Qu'est-ce qu'une ligne droite ?

rudolf bkouche
IREM de Lille
rbkouche@wanadoo.fr

Introduction

Pourquoi un article sur les diverses définitions de la droite ?
D'abord pour rappeler qu'une définition se situe toujours dans un contexte, qu'elle n'est jamais première et qu'elle est autant point d'arrivée que point de départ, même si une fois énoncée elle permet de nouveaux départs.
L'exigence de rigueur nous a appris la nécessité d'avoir des bases sûres pour travailler, mais on oublie trop souvent que la rigueur se construit, qu'elle n'est jamais donnée une fois pour toutes et que ce n'est qu'à la fin d'un travail qu'elle apparaît, occultant souvent le long effort qui l'a permise. C'est l'une des difficultés de l'enseignement des mathématiques que d'amener les élèves à prendre en charge l'exigence de rigueur.
Cela fait alors partie du métier de professeur que d'aller voir comment se construit la rigueur, ce qui renvoie en particulier à deux grandes questions, celle de la définition des objets sur lesquels on travaille, celle de la démonstration[1] qui reste au centre de l'activité mathématique, même si nous pensons que la démonstration ne relève pas des seules mathématiques.
Plutôt que de faire une étude générale de la définition, nous avons préféré partir d'un objet de la géométrie élémentaire pour en montrer les diverses facettes. Il faudrait compléter ce travail par une étude de la façon dont ces diverses définitions interviennent, ou n'interviennent pas, dans le discours démonstratif pour montrer comment les définitions se construisent et se reconstruisent dans l'activité mathématique elle-même ; si elles apparaissent comme un préalable à la mise en forme du discours mathématique, ce préalable se construit en même temps que le discours et ce n'est qu'en fin de parcours que les définitions apparaissent comme un préalable nécessaire[2].
La question est d'autant plus importante lorsqu'il s'agit d'enseignement des mathématiques si l'on considère que celui-ci participe de l'initiation à la rigueur du raisonnement.

Des objets géométriques

Qu'est-ce qu'un objet géométrique ? une réponse classique, s'appuyant sur la philosophie platonicienne, dit qu'un objet géométrique est un objet idéal. Mais une telle affirmation n'explique rien. Un objet idéal apparaît comme un objet mystérieux inventé, on ne sait trop pourquoi, par la secte des mathématiciens, et sur lesquels cette secte s'amuse à "faire des démonstrations", celles-ci restant tout aussi mystérieuses que les objets sur lesquels elles opèrent.
La question est donc moins de donner une définition des objets géométriques que de tenter d'expliciter comment l'on appréhende ces objets, que ce soit comme objets mondains, c'est-à-dire issus du monde extérieur, ou que ce soit comme objets de discours sur lesquels on peut raisonner selon les règles. Ce sont ces objets de discours qui constituent ce que l'on appelle les idéalités mathématiques et c'est sur eux que porte

---

[1]Rudolf Bkouche, "La démonstration : du réalisme au formalisme", in *La Démonstration, Mathématiques et Philosophie* (2003)
[2]Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, volume 1, "La doctrine préalable" (1945)

l'activité mathématique. Se pose alors la question du mode d'accès à ces objets de discours.
Nous proposons de montrer ici, avec l'exemple de la droite, comment se constitue un concept géométrique ou plutôt les différentes formes d'un concept géométrique depuis les premières formulations proches de la connaissance empirique jusqu'aux formulations sophistiquées auxquelles conduit le développement de la géométrie. La question se pose alors de la place de ces diverses formulations dans l'enseignement.

De la ligne droite

Lorsque l'on pose à des étudiants de CAPES la question : *qu'est-ce qu'une droite ?* certains ont l'impression que l'on se moque d'eux, tant la question leur semble facile. Et pourtant ils s'aperçoivent vite que la question est difficile et que l'on ne saurait y répondre en se contentant d'une définition. On peut évidemment répondre : une droite est un espace affine de dimension 1, mais cette réponse suppose que l'on connaisse l'algèbre linéaire, d'autre part que l'on se soit posé la question du rapport entre un espace affine de dimension 1 et un trait dessiné à la règle sur une feuille de papier ou au tableau noir.
Dans *Les Concepts Fondamentaux de la Science* Enriques écrit, à propos du concept de ligne droite :

"Le concept de ligne droite dérive de l'étude de différents ordres de phénomènes :
1° De celle de corps ***solides****, où la droite entre comme* ***axe*** *dont les points restent immobiles pendant la durée d'une rotation (à l'image d'un fil tendu, etc.) ;*
2° De la dynamique du point matériel, ou la droite se présente comme trajectoire d'un point dont le mouvement n'est influencé par aucun des corps qui l'entoure ;
3° De l'optique, et en général, de l'étude des radiations où la droite se présente comme un rayon ou ligne de symétrie des phénomènes, dans n'importe quel milieu, que la comparaison d'expériences déterminées révèle comme homogène."[3]

Comment ces trois ordres de phénomènes peuvent-ils conduire à un même concept, celui de droite ? Enriques insiste alors sur *"la concordance des différentes façons d'envisager la droite comme axe et comme rayon"*, c'est cette concordance *"qui nous permet de subsumer deux catégories différentes de phénomènes sous* ***une même représentation géométrique****"*. On peut alors considérer que le concept géométrique de droite unifie ces divers modes d'appréhension de ce que nous appelons une ligne droite. On peut voir dans cette unification une des premières formes de ce que le physicien Wigner a appelé la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature[4].
Mais quel est le statut de cet objet unifiant divers objets venus du monde ? Pour aborder cette question nous examinerons diverses définitions de la ligne droite qui ont été données tout au long de l'histoire. La diversité de ces définitions que l'on rencontre dans les divers traités de géométrie montre la diversité des références (optique, mécanique et autres), ce qui explique la tentative d'énoncer une définition qui transcende ces références, voire de donner une définition indépendante de toute référence mondaine.
Nous distinguerons alors d'une part les *définitions empiriques*, renvoyant aux phénomènes que le concept de droite se propose de représenter et les *définitions*

---

[3]Federigo Enriques, *Les Concepts Fondamentaux de la Science* (1913), p. 14
[4]E.P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Comm. Pure and Applied Math.* (1960)

proprement mathématiques, ces dernières se divisant en *définitions ontologiques*, c'est-à-dire renvoyant à des objets antérieurs au discours, et en *définitions langagières*.
Nous ajouterons, pour terminer ce paragraphe que la recherche d'une "bonne" définition de la droite joue un rôle important dans le développement des mathématiques, dans la mesure où elle est au cœur de la relation entre le monde sensible et le monde des idées pures censé être le domaine du mathématicien. C'est que l'on peut lire chez Aristote qui écrit :

"La géométrie, en effet, examine la ligne physique, mais pas en tant que physique, alors que l'optique étudie la ligne mathématique, non pas en tant que mathématique, mais en tant que physique."[5]

Cette distinction peut être précisée si l'on revient sur le sens des termes "mathématique" (μαθηματικην) et "physique" (φυσικησ) chez Aristote. Le terme φυσικησ renvoie à la connaissance de la nature, c'est-à-dire aux objets de la connaissance empirique, le terme μαθηματικην renvoie à la connaissance scientifique, celle que nous atteignons par la démonstration. Ainsi Aristote distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique, ici la ligne considérée comme rayon lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif. C'est la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, autrement dit, y compris dans les mathématiques euclidiennes, c'est le langage qui modèle les objets. Il faut alors, pour éviter tout malentendu, distinguer entre la chose qui nous est donnée par la connaissance empirique et l'objet, lequel représente la chose *via* le discours. C'est cette réduction au discours qui constitue la science rationnelle, celle qui se construit *via* le raisonnement comme l'explique Aristote dans les *Seconds Analytiques* :

"connaître scientifiquement c'est savoir par démonstration"[6]

Nous rencontrons ici une ambiguïté qui est au cœur des mathématiques, ambiguïté qui apparaît dans l'ouvrage qui a constitué le modèle de la rigueur mathématique jusqu'au XIXème siècle, les *Eléments* d'Euclide. La définition de la droite dans les *Eléments* qui semble être l'une des premières définitions mathématiques de la droite n'intervient pas en tant que telle dans les démonstrations de l'ouvrage, même si la droite apparaît l'un des objets importants de l'ouvrage.
La définition de la droite se précisera avec les développements du champ géométrique, d'abord avec la géométrie analytique qui réduira la définition de la droite à une équation, puis avec le développement du calcul vectoriel et de l'algèbre linéaire, ce qui posera la question du rapport entre les définitions sophistiquées des mathématiques d'aujourd'hui et les premières définitions, que ce soient les définitions empiriques ou les premières définitions mathématiques telle celle d'Euclide. On peut alors noter que les définitions sophistiquées de l'époque moderne, en même temps qu'elles précisent le concept de droite, mettent en avant son caractère opératoire, rappelant combien les aspects conceptuels et les aspects opératoires sont liés et combien il est difficile, voire impossible de les séparer.

Définitions empiriques

[5]Aristote, *Physique*, Livre II, p. 123
[6]Aristote, *Les Seconds Analytiques*, p. 67

Par définition empirique nous entendons une définition qui renvoie à la connaissance sensible tout en précisant que la forme langagière de la définition marque déjà un dépassement de l'empirisme, une première forme d'abstraction pourrait-on dire. Autant dire qu'il n'existe pas de définition empirique pure, que toute définition est une reconstruction langagière de cette partie du monde que l'on se propose d'appréhender.
Parmi les définitions empiriques, nous noterons les définitions optiques, les définitions comme limites et les définitions mécaniques

- *la définition optique (le regard et la lumière)*

On énonce souvent cette propriété que la lumière se propage en ligne droite, par contre, pour définir une ligne droite on renvoie aux rayons lumineux, ce qui semble être un cercle. En fait il n'y a pas de cercle si l'on remarque que l'idée de ligne droite renvoie au trajet de la lumière, ou plutôt, à la ligne du regard. Que signifie *"aller tout droit"*, ou *"aller droit devant soi"*, sinon suivre la ligne définie par le regard ? C'est ainsi que lorsque l'on va chercher un objet, à moins qu'il y ait un obstacle matériel, on va *"tout droit"* vers cet objet, c'est-à-dire qu'on suit la ligne définie par le regard qui va de l'œil à l'objet.
Les Anciens expliquaient que la lumière va de l'œil aux objets, il s'agit alors moins du trajet lumineux au sens moderne que du regard qui va effectivement de l'œil aux objets. Et l'on sait que pour vérifier que trois points sont alignés, il suffit, se plaçant à l'un des points extrêmes, de regarder les autres points. Si l'on ne voit qu'un seul point, c'est que ces points sont alignés. C'est ainsi que l'on peut comprendre cette phrase du Parménide de Platon qui dit qu'on appelle droit *"ce dont le milieu est en avant des deux extrémités"*[7] comme l'explique Vitrac dans son commentaire de la définition euclidienne de la droite[8].
Dans son *Essai Critique sur les Prinicpes Fondamentaux de la Géométrie Elémentaire*, Hoüel précise ce point de vue optique en écrivant, à propos d'un observateur qui se propose de marcher vers un point qu'il aperçoit :

*"L'**instinct** le porte à marcher dans la **direction** suivant laquelle ce point lui envoie ses impressions lumineuses."*[9]

et il ajoute :

*"La preuve que ce procédé est **instinctif**, c'est qu'il est suivi par tous les animaux."*

Hoüel distingue alors l'instinct, lequel est naturel, au sens qu'il est suivi par tous les animaux, de l'expérience, laquelle fait appel à la réflexion. Il y a ainsi un caractère instinctif de la droite qui précède toute expérience. On peut alors considérer que le caractère empirique de la notion de droite marque le passage de l'instinctif à l'expérience.

- *la droite comme limite*

Les notions de limite et de frontière[10] sont introduites dans les *Eléments* d'Euclide pas les définitions suivantes :

[7]Platon, *Parménide*, p. 227
[8]Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 154
[9]Jules Hoüel, *Essai Critique sur les Prinicpes Fondamentaux de la Géométrie*, p. 63

13- Une frontière est ce qui est limite de quelque chose
14- Une figure est ce qui est contenu par quelques frontières
…
19- Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ……[11]

Dans un ouvrage posthume intitulé *the common sense of the exact sciences*, Clifford explique le caractère empirique de la notion de limite (boundary) : surface, ligne ou point, précisant :

"The important thing to notice is that we are not here talking of ideas or imaginary conceptions, but only making common-sense observations about matters of every-day experience."[12]

La notion de limite ne suffit pas cependant pour distinguer les surfaces planes parmi les surfaces et les lignes droites parmi les lignes. Clifford explique alors :

"The plane surface may be defined as one which is of the same shape all over and on both sides."[13]

et il précise, s'appuyant sur le mouvement et la notion de congruence dont il a déjà parlé :

"This property is sometimes more technically expressed by saying that a plane is a surface which divides space into ***congruent regions****."*

Clifford définit d'une façon analogue la ligne droite :

"It is a division between two parts of a plane, which two parts are, so far as the dividing line is concerned, of the same shape ; or we may say what comes to the same effect, that a straight line is a line of the same shape all along and on both sides."[14]

On retrouve encore la définition comme limite dans le traité de Rouché et Comberousse qui écrivent au début de leur traité :

"Le ***volume*** *d'un* ***corps*** *matériel est l'étendue d'un lieu que ce corps occupe dans l'espace. Ce lieu est essentiellement limité ; sa limite, qui le sépare de l'espace environnant, prend le nom de* ***surface****. Les diverses faces d'un corps sont autant de surfaces dont les limites ou les intersections mutuelles s'appellent* ***lignes****. Enfin on donne le nom de* ***points*** *aux limites ou extrémités d'une ligne, aux intersections mutuelles des lignes."*[15]

et ajoutent :

---

[10]Sur la distinction entre les termes frontière (οροσ) et limite (περασ) nous renvoyons au commentaire de Bernard Vitrac in Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 161
[11]*ibid*. p. 161-164
[12]William Kingdom Clifford, *the common sense of the exact sciences*, p. 45-46
[13]*ibid*. p. 61
[14]*ibid*. p. 61-62
[15]Eugène Rouché et Charles de Comberousse, *Traité de Géométrie*, première partie : Géométrie Plane, p. 1

"Ces idées de surface, de ligne et de point, étant une fois acquises par la considération des corps, la surface, la ligne et le point peuvent ensuite être conçus indépendamment du corps, des surfaces et des lignes dont ils constituent les limites. C'est ainsi qu'on arrive à regarder inversement une ligne comme le lieu des positions successives d'un point mobile, et une surface comme le lieu des positions successives d'une ligne qui se meut suivant une loi déterminée."

Ainsi le lien entre la définition en tant que limite et la définition en tant que trajectoire est accepté sans discussion.
La ligne droite est alors "définie" comme *"la plus simple de toutes les lignes"* dont *"la notion est familière à tout le monde, et dont un fil tendu offre l'image"*.

- *les définitions imagées*

Plutôt que d'énoncer une définition illusoire, de nombreux ouvrages d'enseignement préfèrent renvoyer à des images significatives, celle du rayon lumineux et celle du fil tendu étant parmi les plus fréquentes.
Quant à Méray, qui veut développer un enseignement de la géométrie qui s'appuie sur *"la vision des faits de l'espace"*[16], il écrit

"L'idée de ligne nous vient des corps très allongés, mais extrêmement déliés dans tous les autres sens, comme un fil très fin, la trace lumineuse apparente d'un point brillant animé d'une très grande vitesse, celle laissée sur un corps quelconque par un morceau de craie, un petit pinceau chargé de couleur, etc"[17]

- *les définitions mécaniques*

la droite comme trajectoire

Dans ses *Leçons de Géométrie élémentaire* Hadamard présente, plus qu'il ne définit, la notion de ligne de la façon suivante :

"Elle peut être considérée comme engendrée par un point qui se déplace sur elle"[18]

et il donne l'exemple d'une ligne tracée sur une feuille de papier avec la pointe d'un crayon.
La ligne droite est alors définie comme la plus simple des lignes *"dont le fil tendu nous donne l'image"*[19].
En fait si la définition d'une ligne comme trajectoire est aisée, celle d'une ligne droite est plus complexe et s'appuie sur le principe d'inertie que Descartes formulait ainsi dans ses *Principes de Philosophie* :

"Que tout corps qui se meut tend à continuer son mouvement en ligne droite"[20]

[16]Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie* (1903), p. vii
[17]Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie* (1874), p. 2
[18]Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire* (géométrie plane), p. 1
[19]*ibid*. p. 3
[20]René Descartes, "Principes de la Philosophie" in *Œuvres complètes*, tome IX, p. 85

et que Newton précisera de la façon suivante :

"Every body continues in its state or rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it"[21]

Si on peut considérer la définition d'une ligne comme trajectoire comme relevant de la connaissance empirique, le recours au principe d'inertie pour définir une ligne droite s'inscrit dans un cadre théorique que l'on peut considérer comme un principe de simplicité, ce qui pose la question du simple, question que nous ne pouvons aborder dans le cadre de ce texte[22]. Pour montrer la complexité de la notion de "simple", nous rappellerons que, pour les géomètres grecs, c'est le mouvement circulaire qui est le mouvement le plus simple.

l'approche instrumentale

L'approche instrumentale est une forme particulière de la définition comme trajectoire au sens où la droite dessinée est la trace d'un point guidé par l'instrument de dessin. Pour aborder cette approche instrumentale, nous rappelons les trois premiers postulats énoncés par Euclide, déjà cités

"Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point."

"Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée."

"Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle."

Ces postulats affirment la possibilité de constructions même lorsque celles-ci sont matériellement impossibles. En cela ces postulats assurent le lien entre constructions instrumentales et définitions conceptuelles, ce qu'Abel Rey résume de la façon suivante :

"La règle et le compas (ne sont) *que le symbole des idées claires et distinctes de la droite et du cercle"*[23]

Des définitions dites mathématiques

Nous commencerons par la remarque suivante qui prolonge celles de Féderigo Enriques citées ci-dessus. Les diverses définitions énoncées ci-dessus conduisent à définir un objet unique rendant compte à la fois des phénomènes optiques et des phénomènes mécaniques cités. On peut, il est vrai, les relier en remarquant que pour vérifier la rectitude d'une droite matérielle on peut recourir au procédé visuel attribué à Platon. Mais il y a plus, comme le remarque Enriques, la rectitude du rayon lumineux marque une propriété de symétrie que l'on retrouve, à l'époque classique, avec le principe d'inertie. Propriété que l'on retrouve encore dans la notion de verticale : un objet lâché tombe tout droit vers le sol ce qui indique la direction de la verticale, de même le fil à

---

[21] Isaac Newton, *Principia*, vol I, p. 13

[22] Rudolf Bkouche, "Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques", *for the learning of mathematics* (1997)

[23] Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité*, volume 5, "L'Apogée de la Science Technique Grecque : L'Essor de la Mathématique", p.124

plomb indique la direction de la verticale ; on peut alors remarquer que le fil à plomb, laissé à lui-même, est tendu ce qui renvoie à la définition de la droite comme fil tendu. Ainsi la connaissance empirique nous conduit à mettre en relation[24] divers phénomènes
Cela dit, nous distinguerons deux types de définitions mathématiques, d'une part *les définitions ontologiques* qui s'appuie sur l'existence préalable des objets, la définition apparaissant essentiellement comme une description, relevant ainsi de ce que les philosophes de Port-Royal appelaient des définitions de choses[25], d'autre part *les définitions langagières.*

définitions ontologiques

Nous rappellerons d'abord la définition euclidienne de la ligne droite :

"Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles."[26]

Remarquons d'abord que cette définition n'apprend rien à qui ignore ce qu'est une ligne droite et qu'elle n'intervient pas en tant que telle dans les démonstrations, ce qui pose la question de la signification de cette définition. On pourrait d'ailleurs énoncer cette définition pour le cercle si on interprète cette définition comme exprimant que la droite (ou le cercle) est une courbe qui peut glisser sur elle-même sans se déformer. On peut en outre remarquer que la droite et le cercle sont les deux seules lignes du plan qui possèdent cette propriété[27].

D'autres définitions suivront qui relèvent d'une définition de chose, ainsi celle proposée par Archimède et reprise par Legendre qui définit la droite comme *"le plus court chemin d'un point à un autre"*, définition qui, pour être précisée, demande de définir l'expression *"le plus court chemin"*.

Devant les difficultés de définir la droite, Arnauld explique dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* :

"Nous n'avons point défini la ligne droite, parce que l'idée en est très claire d'elle-même, & que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot"[28]

Dans leur traité déjà cité, Rouché et Comberousse expliquent, sans la définir, que la ligne droite, *"la plus simple de toutes"*, est une notion familière et renvoient au fil tendu. Cette notion de simplicité est souvent reprise dans les ouvrages de géométrie et nous citerons Leibniz qui, dans un texte, non publié de son vivant, sur la caractéristique géométrique, énonce cette définition plus métaphysique que scientifique :

---

[24]Notons que cette mise en relation montre que l'on a quitté le domaine purement empirique ; si la connaissance empirique apparaît ici comme un point de départ, c'est parce qu'on la dépasse que l'on crée une nouvelle forme de connaissance que l'on peut appeler connaissance abstraite ou connaissance théorique.
[25]Arnaud et Nicole, *La Logique de Port-Royal*, p. 120-124
[26]Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 154
[27]Dans l'espace il existe une autre courbe possédant la propriété de glisser sur elle-même, l'hélice, ce qui montre la complexité de la définition euclidienne. Nous renvoyons au commentaire de Bernard Vitrac in Euclide, *Les Eléments*, volume I, p. 154-156
[28]Antoine Arnauld, *Nouveaux Eléments de Géométrie,* p. 82

"La droite est la ligne déterminée par deux points"[29]

précisant que la droite est la seule ligne déterminée dès que l'on connaît deux de ses points ; ainsi la droite peut être considérée comme *la plus simple* parmi les lignes passant par deux points, ce que Leibniz explique dans un autre texte sous la forme suivante:

"Ce qui est déterminé par la donnée de deux points est l'extensum le plus simple passant par eux, que nous appellerons droite."[30]

Le caractère redondant des textes de Leibniz laisse entendre que Leibniz cherchait une "bonne" définition de la droite pour développer le calcul géométrique qu'il espérait.
La question d'une "bonne" définition de la droite est récurrente dans l'histoire des mathématiques ; ainsi D'Alembert, après avoir évoqué la difficulté de la théorie des parallèles, écrit:

"On parviendrait plus facilement à la trouver (la démonstration du postulat des parallèles)*, si on avait une bonne définition de la ligne droite…"*[31]

définitions langagières

La difficulté d'énoncer une définition consistante de la droite implique que l'on ne peut échapper dans l'enseignement à une approche empirique, laquelle permet un premier développement de la géométrie élémentaire dès que l'on a énoncé quelques propriétés de la droite.
C'est seulement dans un second temps que l'on peut espérer des définitions purement langagières. Ici encore nous citerons deux types de définitions, les définitions analytiques et les définitions "à la Hilbert".
Les définitions analytiques ne sont autres que les définitions de nom des philosophes de Port-Royal déjà cités. Exemple d'une telle définition, la définition du cercle dans les *Eléments* d'Euclide :

"Un cercle est une figure plane contenue dans une ligne unique (celle qui est appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles."[32]

Ici il suffit de connaître la signification des mots constituant la phrase pour savoir de quelle figure il s'agit, le rôle de la définition consistant à donner un nom à la figure ainsi définie.
Les définitions de nom ont cependant leur limite : une définition de nom s'exprime avec des mots, lesquels doivent eux-mêmes être définis. On retrouve ici le *cercle du dictionnaire* que l'on peut formuler de la façon suivante : un mot étant défini, on lit les définitions des divers mots utilisés dans la définition du premier mot et on recommence ; on finit par rencontrer l'un des mots dont on cherche la définition, c'est cela qui constitue le cercle du dictionnaire. Ce qui rend incontournable l'usage de définitions de

[29]G. W. Leibniz, *la caractéristique géométrique*, p. 255
[30]*ibid*. p. 279
[31]Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 317
[32]Euclide, *Eléments*, volume 1, p. 162

chose, aussi problématiques soient ces définitions. On comprend alors la position d'Arnauld refusant d'énoncer une définition de la droite. Mais ce refus n'élimine pas le problème.
Le formalisme hilbertien proposera une solution à ce problème, l'introduction de termes primitifs non définis, c'est-à-dire ne renvoyant à aucune signification extérieure, ces termes primitifs étant reliés par les axiomes, eux-mêmes ne renvoyant à aucune signification extérieure et apparaissant comme de simples règles d'usage des termes primitifs. Il ne s'agit pas de définition proprement dite, qu'elle soit de chose ou de nom, ou plutôt, s'il y a définition, celle-ci ne prend sens que *via* le développement du discours. Ainsi les termes primitifs : "points", "droites", "plans", ne sont pas définis, mais leur signification interne se construit d'abord avec les axiomes qui en fixe les règles d'usage, ensuite avec le développement du discours démonstratif. Une fois le cadre mis en place, on peut énoncer des définitions analytiques introduisant de nouveaux objets, mais ces objets ne prennent sens que dans ce cadre, même si, pour des raisons extérieures au discours, ces objets renvoient à des significations plus générales. Cela nous rappelle que si l'axiomatique hilbertienne constitue un cadre assurant la rigueur du discours démonstratif et les relations logiques entre les diverses propositions, elle a un rôle essentiellement méthodologique.

Il faudrait, pour être complet, rappeler les définitions équationnelles de la géométrie analytique et les définitions issues de l'algèbre linéaire.

définitions équationnelles

Les définitions équationnelles se relient à la géométrie analytique. Pour simplifier l'exposé nous nous bornerons à la géométrie plane. Un point du plan peut être défini, dans un repère donné (ici un repère dit cartésien), comme un couple de nombres, ses coordonnées, une courbe est alors définie comme une relation entre les coordonnées d'un point de la courbe ce qui se traduit pas une équation que l'on peut écrire sous la forme :

$$f(x,y) = 0$$

Une droite est alors représentée par une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

La géométrie analytique permet alors de réduire les problèmes de géométrie à des problèmes de résolution d'équations, mais, en retour, on obtient une représentation géométrique des systèmes d'équations. Ce double mouvement apparaît dès l'invention de la méthode des coordonnées comme on peut le voir chez Descartes et chez Fermat.

définitions issues de l'algèbre linéaire

Nous ne pouvons développer ici la façon dont la géométrie élémentaire s'est moulée dans l'algèbre linéaire jusqu'à en devenir un chapitre particulier, l'étude des espaces affines euclidiens de dimension 2 (le plan) ou 3 (l'espace) sur le corps des réels. Dans ce cadre une droite peut être définie comme un sous-espace affine de dimension 1 du plan ou de l'espace. Comme nous l'avons dit pour la géométrie analytique, on peut développer l'étude des espaces affines euclidiens dans un cadre purement algébrique ; il faut cependant rappeler d'une part que l'algèbre linéaire est devenue une méthode puissante pour étudier la géométrie élémentaire comme le montrent par exemple les ouvrages de Jean Dieudonné[33], Marcel Berger[34] et Michelle Audin[35], d'autre part que cette représentation "algèbre linéaire" de la géométrie élémentaire conduit en retour à ce que l'on peut appeler la géométrisation de l'algèbre linéaire, ce que Bourbaki explique de la façon suivante :

"Dépassée en tant que science autonome et vivante, la géométrie classique s'est ainsi transfigurée en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparables."[36]

Mais il y a ici plus qu'un langage, une façon de penser où la géométrie ouvre vers de nouvelles formes d'intuition en s'appuyant sur le lien entre la géométrie élémentaire et les espaces affines de dimension 2 ou 3 raconté ci-dessus. La géométrisation de l'algèbre linéaire apparaît alors comme un nouveau mode de pensée que l'on retrouve dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici. Mais il faut ici remarquer que la force intuitive de ce nouveau mode de pensée tient au lien avec les définitions empiriques de la géométrie élémentaire. Ainsi se constitue une autre forme de liaison entre les diverses définitions de la droite que l'on peut appeler avec Jean Dieudonné des *"transferts d'intuition"*[37] et qui constitue ce que Quine a appelé un *"gonflement de l'ontologie"*[38].

Retour sur le concept de droite

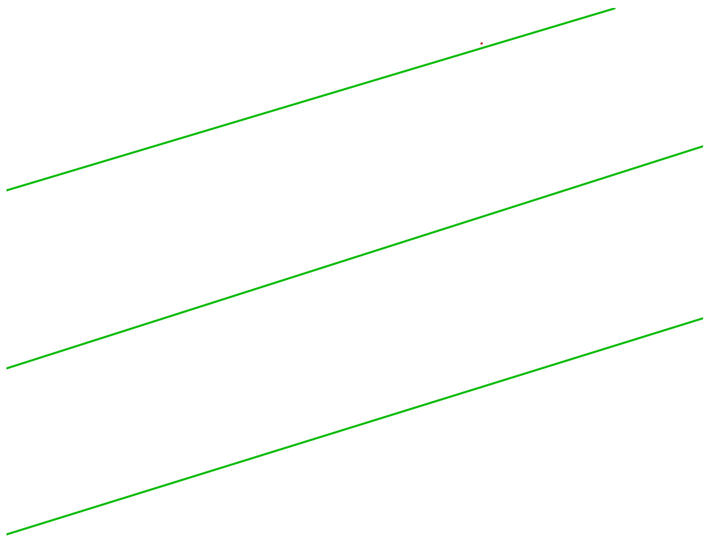
La diversité des définitions données ci-dessus montre à la fois la multiplicité de la notion de droite et en même temps la profonde unité qui relie ces diverses définitions. Mais en quoi consiste cette unité ? Il suffit de demander à des étudiants une lecture comparée de ces deux grandes somme de la géométrie du XX^{e} siècle que sont les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Jacques Hadamard et la *Géométrie* de Berger pour comprendre combien la question est difficile. Il est vrai que l'on y trouve les mêmes mots avec parfois les mêmes figures, mais les définitions sont différentes et les démonstrations semblent avoir peu de points communs.
Une vision moderniste conduirait à dire que le "bon" concept est le dernier[39], mais une telle position ne résout rien, laissant en suspens les deux questions suivantes :
- Il est possible que l'on soit amené à forger un nouveau concept de droite englobant les concepts d'aujourd'hui. Quel sera alors le statut du dernier concept d'aujourd'hui ? sera-t-il réduit à n'être qu'une simple étape préparant le concept suivant considéré comme le bon concept.
- Nous avons dit par ailleurs qu'une nouvelle formulation ne rend pas caduque une ancienne formulation. Ainsi la définition vectorielle ne détruit pas les définitions plus anciennes. Et point n'est besoin de passer par la définition vectorielle pour résoudre les problèmes de géométrie élémentaire. On sait de plus que la méconnaissance de la géométrie élémentaire ne permet pas de comprendre comment des théories plus

[33] Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (1964)
[34] Marcel Berger, *Géométrie* (1977)
[35] Michelle Audin, *Géométrie* (1999)
[36] Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques* (1974) p. 174
[37] Jean Dieudonné, "The universal domination of geometry", (1980)
[38] Quine, "Les deux dogmes de l'empirisme" (1980), p. 111
[39] Ce fut la position de certains promoteurs de la réforme des mathématiques modernes, mais ce fut aussi l'une des raisons de son échec.

sophistiquées, et par conséquent considérées comme plus performantes, permettent de résoudre des problèmes élémentaires. Ce qui nous ramène à une question posée au début de cet article : quel rapport entre un espace affine de dimension 1 et un trait tracé à la règle sur une feuille de papier ou sur tableau ?
On voit ainsi s'entremêler les diverses définitions d'un concept. La question est alors moins de faire le tri entre les anciennes formulations qui seraient devenus obsolètes et les nouvelles formulations que d'expliciter le domaine de validité de chacune d'elles. La question est alors moins de définir la bonne approche que de situer, en fonction du contexte, l'approche la plus adéquate par rapport aux questions que l'on se pose, c'est en partie cela qui doit guider l'enseignement.

Question pour terminer

On considère les trois segments de droite suivants



Combien y a-t-il de points sur le premier segment, sur le second, sur le troisième ?
Rappelons que dans certains ouvrages du début du XX^{e} siècle, on parlait de l'ensemble des points d'une droite distinguant ainsi l'objet "droite" de l'ensemble des points qui lui appartiennent.

Bibliographie

Ouvrages

Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), "Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française", Fayard, Paris 1986
Aristote, *Seconds Analytiques, Organon IV,* introduction, traduction, notes, biographie et index par Pierre Pellegrin, GF Flammarion, Paris 2005
Aristote, *Physique*, traduction et présentation par Pierre Pellegrin, GF Flammarion, Paris 2000
Antoine Arnauld, *Nouveaux Eléments de Géométrie,* Paris 1667

Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser* (1662, cinquième édition 1683), Introduction de Louis Marin, "Champs", Flammarion, Paris 1987
Michelle Audin, *Géométrie*, "De la licence à l'agrégation", Belin, Paris 1999
Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977
Nicolas Bourbaki, *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, nouvelle édition, Hermann, Paris 1974
William Kingdon Clifford, *the common sense of the exact sciences*, edited, and with a preface, by Karl Pearson, newly edited, with an introduction, by James R. Newman, preface by Bertrand Russell, Dover Publication, New York 1955
René Descartes, *Œuvres complètes*, édités par Charles Adam et Paul Tannery, 11 volumes, réédition Vrin, Paris 1996
Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, "Enseignement des sciences", Hermann, Paris 1964
Federigo Enriques, *Les Concepts Fondamentaux de la Science*, traduit par Louis Rougier, "Bibliothèque de Philosophie scientifique", Flammarion, Paris 1913
Euclide, *Les Eléments, volume 1, Livres I à IV*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, "Bibliothèque d'Histoire des Sciences", PUF, Paris 1990
Pierre de Fermat, *Œuvres de Fermat*, publiée sous la direction de Paul Tannery et Charles Henry, traduction de Paul Tannery, Gauthier-Villars
Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, volume 1, "La doctrine préalable", Editions du Griffon, Neuchâtel 1945
Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire I: Géométrie plane*, Armand Colin, Paris 1947
David Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899), édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris 1971
David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translation by Nemenyi, Chelsea, New York 1952
Jules Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867
entaux de la Géométrie (1868)
G.W. Leibniz, *La caractéristique géométrique* (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit annoté et post-facé par Marc Parmentier, Collection "Mathesis", Vrin Paris 1995
Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Jobard, Dijon, 1903
Isaac Newton, *Principia*,
Platon, *Théétète, Parménide*, traductions et notes par Emile Chambry, Garnier-Flammarion, Paris 1967
Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), Flammarion, Paris 1968,
Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité, volume 5 : L'Apogée de la Science Technique Grecque* (L'Essor de la Mathématique Grecque), Collection "L'Evolution de l'Humanité", Albin Michel, Paris 1948Eugène Rouché et Charles de Comberousse, *Traité de géométrie*, première partie, Géométrie Plane, nouvelle édition, Gauthier-Villars, Paris 1929

Articles

Rudolf Bkouche, "Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques", *for the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997

[1]Rudolf Bkouche, "La démonstration : du réalisme au formalisme", in *La Démonstration, Mathématiques et Philosophie*, coordonnée par Michèle Villetard-Tainmont, IREM de Lille, avril 2003
Jean Dieudonné, "The universal domination of geometry", *International Congress of Mathematical Education IV*, Berkeley 1980
Quine, "Les deux dogmes de l'empirisme" in Pierre Jacob, *De Vienne à Cambridge*, Gallimard, Paris 1980
E.P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960, p. 1-14