Proportionnalité et règle de trois

Rudolf Bkouche

Introduction

La notion de proportionnalité peut être présentée sous la forme suivante : *si j'achète trois baguettes de pain je paierai trois fois le prix d'une baguette*. La question se complique lorsque l'on pose la question sous la forme suivante : *si je connais le prix de cinq baguettes de pain, comment puis-je connaître le prix de sept baguettes de pain*. La réponse la plus simple à cette question consiste à réduire à l'unité, de façon précise : *si je connais le prix de cinq baguettes de pain, le prix d'une baguette est cinq fois moindre et le prix de sept baguettes est sept fois plus que le prix d'une baguette*.

C'est ce raisonnement élémentaire qui définit ce que l'on appelle la *règle de trois*.

Sur le plan du calcul, la règle de trois ne suppose connues que les opérations de division et de multiplication. Elle ne présuppose pas la notion de rapport, et elle peut être considérée, dans l'enseignement élémentaire, comme une introduction à la proportionnalité.

Le concept de proportionnalité, quant à lui, suppose la notion de rapport, une proportion étant définie comme une égalité de rapport[1] ; une correspondance proportionnelle entre deux types de grandeur **A** et **B** est alors une correspondance qui associe à toute valeur a de type **A** une valeur b de type **B** telle que si a et a' désignent deux grandeurs du type de grandeur **A**, b et b' désignent les grandeurs correspondantes du type de grandeur **B**, alors le rapport de a à a' est égal au rapport de b à b', ce que l'on écrit aujourd'hui sous la forme

$$a/a' = b/b'$$

On peut alors remarquer que la règle de trois est une opération, au sens où l'on parle des quatre opérations de l'arithmétique, c'est-à-dire un « faire », alors que la proportionnalité est un concept. Il ne s'agit pas ici d'une distinction « pratique-théorique » au sens où on l'entend habituellement ; il s'agit de préciser un « faire » qui correspond à un problème, ce « faire » s'appuyant sur un raisonnement qui lui-même s'élabore dans le « faire », autrement dit raisonnement et pratique sont inséparables et c'est seulement pour les besoins de l'analyse que l'on est amené à les distinguer. L'acquisition de la pratique de la règle de trois apparaît ainsi sous un double aspect : son efficacité technique liée au calcul, son caractère théorique lié à la notion de proportionnalité. C'est cela qui lui donne sa place dans l'enseignement élémentaire.

La règle de trois qui était, avec les quatre opérations, l'un des piliers de l'enseignement du calcul a disparu de l'enseignement avec la réforme dite des *mathématiques modernes*. Cette disparition avait une certaine cohérence si l'on considère que la réforme, au nom du respect de la construction logique des mathématiques, remettait en cause l'idée même d'une progression dans l'apprentissage[2]. C'est ainsi que les quatre opérations de l'arithmétique perdaient leur caractère de « faire » au sens rappelé ci-dessus pour n'être plus que des lois de composition. On pourrait dire la même chose pour la règle de trois, laquelle disparaissait derrière le concept de proportionnalité lui-même réduit à sa forme moderne de linéarité. La difficulté d'appréhen-

[1] Notons qu'au livre V des *Eléments* d'Euclide, la notion de rapport n'est pas définie de façon précise et que c'est la notion de proportion qui permet de l'appréhender.

[2] Cette mise au rancart de la notion de progression a conduit à mettre en place les deux ingrédients de la didactique, le contrat didactique d'une part et la transposition didactique d'autre part. Les contenus mathématiques perdaient ainsi leur place centrale au nom d'une conception purement sociologique de l'enseignement. Il faut y voir l'une des sources de l'idéologie de la centralité de l'élève.

sion de ces derniers concepts conduisait à l'énoncé de quelques recettes comme les produits en croix ou les tableaux de proportionnalités donnés *a priori*. Ainsi le « faire » de l'activité mathématique, ici l'activité de calcul, disparaissait derrière un « faire » des élèves qui ne pouvait être que la simple reproduction de règles énoncés *a priori* au nom d'une modernité inaccessible aux élèves. Avec la fin de la réforme des mathématiques modernes, la cohérence logico-mathématique de la réforme disparaissait, laissant la place au seul point de vue du « faire » des élèves, ce que nous avons appelé ailleurs l'*activisme pédagogique*[3]. Un tel activisme pédagogique qui accompagne l'idéologie de la centralité de l'élève, conduit à mettre l'accent moins sur les difficultés de ce qui est enseigné que sur ce que l'on appelle « les difficultés des élèves » ; il ne reste alors qu'à transformer les contenus de façon à minimiser les difficultés des élèves, quitte à vider les contenus de toute signification.

Ce texte propose de redonner sa place à la règle de trois dans l'enseignement des mathématiques, ce qui demande de replacer la règle de trois dans son contexte mathématique.

C'est la raison pour laquelle nous développons quelques éléments de théorie des proportions, proportions numériques et proportions de grandeurs.

Il s'agit moins ici de dire ce qui doit être enseigné à l'école élémentaire et comment l'enseigner[4] que d'expliciter, pour les maîtres, le contexte mathématique dans lequel s'inscrit une notion ou un calcul, en insistant sur le fait que c'est dans ce contexte que se définit une progression d'enseignement.

La règle de trois

réduction à l'unité

premier exemple

Cinq baguettes de pain coûtent 4,5 euros ; combien coûtent sept baguettes de pain ?

Le raisonnement est le suivant : si cinq baguettes coûtent 4,5 euros, alors une baguette coûte cinq fois moins, soit 4,5 euros divisé par 5, c'est-à-dire 0,9 euros, et sept baguettes coûtent sept fois plus, soit sept fois 0,9 euros, c'est-à-dire 6,3 euros.

second exemple

Cinq baguettes de pain coûtent 4,5 euros ; combien de baguettes peut-on acheter avec 20 euros ?

On peut raisonner de la façon suivante : si cinq baguettes coûtent 4,5 euros, alors une baguette coûte cinq fois moins, soit 4,5 euros divisé par 5, c'est-à-dire 0,9 euros ; avec 20 euros on peut donc acheter 20 divisé par 0,9, soit 22 baguettes et il reste 0,2 euros.

troisième exemple

En deux heures, une voiture parcourt 210 kilomètres, quelle distance parcourra-t-elle en sept heures ?

---

[3]Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique" *Repères-IREM* n°9, octobre 1992, p. 5-12
[4]Nous renvoyons à l'article de Marc Le Bris dans ce volume.

On raisonne de la façon suivante : si une voiture parcours 210 kilomètres en deux heures, en une heure elle parcourra deux fois moins, soit 210 kilomètres divisé par 2, c'est-à-dire 105 kilomètres, et par conséquent en sept heures elle parcourra 7×105 kilomètres, soit 735 kilomètres.

quatrième exemple

En deux heures, une voiture parcourt 210 kilomètres, combien de temps lui faut-il pour parcourir 630 kilomètres ?

On peut raisonner de la façon suivante : si une voiture parcourt 210 kilomètres en deux heures, en une heure elle parcourra deux fois moins, soit 210 kilomètres divisé par 2, c'est-à-dire 105 kilomètres, et par conséquent pour parcourir 630 kilomètres il lui faudra 630/105 soit 6 heures.

remarque sur les deux derniers exemples

Nous n'avons pas utilisé la notion de vitesse. La réduction à l'unité donne la distance parcourue en l'unité de temps, ce qui peut conduire à définir la vitesse comme la distance parcourue dans l'unité de temps. C'est alors une simple division qui donne la vitesse ; il n'est pas question de définir la vitesse comme le quotient d'une distance par un temps[5].

règle de trois inverse

premier exemple[6]

Quatre ouvriers ont mis 7 jours pour faire un certain ouvrage, combien de jours auraient mis sept ouvriers ?

Si 4 ouvriers accomplissent l'ouvrage en 7 jours, un ouvrier accomplit le même travail en quatre fois plus de temps soit 4×7 jours, soit 28 jours et par conséquent 7 ouvriers en 28/7 jours soit 4 jours.

deuxième exemple[7]

On peut emplir avec un fût 275 bouteilles de 0,90 litres. Combien, avec le même fût, emplirait-on de bouteilles de 0,75 litres ?

Le fût contient 275×0,90 litres, soit 247,5 litres, et par conséquent on peut remplir 247,5/0,75 bouteilles de 0,75 litres, soit 330 bouteilles.

règle de trois composée

premier exemple[8]

---

[5]Dans son *Traité de Dynamique* (1763) p. 16, note, D'Alembert explique que l'on ne peut diviser un espace par un temps mais que cette division prend sens lorsque l'espace et le temps sont mesurés.
[6]A. Lemoine, *Arithmétique*, p. 183
[7]M. Delfaud et A. Millet, *Arithmétique*, p. 141
[8]A. Lemoine, *Arithmétique*, p. 173

Dix chevaux ont consommé, en 12 jours, 200 kilogrammes de foin. Combien trente chevaux consommeront-ils de foin en 24 jours ?

Si 10 chevaux consomment en 12 jours 200 kilogrammes de foin, trente chevaux consommeront dans la même période trois fois plus, soit 600 kilogrammes de foin et par conséquent en 24 jours deux fois plus soit 1200 kilogrammes.

deuxième exemple[9]

Six personnes ont consommé, en 73 jours, 320 kilogrammes de pain. Combien dix personnes, dans les mêmes conditions, consommeraient-elles de pain en une année ?

Si six personnes consomment en 73 jours 320 kilogrammes de pain, en une année, c'est-à-dire 5 fois 73 jours, ces six personnes consomment 5 fois plus, soit 1600 kilogrammes. Une personne consomme en une année 6 fois moins soit 1600/6 kilogrammes et par conséquent dix personnes consomment 10 fois plus, soit 16000/6 = 2666,66 kilogrammes.

troisième exemple[10]

Un prisme de fer à base carré ayant 12 centimètres de hauteur pèse 630 grammes. Combien pèserait un prisme de cuivre de même base et de 15 centimètres de hauteur ? On rappelle que la densité du fer vaut 7,7 et que la densité du cuivre vaut 8,8.

On peut raisonner de la façon suivante.
Le volume du prisme de fer vaut 630/7,7 grammes, et par conséquent un prisme de cuivre de même base et de même hauteur pèse $(630/7,7)\times 8,8$ grammes soit 720 grammes. Pour calculer le poids du prisme de cuivre de hauteur 15 cm, on remarque qu'un prisme de cuivre de 1 centimètre de hauteur pèse 720/12 grammes, soit 60 grammes et par conséquent un prisme de 15 centimètres de hauteur pèse 15×60grammes, soit 900 grammes.
Notons que le raisonnement ci-dessus n'utilise pas la proportionnalité en tant que telle, mais s'appuie sur la réduction à l'unité, y compris dans la relation entre poids, volume et densité, celle-ci étant définie comme la masse de l'unité de volume.

Les divers ouvrages d'enseignement énoncent des règles pour la règle de trois simple, inverse ou composée. Nous n'avons pas donné ces règles, insistant plutôt sur le raisonnement. Les règles se simplifient avec la notion de proportionnalité, mais nous considérons que la notion de proportionnalité est plus difficile que la règle de trois et que l'enseignement de la proportionnalité doit être précédé par celui de la règle de trois. Il importe que les élèves prennent conscience que la proportionnalité permet de mieux comprendre l'usage de la règle de trois, en particulier de la règle de trois composée, mais c'est justement parce que l'on a commencé par la règle de trois que l'on comprend la signification et la richesse de la notion de proportionnalité.

Proportionnalité numérique

rapports de nombres

[9] *ibid*. p. 181
[10] A. Marijon & A. Péquignot, *Arithmétique*, p. 257

Soient deux nombres[11] a et b, on appelle rapport de a à b et on note a/b le quotient de a par b. Ainsi le rapport de deux nombres est lié à l'opération de division.
On peut alors montrer la proposition suivante :

Soient a, b, c, d, quatre nombres, les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $a/b = c/d$
b) $a/c = b/d$
c) $ad = bc$

On dit que quatre nombres a, b, c, d, pris dans cet ordre, forment une *proportion* s'ils vérifient l'une des assertions de la proposition précédente.

proportions numériques

Etant donné trois nombres a, b, c, il existe un nombre d et un seul tel que la suite de nombres a, b, c, d, forme une proportion. Le nombre d est appelé la *quatrième proportionnelle* de la suite a, b, c. On a la relation

$$d = bc/a$$

Etant donné deux nombres positifs a et b, il existe un nombre positif x et un seul tel que la suite de nombres a, x, x, b forme une proportion. Le nombre x est appelé la moyenne proportionnelle des nombres a et b. On a la relation

$$x^2 = ab$$

Nous dirons que deux suites de nombres $(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ et $(b_1,b_2,\ldots,b_p)$ sont proportionnelles si pour tout couple (i,j) les rapports a_i/a_j et b_i/b_j sont égaux. Il s'ensuit que les suites $(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ et $(b_1,b_2,\ldots,b_p)$ sont proportionnelles si et seulement si on a les égalités

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_p}{b_p}$$

Le nombre a_1/b_1 s'appelle le *coefficient de proportionnalité*.
Nous dirons que deux suites de nombres $(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ et $(b_1,b_2,\ldots,b_p)$ sont inversement proportionnelles si, pour tout couple d'entiers (i,j) les rapports a_i/a_j et b_j/b_i sont égaux. Il s'ensuit que les suites $(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ et $(b_1,b_2,\ldots,b_p)$ sont inversement proportionnelles si et seulement si on a les égalités

$$a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots = a_nb_n$$

Grandeurs additives

On appelle *grandeur* ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution[12]. Ainsi les longueurs, les aires, les volumes, les masses, les angles, les durées, etc. Si une telle définition, naïve, est insuffisante, elle permet de mettre en place les premières propriétés des grandeurs.

[11]Nous laissons ici imprécise la notion de nombre, nous supposons seulement que l'on sache faire sur ces nombres les quatre opérations arithmétiques. Dans la suite de l'exposé, il s'agit essentiellement des nombres rationnels, mais tout les résultats s'étendent au nombres réels. Dans un exposé élémentaire, on peut se restreindre au nombres rationnels et admettre que l'on peut étendre à d'autres nombres par des procédés d'approximation (cf. Appendice).

Un type de grandeur **G** étant donné, **G** est muni d'un ordre total et on note $a < b$ la relation d'ordre strict associée[13].

Nous disons qu'un type de grandeur **G** est *additif* si l'on sait définir la somme de deux grandeurs ; on note $a + b$ la somme des grandeurs.

L'addition possède les propriétés suivantes :

i : l'addition est commutative et associative

ii : l'addition est compatible avec l'ordre, c'est-à-dire que a, b, c trois grandeurs étant donné, l'inégalité $b < c$ implique l'inégalité $a + b < a + c$

iii : il existe une grandeur nulle 0 telle que $a + 0 = a$

iv : soustraction : étant données deux grandeurs a et b telle que $a < b$, il existe une grandeur c telle que $b = a + c$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

- la grandeur nulle est unique et plus petite que toute grandeur non nulle
- soient a et b deux grandeurs, si b n'est pas la grandeur nulle, alors $a < a + b$
- soient a, b, c trois grandeurs tels que $a + b = a + c$, alors $b = c$.
- soient a et b deux grandeurs telles que $a < b$, il existe une grandeur et une seule c telle que $a + c = b$

Un type de grandeur additif étant donné, on sait définir, par additions successives, les *multiples* $\mathrm{m}a$ d'une grandeur a (m entier naturel).

On montre aisément les assertions suivantes :

- l'inégalité $\mathrm{m} < \mathrm{n}$ implique l'inégalité $\mathrm{m}a < \mathrm{n}a$ et réciproquement.

- l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité $\mathrm{m}a < \mathrm{m}b$ et réciproquement.

- l'égalité $a = b$ implique l'égalité $\mathrm{m}a = \mathrm{m}b$ et réciproquement

On vérifie aisément les relations suivantes (m et n désignant des nombres entiers positifs, a et b des grandeurs).

$$(\mathrm{m} + \mathrm{n})a = \mathrm{m}a + \mathrm{n}a$$

$$\mathrm{m}(\mathrm{n}a) = (\mathrm{mn})a$$

$$\mathrm{m}(a + b) = \mathrm{m}a + \mathrm{m}b$$

exemples : longueurs, aires, volumes, masses, durées,

rapports de grandeurs

---

[12]C'est la définition d'Aristote. Cette définition, bien qu'insuffisante, constitue une entrée dans la notion de grandeur, notion qui s'affine au fur et à mesure qu'on la rencontre et qu'on l'étudie.

[13]Lorsque nous parlons d'une relation d'ordre, nous nous intéressons d'abord à l'ordre strict. La distinction entre ordre strict et ordre large relève de la formulation du concept d'ordre. La formulation de l'ordre large ne prend sens que dans certains problèmes qui ne relèvent pas de l'enseignement élémentaire. Que signifie pour un élève de l'école primaire la relation $2 \leq 3$? Il est donc préférable de se borner, dans l'enseignement élémentaire aux seules inégalités au sens strict strictes et de n'utiliser les inégalités au sens large que lorsque nécessaire.

Soit **G** un type de grandeur additif (longueur, aires, volumes, masses, durée, etc.)
- nous dirons qu'une grandeur *a divise* une grandeur a' s'il existe un entier n tel que $a' = \mathrm{n}a$. On dit aussi que a est un *diviseur*, ou un *sous-multiple*, ou une *partie aliquote*, de a', et que a' est un *multiple* de a.
- deux grandeurs a et a' étant données, nous dirons qu'elles sont *commensurables* s'il existe une grandeur a'' qui divise les grandeurs a et a'. La grandeur a'' est appelée un diviseur commun, ou une partie aliquote commune, des grandeurs a et a'.
Soient a et a' deux grandeurs commensurables, a_1 et a_2 deux diviseurs communs de a et a', on peut écrire

$$a = \mathrm{n}a_1 = \mathrm{p}a_2$$

$$a' = \mathrm{n}'a_1 = \mathrm{p}'a_2$$

alors

$$\mathrm{np}' = \mathrm{n}'\mathrm{p}$$

ce qui implique que les fractions n'/n et p'/p sont égales.
Ceci permet de définir le rapport de deux grandeurs commensurables : soit a et a' deux grandeurs commensurables, a'' une partie aliquote commune, si

$$a = \mathrm{n}a'' \qquad\qquad a' = \mathrm{n}'a''$$

on appelle *rapport* de a' sur a la fraction n'/n et on note

$$a'/a = \mathrm{n}'/\mathrm{n}$$

Soit a et b deux grandeurs commensurables, les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $a/b = \mathrm{n}/\mathrm{p}$
b) $\mathrm{p}a = \mathrm{n}b$

ce qui montre que deux grandeurs commensurables ont un multiple commun.
Réciproquement, si deux grandeurs ont un multiple commun, elles sont commensurables.
En effet soit a et b deux grandeurs ayant un multiple commun, on peut écrire la relation

$$\mathrm{p}a = \mathrm{q}b$$

et on peut supposer que p et q sont premiers entre eux, auquel cas il existe deux entiers r et s (positifs ou négatifs) tels que

$$\mathrm{rp} + \mathrm{sq} = 1$$

et soit $w = \mathrm{r}v + \mathrm{s}u$, alors

$$\mathrm{q}w = \mathrm{rp}u \qquad\qquad \mathrm{p}w = \mathrm{sq}u$$

Remarque : l'introduction des nombres réels permet d'étendre la notion de rapport aux grandeurs incommensurables[14].

grandeurs divisibles

Nous dirions qu'un type de grandeur additif est *divisible* si pour toute grandeur a et tout entier p il existe une grandeur a' tel que $a = \mathrm{p}a'$.
Les propriétés de la multiplication impliquent que si $a = \mathrm{p}a' = \mathrm{p}a''$, alors $a' = a''$.
Si un type de grandeur est divisible, on peut multiplier une grandeur par une fraction.
On commence par remarquer la propriété suivante :

Soit a une grandeur et p/q *une fraction, alors*

$$\mathrm{p}(a/\mathrm{q}) = (\mathrm{p}a)/\mathrm{q}$$

et on note p/q.a la grandeur ainsi définie.
On montre aisément que si les fractions p/q et p'/q' sont égales, alors

$$\mathrm{p/q}.a = \mathrm{p'/q'}.a$$

Les propriétés de multiplication par des entiers s'étendent à la multiplication par les fractions.

exemples :
- les longueurs définissent un type de grandeur divisible, la divisibilité étant assurée par le théorème de Thalès.
- la question de la divisibilité des angles est plus compliquée. Les géomètres grecs savaient diviser un angle en deux parties égales, et par conséquent en 2^n parties égales. Par contre la trisection de l'angle leur posait problème[15] et le problème général de la division du cercle ne sera résolu que tardivement pas Gauss.

proportions

Soient **G** et **H** deux types de grandeur, a et a' deux grandeur du type **G**, b et b' deux grandeur du type **H**, nous dirons que la suite a, a', b, b' est une proportion si l'on a l'égalité de rapports

$$a/a' = b/b'$$

Cette définition suppose que les grandeurs a et a' (resp. b et b') sont commensurables. Elle n'implique pas que a et b soient commensurables.
On peut étendre la notion de proportion lorsque les grandeurs ne sont pas commensurables[16].

Remarque : Soient **G** un type de grandeur, a, b, c, d, quatre grandeurs du type **G**, on suppose a et b sont commensurables et que a et c sont commensurables. Si

$$a/b = c/d$$

[14]Jules Tannery, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, chapitre XIII, p. 470-487
[15]Pour les mathématiciens grecs, la résolution d'un problème de géométrie implique une construction effective. Pour les problèmes qu'ils ne savaient pas résoudre avec la règle et le compas, comme, par exemple, la trisection d'un angle, ils ont inventé des instruments plus sophistiqués dont nous ne pouvons parler ici.
[16]Euclide, *Eléments*, Livre V.

alors

$$a/c = b/d$$

Pour le montrer on remarque que a, b et c ont un diviseur commun. En effet si u est un diviseur commun de a et b, v est un diviseur commun de a et c, alors u et v sont commensurables. Soit w un diviseur commun de a, b et c. On peut écrire

$$a = \mathrm{m}w \qquad b = \mathrm{n}w \qquad c = \mathrm{p}w$$

On en déduit les relations

$$a/b = \mathrm{m/n} = c/d$$

$$a/c = \mathrm{m/p}$$

on en déduit

$$b/d = \mathrm{m}b/\mathrm{m}d = \mathrm{n}a/\mathrm{n}c = \mathrm{nm}w/\mathrm{np}w = \mathrm{m/p}$$

ce qui achève la démonstration.

Dans le cas incommensurable, la propriété est encore vraie[17].

Correspondances proportionnelles

Soient **G** et **H** deux types de grandeurs additifs, une correspondance $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est dite proportionnelle si
- f conserve l'addition
- f conserve les rapports

Notons que la première assertion suffit.
La conservation de l'addition implique la conservation de la multiplication par un entier.
Soit alors deux grandeurs commensurables a et b de type **G**, et u un diviseur commun, on peut écrire

$$a = \mathrm{n}u \qquad b = \mathrm{p}u$$

et par conséquent

$$f(a) = \mathrm{n}f(u) \qquad f(b) = \mathrm{p}f(u)$$

Il s'ensuit que $f(u)$ est un diviseur commun de $f(a)$ et $f(b)$ et l'égalité des rapports

$$f(a)/f(b) = a/b$$

On montre aisément que si **G** et **H** sont divisibles, alors pour toute fraction p/q, on la relation

[17] *ibid*. proposition XVI. La place de la proposition dans le texte euclidien montre que la démonstration n'est pas simple.

$$f(\mathrm{p/q}.a) = \mathrm{p/q}.f(a)$$

Remarque : On peut montrer qu'une correspondance additive conserve les rapports de grandeurs incommensurables (cf. Appendice).

Soit **G**, **H**, **K** trois types de grandeur, $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ et $g : \mathbf{H} \to \mathbf{K}$ deux correspondances additives, alors la correspondance $g \circ f : \mathbf{G} \to \mathbf{K}$ est une correspondance additive.

Correspondances proportionnelles inverses

Soient **G** et **H** deux types de grandeurs additifs, une correspondance $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est dite proportionnelle inverse si pour tout couple de grandeurs commensurables a et b de type **G** les rapports a/b et $f(b)/f(a)$ sont égaux.

Mesures des grandeurs

Soit **G** un type de grandeur, u une grandeur particulière que nous appelons *unité*.
Soit a une grandeur commensurable à u, on appelle *mesure* de a par rapport à l'unité u le rapport a/u, et on note

$$\mathrm{mes}_u(a) = a/u$$

La correspondance qui associe à toute grandeur sa mesure par rapport à une unité donnée u est une correspondance proportionnelle.
L'introduction des nombres réels permet d'étendre la mesure à l'ensemble des grandeurs.

Changement d'unité.

Soient u et v deux grandeurs commensurables, alors pour toute grandeur a

$$\mathrm{mes}_v(a) = \mathrm{mes}_v(u).\mathrm{mes}_u(a)$$

L'introduction des nombres réels permet d'étendre cette propriété au cas où u et v ne sont pas commensurables et a est une grandeur quelconque.

Correspondances proportionnelles et mesures

Soient $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ une correspondance proportionnelle, u une unité de **G** et alors si a et u sont des grandeurs commensurables, $f(a)$ et $f(u)$ sont des grandeurs commensurables et

$$\mathrm{mes}_{f(u)}(f(a)) = \mathrm{mes}_u(a)$$

Soient $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ une correspondance proportionnelle, u une unité de **G** et v une unité de **H** telle que les grandeurs $f(u)$ et v soient commensurables, il existe un nombre rationnel k tel que pour toute grandeur a de **G** on ait la relation

$$\mathrm{mes}_v(f(a)) = k\mathrm{mes}_u(a)$$

On peut noter la relation

$$k = \text{mes}_v(f(u))$$

L'introduction des nombres réels permet de d'étendre cette propriété aux grandeurs incommensurables.

Correspondances proportionnelles inverses et mesure

Soient f : **G** → **H** une correspondance proportionnelle, u une unité de **G** et alors si a et u sont des grandeurs commensurables, $f(a)$ et $f(u)$ sont des grandeurs commensurables et

$$\text{mes}_{f(u)}(f(a)).\text{mes}_u(a) = 1$$

Soient f : **G** → **H** une correspondance proportionnelle inverse, u une unité de **G** et v une unité de **H** telle que les grandeurs $f(u)$ et v soient commensurables, il existe un nombre rationnel k tel que pour toute grandeur a de **G** on ait la relation

$$\text{mes}_v(f(a)).\text{mes}_u(a) = k$$

On peut noter la relation

$$\text{mes}_v(f(u)) = k$$

Retour sur la règle de trois

Dans le cadre de la théorie des proportions, la règle de trois peut être définie comme un problème de quatrième proportionnelle. Mais ce problème se pose de deux façons selon que l'on se place du point de vue des grandeurs ou du point de vue des grandeurs mesurées, la relation entre les deux problèmes s'appuyant sur la propriété que le rapport de deux grandeurs de même type est égal au rapport de leurs mesures. La difficulté, dans l'enseignement, est liée au fait que les grandeurs sont souvent définies par leur mesure, ce qui conduit à confondre, dans la pratique, une grandeur et sa mesure.

Grandeurs

Soient **G** et **H** deux types de grandeurs, a et b deux grandeurs commensurables du type **G** et c une grandeur du type **H**, on appelle *quatrième proportionnelle* du triplet (a,b,c) une grandeur x de type **H** telle que

$$a/b = c/x$$

La question se pose alors de l'existence de x. Ainsi, si l'on considère les nombres entiers naturels qui constituent un type de grandeur additif, étant donné trois nombres m, n, p il n'existe pas en général un entier naturel x tel que

$$m/n = p/x$$

Il faut donc introduire un axiome assurant l'existence la quatrième proportionnelle, axiome que l'on peut énoncer ainsi :

Nous dirons qu'un type de grandeur **H** *satisfait l'axiome de la quatrième proportionnelle si, étant données deux grandeurs commensurables a et b d'un type de grandeur* **G** *et une grandeur c du type* **H***, le triplet* (a,b,c) *admet une quatrième proportionnelle.*

Il est clair qu'un type de grandeur divisible satisfait l'axiome de la quatrième proportionnelle.

Grandeurs mesurées

Soient **G** et **H** deux types de grandeurs, u une unité de **G** et v une unité de **H** Soient a et b deux grandeurs commensurables de **G**, c et d deux grandeurs de **H**, alors la proportion

$$a/b = c/d$$

est équivalente à la proportion numérique

$$\mathrm{mes}_u(a)/\mathrm{mes}_u(b) = \mathrm{mes}_v(c)/\mathrm{mes}_v(d)$$

ce qui conduit à la relation numérique

$$\mathrm{mes}_v(d) = \frac{\mathrm{mes}_u(b).\mathrm{mes}_v(c)}{\mathrm{mes}_u(a)}$$

que l'on peut considérer comme la formule de la règle de trois.
La recherche d'une quatrième proportionnelle est ainsi ramenée à la recherche d'une quatrième proportionnelle numérique. Il faut noter cependant qu'étant donné deux grandeurs commensurables a et b de type **G** et une grandeur c de type **H**, pour que la quatrième proportionnelle x du triplet (a,b,c) existe il faut et il suffit que la quatrième proportionnelle du triplet de nombres ($\mathrm{mes}_u(a)$,$\mathrm{mes}_u(b)$, $\mathrm{mes}_v(c)$) soit la mesure d'une grandeur de type **H**.
Si le type de grandeur **H** est divisible et si u une unité, alors tout nombre rationnel est la mesure d'une grandeur de type **H** : en effet, si r est un nombre rationnel, alors r = $\mathrm{mes}_u(\mathrm{r}u)$.

Appendice

Il existe essentiellement deux façons d'exposer la théorie de la proportionnalité.
Ces deux façons supposent que les types de grandeurs considérés sont *archimédiens*, c'est-à-dire que, deux grandeurs de ce type étant données, il existe un multiple de la plus petite qui surpasse la plus grande.
La première façon, développée au Livre V des *Eléments* d'Euclide, est indépendante de toute notion de nombre autre que les entiers naturels. La notion de rapport est définie comme *"une manière d'être"* entre deux grandeurs homogènes (de même type pour reprendre notre terminologie) et c'est la notion de proportion qui précise la notion de rapport.
La seconde façon s'appuie sur la notion de nombre et définit le rapport de deux grandeurs a et b comme un nombre, le nombre qui mesure la grandeur a quand on prend la grandeur b comme unité. Dans l'exposé ci-dessus nous n'avons défini que le rapport de deux grandeurs commensurables, ce rapport étant un nombre rationnel.
Pour définir le rapport de deux grandeurs incommensurables il faut donc étendre la notion de nombre. On définit pour cela la notion de nombre réel. Pour une étude complète des nombres

réels et de la mesure des grandeurs, nous renvoyons aux chapitres XII et XIII des *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* de Jules Tannery[18].
La notion de nombre réel une fois définie, on peut développer la théorie des rapports et des proportions numériques. Reste à définir la notion de rapport de deux grandeurs, ce que nous ferons en termes d'approximations.
Dans la suite de cet exposé, les types de grandeurs sont additifs et archimédiens.

Rapport de deux grandeurs

Soit p un entier donné[19], étant donnés un type de grandeur **G** et deux grandeurs *a* et *b* de type **G**, on définit la suite des approximations p-adiques[20] du rapport *a*/*b* de la faon suivante.
On définit d'abord le plus grand entier $n \geq 0$ tel que

$$n_0 b \leq a < (n_0 + 1)b$$

L'entier n_0 est appelé le *quotient entier* de la division de *a* par *b*.
Plus généralement, pour tout entier q on définit le plus grand entier $nq \geq 0$ tel que

$$n_q b \leq p^q a < (n_q + 1)b$$

Le nombre rationnel $n_q p^{-q}$ est appelé le *quotient* à p^{-q} près de la division de *a* par *b*[21].
On montre aisément que la suite $r_q = n_q p^{-q}$ est croissante, que la suite $s_q = (n_q + 1)p^{-q}$ est décroissante et que la différence s_q-r_q tend vers 0. Par conséquent, si on se place dans le corps des nombres réels, les suites r_q et s_q ont la même limite. On vérifie aisément, ce que nous ne ferons pas ici, que cette limite ne dépend pas de la base p. C'est cette limite que nous appelons le rapport *a*/*b*. Lorsque les grandeurs *a* et *b* sont commensurables, on retrouve le rapport défini ci-dessus.
On dit que r_q est la valeur approchée à p^{-q} près *par défaut* et que s_q est la valeur approchée à p^{-q} près *par excès*.

Proportions

Soient **G** et **H** deux types de grandeur, *a* et *a'* deux grandeur du type **G**, *b* et *b'* deux grandeur du type **H**, nous dirons que la suite *a*, *a'*, *b*, *b'* est une proportion si l'on a l'égalité de rapports

$$a/a' = b/b'$$

Soient **G** et **H** deux types de grandeur, *a* et *b* deux grandeurs du type **G**, *c* une grandeur du type **H**, nous dirons que le triplet (*a*,*b*,*c*) admet une quatrième proportionnelle s'il existe une grandeur *d* du type **H** telle

$$a/b = c/d$$

---

[18]Rappelons que cet ouvrage est destiné aux élèves des classes de mathématiques élémentaires. Les trois derniers chapitres de l'ouvrage portent sur la construction des nombres réels, la mesure des grandeurs et la loi de la réciprocité quadratique. Dans la préface de son ouvrage, Jules Tannery explique que ces trois derniers chapitres de son ouvrage s'adressent aux lecteurs (des élèves de la classe de mathématiques élémentaires) qui *"veulent pousser plus loin leurs études scientifiques"*.
[19]dans la pratique p = 10.
[20]Lorsque p = 10, on parle d'approximations décimales.
[21]notons que l'on ne suppose pas que le type de grandeur considéré soit divisible.

Nous dirons qu'un type de grandeur **H** satisfait l'axiome de la quatrième proportionnelle si, étant données deux grandeurs a et b d'un type de grandeur **G** et une grandeur c du type **H**, le triplet (a,b,c) admet une quatrième proportionnelle,

Correspondances additives

Soient **G** et **H** deux types de grandeurs, $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ une correspondance additive, alors f conserve l'ordre et les rapports de grandeurs.
Pour monter la conservation de l'ordre, il suffit de remarquer qu'étant donné deux grandeurs a et b de type G, si $b < a$ il existe c tel que $a = b+c$ et par conséquent $f(a) = f(b) + f(c)$ ce qui prouve $f(b) < f(a)$.
Soient a et b deux grandeurs de type **G**, alors pour tout entier q on a les inégalités

$$\mathrm{n_q}b \leq \mathrm{p^q}a < (\mathrm{n_q} + 1)b$$

et la conservation de l'ordre implique les inégalités

$$\mathrm{n_q}f(b) \leq \mathrm{p^q}f(a) < (\mathrm{n_q} + 1)f(b)$$

ce qui prouve l'égalité

$$f(a)/f(b) = a/b$$

Correspondances proportionnelles inverses

Soient **G** et **H** deux types de grandeurs, une correspondance $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est dite proportionnelle inverse si pour tout couple de grandeurs a et b de type **G** les rapports a/b et $f(b)/f(a)$ sont égaux.

Correspondances multiproportionnelles

Soient **G**, **H**, **K** trois types de grandeurs, une correspondance *biproportionnelle*

$$f : \mathbf{G}\times\mathbf{H} \to \mathbf{K}$$

est une application telle que pour toute grandeur a de type **G** (b de type **H**), les applications partielles $f_{1,a}$ et $f_{2,b}$ définies par

$$f_{1,a}(y) = f(a,y) \qquad f_{2,b}(x) = f(x,b)$$

soient des correspondances proportionnelles.
On définirait de même les correspondances *multiproportionnelles*.

Mesure des grandeurs

Soit **G** un type de grandeur, u un élément unité, à toute grandeur a on associe le nombre

$$\mathrm{mes}_u(a) = a/u$$

ce qui définit une correspondance additive de **G** dans l'ensemble des nombres réels. Il s'ensuit que la mesure conserve les rapports, autrement dit, pour tout couple de grandeurs a et b de type **G**, on a la relation

$$\mathrm{mes}_u(a)/\ \mathrm{mes}_u(b) = a/b$$

Il est clair que l'application mes_u de **G** dans l'ensemble des nombres réels est injective.
Soient u et v deux grandeurs de type **A**, alors, pour toute grandeur a

$$\mathrm{mes}_v(a) = \mathrm{mes}_v(u).\mathrm{mes}_u(a)$$

Si l'application mes_u est surjective, alors l'application mes_v est surjective.
Nous dirons qu'une grandeur est *continue* si, une unité étant donnée, la mesure qu'elle définit est une application surjective. Notons qu'une grandeur continue satisfait à l'axiome de la quatrième proportionnelle.

On peut alors énoncer la formule de la règle de trois sous la forme suivante :
Soient **G** et **H** deux types de grandeurs additifs et archimédiens, u une unité de **G** et v une unité de **H**. Soient a et b deux grandeurs de type **G**, c et d deux grandeurs de type **H**, alors la proportion

$$a/b = c/d$$

est équivalente à la proportion numérique

$$\mathrm{mes}_u(a)/\mathrm{mes}_u(b) = \mathrm{mes}_v(c).\mathrm{mes}_v(d)$$

ce qui conduit à la relation numérique

$$\mathrm{mes}_v(d) = \frac{\mathrm{mes}_u(b).\mathrm{mes}_v(c)}{\mathrm{mes}_u(a)}$$

que l'on peut considérer comme la formule de la règle de trois.
La recherche d'une quatrième proportionnelle est ainsi ramenée à la recherche d'une quatrième proportionnelle numérique. Il faut noter cependant qu'étant donné deux grandeurs a et b de type **G** et une grandeur c de type **H**, pour que la quatrième proportionnelle x du triplet (a,b,c) existe il faut et il suffit que la quatrième proportionnelle du triplet de nombres ($\mathrm{mes}_u(a)$,$\mathrm{mes}_u(b)$, $\mathrm{mes}_v(c)$) soit la mesure d'une grandeur de type **H**.

Correspondances proportionnelles et mesure

Soient f : **G** $\rightarrow$ **H** une correspondance proportionnelle, u une unité de **G**; alors pour toute grandeur a de type **G**

$$\mathrm{mes}_{f(u)}(f(a)) = \mathrm{mes}_u(a)$$

Soient f : **G** $\rightarrow$ **H** une correspondance proportionnelle, u une unité de **G** et v une unité de **H**, il existe un nombre réel k tel que pour toute grandeur a de **G** on ait la relation

$$\mathrm{mes}_v(f(a)) = \mathrm{k}\,\mathrm{mes}_u(a)$$

On peut noter la relation

$$k = \mathrm{mes}_v(f(u))$$

exemple

1- Un mouvement uniforme définit une correspondance proportionnelle f qui associe à toute durée l'espace parcouru pendant cette durée. Soit τ une unité de temps et u une unité de longueur, alors pour toute durée t on a la relation

$$\mathrm{mes}_u(f(t)) = k\mathrm{mes}_\tau(t)$$

Le coefficient k est la mesure de la vitesse du mouvement uniforme, ce coefficient dépend évidemment des unités de temps et de longueur, k étant égal à la mesure de l'espace parcouru pendant l'unité de temps. Le coefficient k représente la mesure de la vitesse si on prend comme unité de vitesse la vitesse du mouvement uniforme tel que l'espace parcouru pendant l'unité de temps τ soit égal à l'unité de longueur u.

2- Un matériau étant donné, la correspondance qui associe au volume d'un corps de ce matériau sa masse est une correspondance proportionnelle.
Soit v une unité de volume et m une unité de masse, pour tout corps P du matériau donné on note V(P) son volume et M(P) sa masse, alors il existe un nombre μ tel que

$$\mathrm{mes}_m(M(\mathrm{P})) = \mu.\mathrm{mes}_v(V(\mathrm{P}))$$

Le coefficient μ est appelé la mesure de la *masse spécifique* du matériau donné dans les unités v et m données. μ est alors la mesure de la masse d'un corps de volume v.
Deux matériaux étant donnés, le rapport de la masse d'un corps du second matériau à la masse d'un corps de même volume du premier matériau est constant, on l'appelle la *densité relative* du second matériau par rapport au premier matériau.
Soient deux matériaux M_1 et M_2. On notera d_{12} la densité relative du matériau M_2 par rapport au matériau M_1. Une unité de volume et une unité de masse étant données, on notera μ_1 et μ_2 les masses spécifiques des matériaux M_1 et M_2, alors

$$d_{12} = \mu_2/\mu_1$$

Soit M_0 un matériau dit de référence (en général ce matériau est l'eau)[22]. On appelle *densité* d'un matériau M la densité relative de M par rapport à M_0.
Soit v une unité de volume, on choisit comme unité de masse la masse m_0 d'un corps de volume v dont la matière est le matériau de référence, alors la masse spécifique du matériau M_0 vaut 1. Pour tout matériau M, sa masse spécifique, dans les unité v et m_0, est alors égale à sa densité.

Correspondances proportionnelles inverses et mesure

Soient f : $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$ une correspondance proportionnelle inverse, u une unité de **G**, alors, pour toute grandeur a de type **G**

[22]Lorsque l'on étudie les gaz, le matériau de référence est l'air.

$$\text{mes}_{f(u)}(f(a)).\text{mes}_u(a) = 1$$

Soient f : $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$ une correspondance proportionnelle inverse, u une unité de $\mathbf{G}$ et v une unité de $\mathbf{H}$, il existe un nombre rationnel k tel que pour toute grandeur a de $\mathbf{G}$ on ait la relation

$$\text{mes}_v(f(a)).\text{mes}_u(a) = \text{k}$$

On peut noter la relation

$$\text{mes}_v(f(u)) = \text{k}$$

Correspondances multiproportionnelles et mesure

Soient f : $\mathbf{G}\times\mathbf{H} \to \mathbf{K}$ une correspondance biproportionnelle. Soient u,v des unités respectives des types de grandeurs $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, on associe au couple (u,v) l'unité $f(u,v)$ de $\mathbf{K}$ et l'on a la relation

$$\text{mes}_{f(u,v)}(f(a,b) = \text{mes}_u(a).\text{mes}_v(b)$$

où a est une grandeur de type $\mathbf{G}$ et b une grandeur de type $\mathbf{B}$.

Retour sur la règle de trois composée

Soient f : $\mathbf{G}_1\times\mathbf{G}_2\times\mathbf{G}_3\times\mathbf{H}_1\times\mathbf{H}_2 \to$ K une correspondance, proportionnelle par rapport à $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, proportionnelle inverse par rapport à $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$, et soient u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, w des unités respectives de $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{K}$, a_1, a_2, a_3, b_1,b_2 des grandeurs de type respectifs $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, alors

$$\text{mes}_w(f(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2) = \text{k}\frac{\text{mes}_{u_1}(a_1).\text{mes}_{u_2}(a_2).\text{mes}_{u_3}(a_3)}{\text{mes}_{v_1}(b_1)\text{mes}_{v_2}(b_2)}$$

où

$$\text{k} = \text{mes}_{\text{w}}(f(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2)$$

On en déduit la formule générale de la règle de trois qu'on laisse au plaisir du lecteur le soin d'écrire.

Eléments de bibliographie

À défaut de donner une impossible bibliographe exhaustive, nous donnons une liste d'ouvrages sur lesquels nous avons travaillé, tant pour la question générale de la proportionnalité que pour les ouvrages d'enseignement.

Ouvrages généraux

Jean Le Rond d'Alembert, *Traité de Dynamique*, nouvelle édition revue et augmentée par l'Auteur, Paris 1763, réédition Jacques Gabay, Paris 1990.
Euclide, *Les Œuvres d'Euclide*, traduites littéralement par F. Peyrard 1819), nouveau tirage augmenté d'une importante introduction par Jean Itard, Blanchard, Paris 1993, livre V.
Nicolas Rouche, *Le Sens de la Mesure* (des grandeurs aux nombres rationnels), Didier-Hatier, Bruxelles 1992.
Jules Tannery, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, dixième édition revue, Cours complet pour la classe de Mathématiques A,B, Armand Colin, Paris 1928.

Ouvrages d'enseignement

M. Delfaud et A. Millet, *Arithmétique*, Cours Moyen et Supérieur, Hachette, Paris 1928
A. Lemoine, *Arithmétique du Certificat d'Etudes Primaires*, Cours Moyen-Certificat d'Études, Livre du Maître, Hachette, Paris 1929.
A. Marijon & A. Pequignot, *Arithmétique des Ecoles Primaires Supérieures*, Cours Complémentaires - Écoles Primaires Supérieures - Écoles Normales, 3e édition, Hatier, Paris 1930.