; il n'était donc plus besoin de s'appuyer sur la notion de grandeur considérée comme relevant de la physique et des mathématiques dites appliquées. Aujourd'hui, sous l'influence d'une conception moralisante de l'interdisciplinarité, on réintroduit les grandeurs pour faire "concret" et rapprocher l'enseignement des mathématiques de celui de la physique. On commet ici une double erreur. D'une part, la notion de grandeur n'est pas concrète, c'est même l'une des premières abstractions à l'origine du développement des mathématiques, d'autre part, c'est un travail sur les grandeurs qui a conduit au développement de l'algèbre comme nous le verrons ci-dessous.
Une réflexion d'ordre historique permet alors de comprendre la place de la notion de grandeur dans le développement des mathématiques et par conséquent sa place dans l'enseignement. S'il ne s'agit pas de reprendre la démarche historique dans l'enseignement, il s'agit, en s'appuyant sur la connaissance historique, de mettre en place une problématique qui montre comment la mesure des grandeurs a conduit à généraliser la notion de nombre à partie de la notion d'entier naturel, à commencer par la notion de fraction comme l'écrit Hermann Weyl :

"Historically ***fractions*** *owe their creation to the transition from counting to* ***measuring****"* [11]

Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, Tannery rappelle cette définition vague

"ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution"[12]

mais il explique que cette définition est suffisante pour une première appréhension des grandeurs.

---

[9]Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique" *Repères-IREM* n°9, octobre 1992, p. 5-12

[10]La mode dans les années soixante était d'opposer la "science qui se fait" à la "science déjà faite", ce qui conduisait à mettre en avant l'enseignement de la première en oubliant que celle-ci se construit sur la seconde. En cela on oubliait que la modernité scientifique n'est jamais transparente et que l'enseignement scientifique s'appuie sur des progressions à définir à partir de la science déjà faite.

[11]Hermann Weyl, *Philosophy of mathematics and natural Science*, Princeton University Press, Princeton 1949, reprinted by Atheneum, New York 1963, p. 30

[12]Jules Tannery, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, dixième édition revue, "Cours complet pour la classe de Mathématiques A,B" Armand Colin, Paris 1928, p. 470

Une telle définition ne nous apprend pas grand'chose sur ce qu'est une grandeur mais elle apparaît suffisante dans un premier enseignement dès que l'on a donné des exemples de grandeurs comme les longueurs, les poids ou les durées.
La première question qui se pose à propos des grandeurs est de les comparer, ce qui conduit au mesurage que l'on peut considérer comme un mode de comptage. On est ainsi conduit à la définition de la mesure. Pour simplifier cet exposé nous nous restreindrons, sauf mention explicite, aux longueurs, les grandeurs associées aux segments de droite.

De l'égalité des segments de droite

Etant donnés deux segments de droite, nous dirons qu'ils sont *égaux* ou qu'ils ont *même longueur* si on peut amener le premier sur le second. La définition de l'égalité est ainsi liée au mouvement renvoyant au principe de l'égalité par superposition que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

"Deux objets que l'on peut superposer sont égaux"

C'est en s'appuyant sur ce principe qu'Euclide démontre le premier cas d'égalité des triangles :

"Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous tendus par les côtés égaux, serons égaux chacun à chacun."[13]

Une fois cette proposition démontrée, Euclide peut se passer du mouvement. Ainsi la géométrie élémentaire s'appuie sur le mouvement pour pouvoir l'éliminer[14].
Une fois définie l'égalité des segments et la notion de longueur, on peut définir une longueur particulière que l'on appellera la *longueur unité* et le mesurage n'est autre que l'opération qui consiste à compter combien de fois une longueur donnée contient la longueur unité.
Cette opération exige de définir d'abord un calcul sur les longueurs, ensuite la notion de rapport de longueurs. On peut alors définir la mesure d'une longueur par rapport à la longueur unité choisie comme le rapport de la longueur donnée à la longueur unité, reste alors à définir ce rapport comme nombre.

Calcul sur les grandeurs

La longueur est une grandeur additive, c'est-à-dire que l'on peut définir l'addition des longueurs, celle-ci étant commutative et associative. On peut alors définir la multiplication par un entier. Rappelons que, deux longueurs a et b étant données, on dit que b est un *multiple* de a si $b = \mathrm{n}a$ où n est un entier naturel ; on dit aussi que a est un *diviseur* de b. On dit alors que deux longueurs sont *commensurables* si elles ont un diviseur commun, *incommensurables* dans le cas contraire.
Soient a et b deux longueurs et c un diviseur commun, on peut écrire les relations

$$a = \mathrm{m}c \qquad b = \mathrm{n}c$$

et on dit que le rapport de a à b est égal au rapport de m à n.

[13]Euclide, *Les Eléments*, traduits par Peyrard, Blanchard, Paris 1993, Livre I, proposition 4.
[14]Rudolf Bkouche, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles", *Bulletin de l'APMEP* n°430, septembre-octobre 2000, p. 613-629

On montre aisément que si d est un autre diviseur commun de a et b, c'est-à-dire si on peut écrire les relations

$$a = \mathrm{p}d \qquad b = \mathrm{q}d$$

on a la relation

$$\mathrm{mq} = \mathrm{np}$$

Cette dernière relation permet de définir la notion de rapport de deux grandeurs commensurables de façon indépendante du choix du diviseur commun.
Le calcul du rapport de deux grandeurs conduit alors à chercher un diviseur commun à ces deux grandeurs. L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le plus grand diviseur commun de deux longueurs.
Pour mettre en place l'algorithme, nous devons faire l'hypothèse que deux longueurs étant données, il existe un multiple de la plus petite supérieur à la plus grande, ce que l'on appelle l'*axiome d'Archimède*. On procède alors de la façon suivante :

Soient a et b deux longueurs, a étant inférieure à b, l'axiome d'Archimède implique qu'il existe un entier n tel que

$$\mathrm{n}a \leq b < (\mathrm{n} + 1)b$$

ce qui permet d'écrire

$$b = \mathrm{n}a + a_1$$

où a_1 est inférieur à a.
L'opération ci-dessus est appelée la *division* de b par a et la longueur a_1 est appelée le *reste* de la division. Il est clair que tout diviseur commun aux longueurs a et b divise la longueur a_1.
On peut continuer, c'est-à-dire diviser a par a_1 et obtenir le reste a_2, et ainsi de suite. On obtient une suite de longueurs b, a, a_1, a_2, …, a_n, … et tout diviseur commun de a et b divise les éléments de la suite b, a, a_1, a_2, …, a_n, ….
On montre aisément que si a et b ont un diviseur commun, la suite s'arrête au sens qu'il existe un entier p tel que a_p divise $a_{\mathrm{p}-1}$, le dernier terme a_p est le plus grand diviseur commun de a et b. Réciproquement, si la suite s'arrête, le dernier terme de la suite est le plus grand diviseur commun de a et b.
La question se pose alors de savoir si la suite s'arrête.
Pour les pythagoriciens, deux longueurs sont commensurables et on peut définir leur rapport comme un rapport d'entiers. Le problème se posera avec la découverte de longueurs incommensurables, l'exemple classique étant le couple de longueurs défini par le côté d'un carré et sa diagonale, l'opération d'anthyphérèse montrant que la suite définie par l'algorithme d'Euclide ne s'arrête pas[15].
Une fois découverte l'existence de couples de longueurs incommensurables, la question se posera de la définition du rapport de deux longueurs. C'est ce qu'expose Euclide au livre V des *Eléments*.

Rapport de grandeurs et théorie des proportions

[15]Arpad Szabo, *L'aube des mathématiques grecques*, traduit de l'allemand pas Michel Federspiel, "Mathesis, Vrin, Paris 2000, p. 162-163

Euclide ne donne pas de définition précise du rapport de deux grandeurs, se contentant de dire que le rapport de deux grandeurs est *"une certaine manière d'être entre elles suivant la quantité"*[16]. Cependant il suppose une condition qui n'est autre que l'axiome d'Archimède rappelé ci-dessus. Il peut alors donner une définition précise de l'égalité de deux rapports, puis de l'ordre entre les rapports, qu'il énonce de la façon suivante :

"Des grandeurs sont dites être en même rapport, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois."[17]

"*Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde un plus grand rapport que la troisième avec la quatrième.*"[18]

Ces définitions lui permettent de développer la théorie des proportions (égalité de rapports) qu'il utilisera pour l'étude des proportions géométriques.

Mesure des grandeurs et généralisation de la notion de nombre

Si, avec la théorie des proportions, Euclide a défini l'égalité des rapports, il n'en a pas pour autant donné la définition d'un rapport, encore moins défini le rapport comme un nombre.
Reste cependant la question de relier sa construction théorique avec la pratique de la mesure. Cela conduira à introduire des "nombres" nouveaux dont le statut reste mal défini. Si, lorsque deux grandeurs sont commensurables on peut définir leur rapport comme un rapport de nombre à nombre ce qui conduit à la notion de *nombre rompu* (la notion de fraction), la question des couples de grandeurs incommensurables reste entière et conduira à parler de *nombres sourds*[19].
A le fin du XVI^{e} siècle, Stevin décidera que tous les nombres se valent pour que les divers types de nombres (entiers, rompus, sourds) soient considérés de même nature[20]. Mais ce que l'on peut considérer comme un coup de force épistémologique de la part de Stevin ne résout pas le problème et il faudra attendre la seconde partie du XIX^{e} siècle pour que les nombres sourds acquièrent un statut clair avec Dedekind, Cauchy, Méray et Weierstrass. Mais cela est une autre histoire.

La définition arithmétique des nombres

Le développement de l'analyse et les problèmes que pose la notion de limite conduiront à remettre en question, au tournant des XVIII^{e} et XIX^{e} siècle, la place de la géométrie comme

[16]Euclide, *Les Eléments*, o.c. Livre V, définition 5. Dans sa traduction, Peyrard utilise le terme "raison" qui est équivalent au terme "rapport". C'est ce dernier terme que nous utilisons dans la suite.
[17]Euclide, *Les Eléments*, o.c. Livre V, définition 6
[18]Euclide, *Les Eléments*, o.c. Livre V, définition 8
[19]Cette dénomination, introduite par les mathématiciens arabes, désigne les nombres que la raison n'entend pas.
[20]Stevin, *Théorie des incommensurables grandeurs* (1585), cité dans *Mathématiques au Fil des Ages*, Commission Inter-IREM Epistémologie, Gauthier-Villars, Paris 1987, p. 134-135

modèle de la rigueur mathématique, remise en question renforcée par la découverte (ou l'invention !) des géométries non euclidiennes.
Ainsi Bolzano cherchera une démonstration numérique du fait que, une fonction continue f étant définie sur un intervalle $[a,b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, alors la fonction s'annule pour au moins une valeur située dans l'intervalle $[a,b]$[21]. Si sa démonstration reste incomplète dans la mesure où il ne dispose pas de la notion de nombre réel, elle met en place les ingrédients nécessaires qui seront repris une fois définie la notion de nombre réel.

Une première solution sera proposée par ce que l'on appelle l'arithmétisation de l'analyse conduisant à reconstruire le numérique à partir des entiers. La théorie des ensembles y ajoutera la définition des ensembles de nombres aujourd'hui noté **N**, **Z**, **Q**, **R**. Nous ne reviendrons pas sur ces constructions que l'on trouve dans de nombreux ouvrages.
Nous dirons cependant comment la construction des rationnels et la construction des réels se relient à des traditions plus anciennes.

Construction des nombres rationnels

On définit sur l'ensemble des couples d'entiers la relation R[(m,n),(p,q)] définie par

$$mq = np$$

et l'on montre aisément que c'est une relation d'équivalence dont on peut noter la ressemblance, non fortuite, avec la relation qui définissait l'égalité des rapports de nombres.
On définit sur l'ensemble des couples d'entiers une addition et une multiplication qui ne sont autres que l'addition et la multiplication des fractions. Ces opérations sont compatibles avec la relation d'équivalence.
Le quotient de l'ensemble des couples d'entiers par la relation d'équivalence R n'est autre que l'ensemble des nombres rationnels positifs.

Construction des nombres réels[22]

Les nombres réels sont au fondement de l'analyse et leur construction est nécessaire pour démontrer les propriétés élémentaires des fonctions continues. Cette construction a permis d'abord de construire l'analyse indépendamment de toute référence géométrique et ensuite de redéfinir la notion de continuité géométrique comme l'explique Dedekind dans son article "Continuity and Irrational Numbers"[23]. On peut cependant noter que, si la construction de Dedekind permet de construire l'analyse indépendamment de toute référence géométrique, l'idée de coupure qu'il introduit est d'origine géométrique[24].

Retour à la mesure des grandeurs

La construction des nombres réels permet de redéfinir la mesure des grandeurs comme une application d'un ensemble de grandeurs dans l'ensemble des nombres réels. Nous reprenons

[21]Bernard Bolzano, "Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation" (1817) (traduction française de J. Sebestick), *Revue Française d'Histoire des Sciences*, 1964, p. 129-164
[22]Richard Dedekind, "Continuity and Irrational Numbers" in *Essays on the Theory of Numbers*, translation by Wooster Woodruff Beman (1901), Dover Publications Inc., New York 1963. Notons que Dedekind parle de "création" (*Schöpfnung*)
[23]*ibid*., p. 1-27
[24]*ibid*. p. 6-12

ici la construction donnée par Jules Tannery dans *ses Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* déjà citées[25], construction que nous reformulons pour mieux faire apparaître le lien avec la construction d'Eudoxe - Euclide.
Pour ce faire, nous définissons une section positive commençante comme une partie de l'ensemble des rationnels strictement positifs telle que si un nombre rationnel positif appartient à cette partie, alors tout nombre rationnel positif inférieur au nombre donné appartient encore à cette partie. Une section positive commençante définit un nombre réel positif
On suppose que l'ensemble des grandeurs que l'on considère est additif et satisfait l'axiome d'Archimède, on associe à tout couple de grandeurs (a,b) la section positive commençante

$$S(a,b) = \{p/q \mid pb < qa\}$$

et on appelle *rapport* de a à b le nombre réel positif défini par $S(a,b)$, on le note a/b.
On vérifie aisément les propriétés suivantes :
Soient (a,b) et (c,d) deux couples de grandeurs, alors
i : les rapports a/b et c/d sont égaux si et seulement si les sections positives commençantes $S(a,b)$ et $S(c,d)$ sont les mêmes.
ii : le rapport a/b est strictement supérieur au rapport c/d si et seulement $S(a,b)$ contient strictement $S(c,d)$.
Ces propriétés sont analogues aux définitions 6 et 8 du Livre V des *Eléments* d'Euclide rappelées ci-dessus.

De la théorie des équations au calcul littéral

Dans un ouvrage destiné à des élèves de cinquième, les auteurs écrivent pour expliquer les *raisons* du calcul littéral :

"la résolution d'un problème est souvent facilitée lorsqu'on représente par des lettres les nombres inconnus qui interviennent dans ce problème."[26]

précisant ensuite:

"On peut raisonner sur ces lettres comme s'il s'agissait de nombres inconnus."

Nous ajouterons ici que si on n'a pas compris que le calcul littéral participe de la construction du simple, construction qui est l'un des objectifs du travail du mathématicien (cf. appendice), on n'a pas compris ce que signifie le calcul littéral. Le premier objectif d'un enseignement du calcul littéral est alors d'amener les élèves à prendre conscience de ce caractère de simplicité. Replacer le calcul littéral dans une perspective historique apparaît alors comme une façon de comprendre ce caractère de simplicité. Cela nous conduit à définir les trois aspects du calcul littéral, la lettre comme inconnue et comme paramètre, la lettre comme variable et la lettre comme indéterminée.

Lla lettre comme inconnue et comme paramètre

[25]Jules Tannery, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, o.c., p.470-487
[26]Lebossé et Hémery, *Arithmétique, Algèbre et Géométrie* (classe de cinquième des lycées et collèges), Fernand Nathan, Paris 1948, p. 91

L'utilisation des équations pour résoudre un problème s'inscrit dans le prolongement de la méthode "analyse – synthèse" des géomètres grecs pour les problèmes de constructions géométriques. Pour préciser cela, nous mettrons en parallèle un texte de Pappus sur l'analyse et la synthèse et un texte de François Viète.
Pappus écrit au Livre VII de la *Collection Mathématique* :

"L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et que l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme déjà obtenue, et disposant dès lors de ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse."[27]

Quant à Viète, il écrit au début de l'*Art Analytique* :

Il y a une voie aux mathématiques pour enquérir et rechercher la vérité, laquelle est dite premièrement trouvée par Platon et par Théon, appelée Analyse, et d'icelles définies par l'Assumption du requis comme concédé par les conséquences au vrai concédé. Comme au contraire la Synthèse, l'Assumption du concédé par les conséquences tirées de la fin et compréhension du requis. Et bien que les anciens aient seulement proposé deux espèces d'analytiques, savoir la zététique et la poristique auxquelles convient très bien la définition de Théon, j'en ai toutefois constitué une troisième espèce convenables à icelles, laquelle sera site rétique exégétique. Comme étant le Zététique, celui par lequel est trouvée l'égalité ou proportion de la grandeur requise avec celles qui sont données, le Poristique, par lequel est enquis de la vérité du Théorème ordonné, par l'égalité et la proportion, l'Exégétique, par lequel est exhibé la même grandeur dont est question, par l'égalité ou proportion ordonnée. Et ainsi tout l'art Analytique s'attribuant ce triple office sera défini la doctrine de bien trouver aux Mathématiques.[28]

Cette mise en parallèle nous rappelle l'origine du terme *"analytique"*.
La mise en équation revient à écrire les relations entre les quantités inconnues et les quantités connues et à calculer avec les quantités inconnues comme si elles étaient connues. Pour ce faire, on représente les quantités inconnues par des mots, la *racine*, comme le fait Al-Khwarizmi dans son ouvrage fondateur[29] ou la *chose* comme le feront les géomètres italiens du début du XVIème siècle et plus tard par des lettres. Il faut alors noter que les coefficients numériques qui interviennent dans les équations jouent le rôle de "nombres génériques" au sens où, si l'on change la valeur de ces coefficients, le développement des calculs ne change pas.

Le calcul littéral

[27]Pappus, *La Collection Mathématique*, traduction et notes par Paul Ver Eecke, nouveau tirage, Blanchard, Paris 1982
[28]Vaulézard, *La Nouvelle Algèbre de Monsieur Viète* (1630), "Corpus des Œuvres de1986 Philosophie en langue Française", Fayard, Paris
[29]Al-Khwarizmi, *Le commencement de l'algèbre*, texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed, Blanchard, Paris 2007

La représentation littérale des inconnues sera élargie par François Viète lorsqu'il représentera aussi les quantités connues par des lettres. Un tel élargissement permet d'éviter l'usage des nombres génériques puisque cet usage est indépendant des valeurs numériques, mais cet élargissement est lié au fait que les calculs portent non seulement sur des nombres mais plus généralement sur des grandeurs. C'est l'analogie entre le calcul sur les nombres et le calcul sur les grandeurs qui conduira Viète à écrire :

"Le Logistique Numérique est celuy qui est exhibé et traité par les nombres, le Spécifique par les espèces ou formes des choses : comme par les lettres de l'alphabet."[30]

Viète précise que le calcul sur les grandeurs est plus simple que le calcul numérique en ce qu'il est contraint par la loi des homogènes, ce qui conduit Viète à introduire cette loi dans le calcul sur les nombres, critiquant Diophante pour avoir ignoré cette loi[31]. La loi des homogènes apparaît ainsi comme un point crucial du calcul littéral, ce qui pose la question de son explicitation dans l'enseignement si on veut que le calcul littéral apparaisse autrement que comme un exercice de style, mais cette explicitation ne prend son sens que dans un calcul sur les grandeurs, ce qui renvoie à la géométrie et à la physique[32] ; cela montre la place de la géométrie et de la physique dans l'enseignement du calcul littéral.

La notion de paramètre

La représentation des constantes par des lettres conduira à la notion de *paramètre*, un paramètre désignant une constante (nombre ou grandeur) dont la valeur peut varier. On peut alors classer les équations en fonction des paramètres ce qui permet de discuter de l'existence et du nombre de solutions, l'exemple classique étant l'équation du second degré.
Le passage des équations à coefficients numériques aux équations à coefficients littéraux marque une étape importante de la progression de l'enseignement de l'algèbre. La difficulté, dans l'enseignement, vient de ce qu'une littéralisation trop rapide risque de cacher la question sous ses aspects techniques et de couper ceux-ci de leur signification théorique. Il est donc nécessaire d'introduire la représentation littérale des quantités connues lorsque celle-ci permet de mieux appréhender une question. Ce qui conduit à mettre en avant, dans l'enseignement, d'abord le rôle des équations, ensuite le rôle déjà signalé de la géométrie et de la physique dans l'enseignement du calcul littéral.
La représentation littérale des constantes conduira à la notion de polynômes, sur laquelle s'appuie la théorie des équations algébriques, laquelle s'est identifiée à l'algèbre jusqu'à la mise en place des structures algébriques au XIX^{e}. Mais ce n'est pas ici le lieu de développer cette partie du calcul littéral nous contentant de renvoyer à quelques ouvrages classiques d'algèbre, tels que les *Leçons d'Algèbre élémentaire* de Carlo Bourlet[33] et le *Cours d'Algèbre* de Pierre Chenevier[34], à l'usage des élèves des classes de Mathématiques Elémentaires des lycées, ou encore, à un niveau plus élémentaire, l'ouvrage d'*Algèbre* d'Emile Borel et Paul Montel[35].

---

[30]Vaulézard, o.c. p. 30
[31]*ibid*. p. 51
[32]On peut relier la loi des homogènes aux équations aux dimensions.
[33]Carlo Bourlet, *Leçons d'Algèbre élémentaire*, "Cours complet de mathématiques élémentaires", Armand Colin, Paris 1896
[34]Pierre Chenevier, *Cours d'Algèbre*, à l'usage des classes de Mathématiques de l'enseignement secondaire (lycées et collèges de garçons et de jeunes filles), Hachette, Paris 1930
[35]Emile Borel et Paul Montel, *Algèbre*, "Nouveau Cours de Mathématiques" Armand Colin, Paris 1918

La géométrie analytique

L'invention de ce que l'on appelle aujourd'hui de la géométrie analytique, c'est-à-dire l'algébrisation de la géométrie, a suivi de près le travail de Viète. Cette algébrisation de la géométrie conduira en retour à une géométrisation de la théorie des équations et il faut voir dans cette dialectique "algébrisation – géométrisation" un aspect essentiel des mathématiques contemporaines.
Nous citerons d'abord la première phrase de *La Géométrie* de Descartes :

"Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les connaître"[36]

Cette première phrase annonce l'objectif : la réduction des méthodes géométriques au calcul des longueurs. Pour Descartes, un tel calcul doit être analogue au calcul numérique, ce qui le conduit à introduire une longueur unité et renoncer ainsi à la loi des homogènes ; c'est le prix à payer si l'on veut définir le produit de deux longueurs comme une longueur. Si ce calcul se montre à la fois simple et puissant, la géométrie disparaît derrière le calcul. La question se pose alors de retrouver la géométrie sous-jacente, ce qui conduit Descartes à alourdir le discours comme le montre le laborieux chapitre III de l'ouvrage.
Par contre Fermat, en conservant la loi des homogènes, reste plus proche de la géométrie. Il obtient ainsi un calcul moins fluide que celui de Descartes[37], calcul qui permet cependant à Fermat de prendre conscience de l'autonomie du calcul littéral par rapport aux grandeurs que représentent les lettres. C'est ce qui apparaît dans la partie consacrée à la géométrisation de la théorie des équations, d'abord dans l'appendice de son "Introduction aux lieux plans et solides"[38], ensuite dans la "Dissertation en trois parties"[39]. Nous reviendrons ci-dessous sur l'autonomie du calcul littéral.

La lettre comme variable

La notion de fonction est aujourd'hui une notion essentielle des mathématiques. Pourtant cette notion est susceptible de plusieurs approches dont il n'est pas toujours facile de voir les liens. La définition ensembliste, malgré la simplicité de sa formulation, n'est pas la plus intéressante dans l'enseignement élémentaire[40]. Parmi les entrées possibles, la cinématique tient un rôle important sinon premier.
Etudier un mouvement revient à associer à chaque instant la position d'un mobile. Cette définition se précise lorsque le mouvement est celui d'un point se déplaçant sur une droite. On peut alors considérer le temps lui-même comme un point (un instant) se déplaçant

---

[36]René Descartes, *La Géométrie*, in *Discours de la Méthode plus la Dioptrique, Les Météores et la Géométrie* (1637), "Corpus des Oeuvres de Philosophie en Langue Française", Fayard, Paris 1986, p. 333
[36]*ibid*. p. 334
[37]encore que la question se pose des nos habitudes de calcul, plus proches de la présentation cartésienne. Tannery et Henry ont montré comment on pouvait moderniser les calculs de Fermat tout en conservant l'essentiel de sa présentation.
[38]Pierre de Fermat, "Introduction aux lieux plans et solides" in *Œuvres de Fermat*, publiée sous la direction de Paul Tannery et Charles Henry, tome troisième, traduction de Paul Tannery, Gauthier-Villars, Paris 1896, p. 96-101
[39]Pierre de Fermat, "Dissertation en trois parties", in *Œuvres de Fermat*, o.c. p. 109-120
[40]Rappelons que la théorie des ensembles répond à des problèmes qui ne relèvent pas de l'enseignement élémentaire, sauf peut-être en ce qui concerne les probabilités. On peut s'appuyer sur ces dernières pour introduire quelques éléments de théorie des ensembles dans l'enseignement du lycée.

uniformément sur une droite (l'axe des temps). Cette représentation du temps est loin d'être évidente et c'est l'une des grandes conquêtes de la révolution scientifique du XVII^e siècle.
En admettant une telle représentation, on peut alors représenter le mouvement d'un point sur une droite comme une fonction du temps. Le temps est ici la variable indépendante et la position du point la variable dépendante. Le mouvement est dit uniforme si les espaces parcourus sont proportionnels aux durées, ce qui conduit à la représentation du mouvement par une relation de la forme

$$x = at + b$$

où x est l'abscisse du point en mouvement sur la droite qu'il parcourt et t le temps[41].
D'autres exemples de fonctions affines peuvent être donnés, mais il nous semble que le mouvement est une entrée essentielle pour l'étude des fonctions.
On rencontre ainsi une nouvelle forme d'utilisation des lettres, les lettres comme représentant des nombres ou des grandeurs variables, une fonction exprimant le mode de dépendance d'une grandeur, la grandeur dépendante, par rapport à la grandeur indépendante.
Lorsque les grandeurs sont des nombres ou représentées par des nombres *via* la mesure, la fonction est définie par une expression composée d'opérations élémentaires telles les quatre opérations arithmétiques augmentées de quelques autres que nous ne précisons pas ici.
Rappelons la définition d'une fonction énoncée par Euler dans son *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* :

"Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes."[42]

Cette définition est suffisante dans l'enseignement secondaire autant pour les besoins des mathématiques que pour les besoins de la physique.

L'autonomie du calcul littéral

La pratique du calcul littéral conduit à remarquer que, une fois les règles de calcul énoncées, on ne se préoccupe plus de ce que représentent les lettres utilisées, nombres ou grandeurs. Le calcul devient ainsi un pur jeu de lettres obéissant à des règles précises.
Pour préciser ce point de vue, nous donnerons l'exemple de l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On peut considérer cette identité comme une façon de représenter une infinité de relations numériques, chacune étant définie en "donnant des valeurs numériques" aux lettres.
On peut aussi considérer que cette identité représente une égalité d'aire si on considère le carré de côté $a + b$ que l'on décompose en deux carrés de côtés respectifs a et b et deux rectangles, chacun de côtés a et b. (nous laissons au lecteur le soin de dessiner la figure)[43].

[41]Il faudrait distinguer ici la relation entre grandeurs, ce qui renvoie à la loi des homogènes, et la relation entre mesures qui est une relation numérique.
[42]Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, traduit du latin en français, avec des notes et des éclaircissements, deux tomes, Barrois, Paris i796, réédition ACL-éditions, Paris, tome 1, p. 2
[43]Cette propriété géométrique n'est autre que la proposition 4 du Livre II des *Eléments* d'Euclide. La démonstration euclidienne est purement géométrique, s'appuyant sur la méthode des aires développée dans le Livre I.

Si ces représentations sont utiles pour comprendre ce que signifie cette identité, il faut remarquer que le calcul qui conduit à cette identité est indépendant de toute signification des lettres. Il suffit de connaître les règles d'usage de l'addition (l'application qui au couple (a,b) associe l'expression notée $a + b$), de la multiplication (l'application qui au couple (a,b) associe l'expression notée ab), et la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Autrement dit; du point de vue du calcul littéral, l'identité ne signifie rien d'autre qu'elle-même en tant que conséquence des règles d'usage.
C'est cela que nous appellerons l'*autonomie du calcul algébrique*. On peut considérer que Fermat l'avait, sinon compris, du moins entrevu, lorsqu'il transformait ses équations pour montrer comment leur résolution conduisait à chercher l'intersection de deux courbes. Cette autonomisation n'est pas sans poser problème. C'est ce qu'expose Poncelet lorsqu'il énonce les deux postulats de la géométrie analytique.

premier postulat : *une situation géométrique étant donnée, on peut la représenter par des équations exprimant des propriétés de cette situation géométrique.*

second postulat : *après que certains calculs ont été effectués, les nouvelles équations obtenues expriment encore des propriétés de la situation géométrique*[44].

La question se pose alors de la place de cette autonomie dans l'enseignement de l'algèbre.
La compréhension de cette autonomie s'appuie sur la pratique du calcul littéral, que ce soit sous une forme purement algébrique ou sous la forme de la géométrie analytique ou de la physique ; il ne saurait donc être question d'exiger cette compréhension au début de l'enseignement de l'algèbre. Mais, si dans un premier enseignement, les lettres restent les symboles des quantités, nombres ou grandeurs, qu'elles représentent, on peut penser que l'idée de l'autonomie du calcul se mettra en place au fur et à mesure que se développe la pratique du calcul littéral par l'élève. Ce peut être l'un des objectifs de la terminale S, mais ce peut être aussi l'objectif des terminales littéraires si on relie cette notion d'autonomie à l'enseignement de la philosophie des sciences. Car cette autonomie du calcul littéral reste un des points importants des mathématiques contemporaines.

La lettre comme indéterminée

C'est dans le cadre de cette autonomie du calcul qu'il faut comprendre la notion d'indéterminée. Une indéterminée n'est plus une lettre en attente de valeur comme cela se passe dans le premier enseignement du calcul littéral, c'est une lettre qui n'a d'autre signification qu'elle même et dont l'usage est défini par des règles explicites. En cela la notion d'indéterminée ne relève pas de l'enseignement secondaire, tout au plus peut-on l'aborder comme un thème limite de la terminale S[45]. Nous n'aborderons pas cette question dans ce texte, rappelant ce principe que nous a appris la critique de la réforme dite des *"mathématiques modernes"*, à savoir que l'enseignement secondaire est moins de dire la modernité scientifique que de préparer à comprendre cette modernité.

---

[44]Jean-Victor Poncelet, *Principes d'Analyse et de Géométrie*, (deux tomes), Gauthier-Villars, Paris 1864, tome deuxième, p. 320-321

[45]Lorsque nous parlons de la terminale S, nous ne pouvons pas ne pas mettre l'accent sur l'incohérence d'une terminale scientifique unique, incohérence d'autant plus forte que les filières sont rétablies *via* les enseignements de spécialité. En effet, alors que dans la distinction des terminales C et D, ou plus avant des classes de "mathématiques élémentaires" et des classes de "sciences expérimentales", les enseignements scientifiques s'appuyaient sur une cohérence de contenu, la distinction entre l'enseignement obligatoire et l'enseignement dit de "spécialité" casse la cohérence de chacune des disciplines.

Formation des maîtres et culture des professeurs

Si l'enseignement est lieu de transmission du savoir, la première exigence du métier de professeur est la maîtrise du savoir que l'on doit enseigner. La pédagogie, qui n'est autre que le moyen de construire les progressions nécessaires pour amener les élèves à acquérir le savoir qu'on leur enseigne, se définit essentiellement par rapport à ce savoir.
La formation des maîtres s'appuie sur ces deux pôles, la maîtrise du savoir, ou des savoirs, que le futur professeur devra enseigner et la mise en place de méthodes pédagogiques au sens que nous avons dit ci-dessus. Parmi ces méthodes, nous avons déjà noté la problématisation des notions que l'on enseigne. L'histoire des mathématiques apparaît comme un moyen de mettre en place cette problématisation. Nous l'avons vu ici dans le cas des grandeurs et de la mesure des grandeurs, question qui a conduit à la généralisation de la notion de nombre, nous l'avons vu aussi pour le calcul littéral qui apparaît avec l'usage des lettres pour résoudre les problèmes, problèmes numériques et problèmes sur les grandeurs. C'est cela qui a conduit dans un premier temps à considérer l'algèbre comme la science des équations, le calcul littéral apparaissant comme l'outil de résolution. Ce n'est que plus tard que la définition de l'algèbre évoluera, d'une part vers une science générale du calcul, d'autre part vers l'étude des structures algébriques.
Le rôle de l'enseignement élémentaire et secondaire est moins de raconter le dernier cri de la science que d'expliciter les diverses étapes qui ont conduit à la science d'aujourd'hui, non pour répéter l'histoire, ce qui serait illusoire, mais pour mettre en avant les problématiques sur lesquelles se sont construit les divers concepts et théories qui constituent les mathématiques.
La connaissance de l'histoire des mathématiques peut être un moyen de penser ces problématiques sans pour autant que l'on reprenne les problématiques historiques. C'est en cela que l'histoire des mathématiques et la réflexion épistémologique qui l'accompagne ont leur place dans la formation des maîtres.
Ce n'est pas ici le lieu de développer les divers usages de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement. Notre propos est seulement de montrer comment le recours à l'histoire des mathématiques peut permettre aux professeurs de penser leur cours, de penser aussi les difficultés que rencontrent les élèves dans l'apprentissage d'une science dans la mesure où ces difficultés sont d'abord celles posées par la science que l'on enseigne.

Appendice : la question du simple

Dans un ouvrage de réflexion sur l'activité scientifique, Emile Picard écrivait :

"On doit d'ailleurs reconnaître qu'il est indispensable, pour le progrès de la science, que les choses paraissent simples"[46]

Notons d'abord que Picard ne dit pas que les choses sont simples, mais demande qu'elles paraissent simples. Cette exigence marque ainsi moins une propriété du monde que la volonté de l'esprit humain de construire la simplicité du monde. Et faut-il rappeler que les mathématiques sont l'un des lieux privilégiés où se construit la simplicité du monde ?
Exigence fondatrice de la pensée scientifique, cet idéal de simplicité ne saurait être ignoré de cette initiation à la pensée scientifique que constitue l'enseignement des sciences. C'est cet idéal de simplicité qui permet de comprendre les raisons des sophistications nécessaires élaborées tout au long de l'histoire des sciences, sophistications dont le premier objectif reste de rendre plus aisé, à l'intérieur d'un domaine de la connaissance, autant les instruments

---

[46]Emile Picard, *La Science Moderne*, Flammarion, Paris 1914, p. 68

techniques pour résoudre les problèmes que l'on y rencontre que les constructions conceptuelles qui permettent une appréhension globale de ce domaine de la connaissance.
C'est ainsi qu'il faut entendre la phrase de Lebossé et Hémery citée ci-dessus à propos du calcul littéral.
C'est aussi le sens de la première phrase de *La Géométrie* de Descartes que nous rappelons :.

"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."[47]

La méthode cartésienne consiste alors, d'abord à restreindre le champ des longueurs à déterminer aux seules longueurs de segments de droites parallèles aux directions de coordonnées, ensuite à écrire, en utilisant le calcul de Viète[48], les équations auxquelles satisfont les longueurs inconnues cherchées et résoudre les équations correspondantes. On voit ainsi comment le calcul permet de résoudre aisément les problèmes dès lors que l'on sait les réduire au calcul. Le calcul littéral, qui permet de calculer indifféremment sur les quantités connues ou inconnues, conduit alors, par la seule utilisation des règles de calcul, à la résolution du problème posé.
La méthode (au sens cartésien du terme[49]) n'est alors que l'instrument de cette construction de la simplicité.
On retrouve ce même idéal de simplicité dans l'autre grande méthode contemporaine définie par Desargues[50], la méthode arguésienne qui unifie, sur le plan de la représentation et sur le plan du langage, la théorie des coniques, méthode qui conduira au développement de la géométrie projective.
Ainsi les deux méthodes géométriques, l'analytique et la synthétique[51], celle du calcul et celle des figures, marquent essentiellement une volonté de simplicité (au sens de la construction du simple)[52]; c'est ainsi qu'il faut comprendre le mode d'unification géométrique que chacune d'elles propose aux géomètres, d'autant que le dépassement de l'opposition entre les deux méthodes se fera par une "simplificité" encore plus grande, laquelle conduira aux synthèses modernes de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes.
C'est encore cet idéal de simplicité que l'on retrouve dans le point de vue structural développé par Bourbaki[53] et dans la tentative de modernisation de l'enseignement des mathématiques proposée par la réforme de 1970.
Pourtant l'échec de la réforme de 1970 dans sa volonté de construire un enseignement des mathématiques pour tous pose un problème quant à la signification de cette simplicité : de quelle simplicité s'agit-il ? et dans quelle mesure les discours sur la simplicité des mathématiques sont-ils pertinents, en particulier en ce qui concerne l'enseignement ?
Lorsque Bourbaki explique, dans le mode d'emploi[54] de ses *Eléments de Mathématiques*:

---

[47]René Descartes, *Discours de la Méthode, plus La Dioptrique, les Météores et la Géométrie* (1637), Fayard, Paris 1986, p. 333
[48]François Viète, "Introduction à l'Art Analytique" (traduction française par Vaulézard) in Vaulézard, *La Nouvelle Algèbre de M. Viète* (1630), Fayard, Paris 1986
[49]Rappelons que *La Géométrie* est l'un des trois essais qui accompagnent le *Discours de la Méthode*.
[50]Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.
[51]Si le terme "analytique" renvoie à l'art analytique de Viète, le terme "synthétique" semble marquer essentiellement une opposition au terme "analytique".
[52]C'est ainsi que l'on peut comprendre le discours sur la généralité nécessaire des méthodes géométriques développé par Chasles dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1937, réédition Gabay, Paris 1989).
[53]Nicolas Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Les Grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), Cahiers du Sud, 1948; nouvelle édition augmentée, Blanchard, Paris 1962

"Le traité prend les mathématiques à leur début…"

il s'empresse de préciser:

"Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université."

rappelant ainsi que l'ouvrage n'est pas un ouvrage d'enseignement et qu'il ne s'adresse pas au débutant.
C'est que la simplicité des constructions structurales ne peut être perçue que dans une compréhension globale des mathématiques.
Ainsi la définition d'un groupe, aussi simple soit-elle dans sa formulation (et d'une certaine façon elle est trop simple), non seulement n'épuise pas la richesse de la notion, mais risque d'occulter, pour le lecteur non averti, ce qui fait l'intérêt de cette notion en réduisant celle-ci à sa seule définition et à ses premières propriétés. Autant dire que ce qui importe ici, c'est moins la *simplicité* en tant que telle que la *construction du simple* que constitue la mise en place d'un concept (ici le concept de groupe) par rapport aux problèmes dans lequel il intervient ; la notion de groupe n'est pas née d'une définition formelle s'insérant dans le cadre d'une algèbre structurée telle que l'expose l'ouvrage de Bourbaki, mais de son usage dans l'étude de problèmes spécifiques, tels celui de la résolution des équations algébriques avec le point de vue galoisien, ou celui de l'étude des transformations géométriques avec le point de vue du *Programme d'Erlangen* de Félix Klein.
On voit apparaître ici le lien entre cette construction du simple et l'épistémologie des problématiques dont nous avons parlé ci-dessus.
Du point de vue de l'enseignement, cela nous rappelle que le simple n'est pas donné, qu'il est au contraire l'un des objectifs de l'enseignement, peut-être l'un des objectifs les plus difficiles.
Pour revenir à la notion de groupe, rien ne semble plus facile que d'en donner la définition et d'en montrer quelques propriétés élémentaires, puis, par souci de *concret* (comme on aime à dire !), d'exhiber quelques groupes parmi les contenus enseignés pour en montrer l'intérêt ? En quoi cela permet-il de comprendre la richesse du concept de groupe, en quoi cela permet-il de comprendre cette simplicité dont nous avons parlé ci-dessus ? Notons que la démarche opposée qui consiste à exhiber d'abord quelques *situations concrètes* pour justifier la définition formelle n'est pas plus adéquate. Il est par contre utile de montrer l'intérêt de la structure de groupe lorsqu'elle apparaît dans un contexte spécifique, ainsi le groupe des symétries des polygones ou des polyèdres réguliers, ce qui permet aussi de relier cette structure à la notion d'invariant.
Il ne s'agit pas de répondre une fois pour toutes à cette difficile question de la simplicité, avec le risque de retomber dans les illusions de la réforme des mathématiques modernes (ce que l'on peut appeler l'illusion langagière[55]). Mais on peut penser que le principal apport de l'histoire des mathématiques et de la réflexion épistémologique qui l'accompagne sur la signification de la simplicité dans les sciences est de permettre à *ceux qui enseignent* de prendre en compte dans leur enseignement cette construction de la simplicité et d'amener *ceux*

[54]Ce mode d'emploi accompagnait les premiers fascicules publiés par Bourbaki.
[55]Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique" *Repères-IREM* n°9, octobre 1992, p. 5-12

qui sont enseignés[56] à comprendre le sens de cette simplicité, à comprendre que, si la construction de cette simplicité est difficile, cela vaut la peine de prendre en charge une telle difficulté.

[56]pour reprendre une expression de Francisco Sanchez dans l'heureuse traduction de Andrée Camparot (cf. Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984, p. 167)