

# DE LA GEOMETRIE SANS FIGURES

Rudolf Bkouche  
IREM DE Lille

*L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de Michel Chasles ne contient pas une seule figure. Cela peut sembler paradoxal de la part d'un géomètre soucieux de montrer le sens profond de la géométrie projective, cette géométrie qui veut, après la débauche analytique du XVIII<sup>ème</sup> siècle, revenir à l'étude directe des objets et qui se donne pour premier objectif de définir la méthode de cette étude directe. Paradoxe d'autant plus grand que la géométrie projective est l'aboutissement d'un travail de théorisation des méthodes de représentation, depuis les premières constructions perspectivistes des peintres et architectes du Quattrocento jusqu'à la géométrie descriptive systématisée par celui dont se réclame l'école de géométrie projective du XIX<sup>ème</sup> siècle, je veux parler de Monge.

Pourtant cette absence de figures dans l'ouvrage de Chasles pose la question même du statut de la figure géométrique, figure symboliquement présente tout au long de l'ouvrage, mais figure qui n'est que la représentation de l'objet géométrique. Mais alors, qu'est-ce que l'objet géométrique?

La réduction au calcul opérée par la méthode des coordonnées reléguait la figure à n'être tout au plus qu'un intermédiaire vers la mise en équation. Si pour Descartes, la figure reste au centre de la géométrie comme le montre le livre III de sa *Géométrie*<sup>1</sup>, Fermat sait déjà s'en affranchir comme on peut le voir dans sa *Dissertation en trois parties*<sup>2</sup> où l'auteur explique d'un point de vue purement calculatoire comment la résolution d'une équation algébrique revient à étudier une intersection de courbes, mettant ainsi en valeur, l'autonomie du calcul par rapport à la géométrie. Cette autonomie, d'abord méthodologique, prend toute sa valeur avec le développement de la physique mathématique dont la *Mécanique Analytique* de Lagrange marque l'une des grandes étapes. C'est dans la préface de cet ouvrage que Lagrange écrit cette phrase bien connue:

*"On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnement géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu le domaine"*<sup>3</sup>

Si la figure disparaît, quel est le statut de l'objet? l'objet est-il réduit à sa seule formulation algébrique? et son statut est-il seulement déterminé par les opérations formelles auxquelles il est assujetti?

Nous n'aborderons pas ici le problème général du statut de l'objet géométrique, disons seulement que l'absence de figures chez Chasles n'a pas la même signification que chez Lagrange. Si l'objet disparaît derrière le calcul chez ce dernier, il est constamment présent dans la démarche de ceux qui pratiquent la géométrie synthétique (ainsi appelée par opposition à la géométrie analytique, celle de la méthode des coor-

---

<sup>1</sup>René Descartes, p. 331-432

<sup>2</sup>Pierre de Fermat, p. 109-120

<sup>3</sup>Jean-Louis Lagrange, préface

données). Ainsi Poincot, lui-même mécanicien, étudiant par des méthodes géométriques le mouvement des corps solides déjà étudié analytiquement par Euler et D'Alembert, précise:

*"Nous voilà donc conduit par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement."*<sup>4</sup>

Quel est alors cet objet géométrique de la géométrie synthétique? quel est le rôle de la figure et quelle est la signification de son absence?

Si la figure est la représentation de l'objet géométrique, c'est l'étude des modes de représentations, et en particulier la géométrie descriptive de Monge, qui a permis de se débarrasser de la figure; c'est ce qu'explique Chasles lorsque, après avoir présenté la géométrie descriptive de Monge comme *"la traduction graphique de la Géométrie générale et rationnelle"*<sup>5</sup>, il écrit:

*"Cette influence utile de la Géométrie descriptive s'étendit naturellement aussi sur notre style et notre langage en mathématiques, qu'elle rendit plus aisés et plus lucides, en les affranchissant de cette complication des figures dont l'usage distrahit de l'attention qu'on doit au fond des idées, et entrave l'imagination et la parole."*<sup>6</sup>

C'est que la géométrie descriptive n'est pas seulement une technique de représentation, elle participe de la géométrie rationnelle.

*"La géométrie descriptive a deux objets: le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature, qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.*

*Le second objet est de donner la manière de reconnaître d'après une description exacte les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives."*<sup>7</sup>

C'est ainsi que Monge présente la géométrie descriptive au début de son ouvrage et ses disciples mettront en valeur *ce second objet* qui conduit au renouvellement des méthodes de la géométrie rationnelle.

Pour comprendre les conceptions de Chasles, nous rappellerons sa distinction des trois grandes branches de la géométrie:

*"La première comprend la Géométrie des Anciens, aidée de la doctrine des indivisibles et de celles des mouvements composées;*

*La deuxième est l'analyse de Descartes, accrue des procédés de Fermat, dans sa méthode de **maximis et minimis**, pour calculer l'infini;*

*La troisième enfin est cette Géométrie pure, qui se distingue essentiellement par son abstraction et sa généralité; dont Pascal et Desargues ont donné les*

---

<sup>4</sup>Louis Poincot, p. 86

<sup>5</sup> Michel Chasles, p. 190

<sup>6</sup>ibid, p.190

<sup>7</sup>Gaspard Monge, p. 1

*premiers exemples dans leurs traités des coniques, et dont nous verrons que Monge et Carnot, au commencement de ce siècle, ont assis les fondements sur des principes larges et féconds."*<sup>8</sup>

Si la deuxième branche de la géométrie a su apporter "*le caractère d'arbitraire et de généralité qui la distingue essentiellement de la Géométrie ancienne*"<sup>9</sup>, elle s'est éloignée, par l'usage du calcul, de son caractère proprement géométrique; la troisième branche, la *Géométrie récente*, comme l'appelle Chasles, quant à elle, est exempte de calculs algébriques tout en gardant le caractère d'abstraction et de généralité de la méthode des coordonnées. Elle est ainsi "*la continuation de l'analyse géométrique des Anciens, dont elle ne diffère point quant au but et à la nature de ses spéculations*"<sup>10</sup>. La géométrie projective unit ainsi l'approche purement géométrique des Anciens (les Grecs et leurs successeurs) et le caractère de généralité de la méthode des coordonnées.

C'est ce discours que l'on retrouve chez les géomètres projectifs; nous citerons en particulier les écrits de Poncelet. Dans la préface du *Traité des Propriétés Projectives de Figures*, il explique, reprenant des articles antérieurs assez confus<sup>11</sup>, comment il s'est appuyé sur la démarche de la géométrie analytique pour mettre en place cette géométrie générale que doit être la géométrie projective.

C'est ainsi qu'il décrit les méthodes algébriques:

*"L'Algèbre emploie des signes abstraits, elle représente les grandeurs absolues par des caractères qui n'ont aucune valeur par eux-mêmes, et qui laissent à ces grandeurs toute l'indétermination possible; par suite elle opère et raisonne forcément sur les signes de non-existence comme sur des quantités toujours absolues, toujours réelles."*<sup>12</sup>

C'est cette indétermination qui fait la puissance de la méthode des coordonnées, c'est donc une telle indétermination qu'il faut mettre en place dans la géométrie pure de façon à lui donner la puissance des méthodes analytiques tout en gardant un lien direct avec les objets proprement géométriques. C'est pour atteindre ce programme que Poncelet énoncera son principe de continuité; c'est l'objet du quatrième cahier de ses *Applications d'Analyse et de Géométrie*<sup>13</sup>, texte confus rédigé entre 1818 et 1819 qui nous renseigne sur la démarche de Poncelet. En fait, celui-ci, comme tous les pratiquants de la géométrie synthétique, cherche à définir un calcul, mais un calcul qui porterait sur les objets géométriques eux-mêmes et non sur des représentations symboliques sur lesquels on opère indépendamment de la signification de ces objets.

Dans ce quatrième cahier, Poncelet énonce ce qu'il appelle les deux hypothèses de la géométrie analytique; analysant la démarche de la méthode des coordonnées, à la fois dans la mise en équations d'une situation géométrique, dans le déroulement des calculs et dans l'interprétation des nouvelles équations résultant du calcul<sup>14</sup>, il

---

<sup>8</sup>Michel Chasles, p. 116-117

<sup>9</sup>ibid, p. 94

<sup>10</sup>ibid, p. 117

<sup>11</sup>Jean-Victor Poncelet, *Applications*, tome II, quatrième cahier

<sup>12</sup>Jean-Victor Poncelet, *Traité*, p. xi-xii

<sup>13</sup>Les *Applications d'Analyse et de Géométrie* publiées entre 1862 et 1865, sont un recueil des premiers écrits de Poncelet depuis les textes de Saratoff (où il fut détenu comme prisonnier de guerre en 1813) jusqu'à 1822, date de publication du *Traité des Propriétés projectives de Figures*.

<sup>14</sup>Jean-Victor Poncelet, *Applications*, tome II, p. 316-317

remarque que le raisonnement correspondant se compose de deux parties entièrement distinctes.

*"Dans la première, on admet en principe que les équations primitives, celles qui définissent le système, demeurent invariables dans leur formes explicites, sauf la grandeur absolue et le signe des lettres qui y entrent, pour toutes les situations possibles du système auquel elles appartiennent; car s'il en était autrement, comment pourrait-on en conclure que les équations finales, celles qui en dérivent algébriquement, demeurent elles-mêmes invariables dans leurs formes explicites? Dans la seconde partie, on admet que ces équations finales ou les résultats obtenus algébriquement au moyen des équations primitives du système, demeurent invariables dans leurs formes explicites en même temps que ces dernières, et que par conséquent, ces résultats s'appliquent immédiatement, en vertu des principes mêmes de l'Algèbre pure, à tous les états du système que l'on considère.*

*Ainsi l'on admet forcément, d'une part, que la continuité subsiste dans les relations primitives, dans les lois géométriques qui définissent le système; d'une autre, dans les résultats des combinaisons et des opérations abstraites de l'Algèbre pure."*<sup>15</sup>

Ainsi sont posés deux problèmes: d'abord celui du principe de continuité qui n'est autre que l'expression de l'impossibilité de distinguer, via les équations, les divers états d'un système (par exemple le système défini par une droite et un cercle), impossibilité qui implique que les équations obtenues par le calcul ne distinguent pas plus les divers états du système et par conséquent s'appliquent à ces divers états; ensuite un problème plus fondamental, car il met en jeu la possibilité de la géométrie analytique (et plus généralement d'une physique mathématique), celui posé par ce principe qui dit que, les équations primitives représentant un système étant posées, les nouvelles équations obtenues par l'Algèbre pure, c'est-à-dire par un calcul indépendant du système lui-même, représentent encore des propriétés de ce système. En fait Poncelet ne s'intéresse qu'au premier problème, cependant son désir de construire un calcul portant directement sur les objets montre qu'il était conscient du second problème et qu'il lui importait de l'éviter; c'est aussi ce qu'exprime Poincaré cité plus haut (Cf. page 2). C'est que la méthode des coordonnées, outre le problème que nous venons de dire, ne donne pas les raisons (la métaphysique pour employer un langage classique) des résultats qu'elle démontre; cela nous conduit à rapprocher la critique de la méthode des coordonnées de la part des partisans de la géométrie synthétique de celle de la géométrie euclidienne par les logiciens de Port-Royal<sup>16</sup>.

Le principe de continuité se présente comme une extension de la méthode des transformations; celle-ci conduit à regarder comme représentation d'un même objet géométrique les diverses figures obtenues à partir de l'une d'entre elles par certaines transformations (dans le cas de la géométrie projective, les transformations homographiques et la dualité<sup>17</sup>), une propriété projective étant définie par son invariance par rapport à ces transformations.

Le principe de continuité étend la méthode des transformations à ce que Carnot a appelé, dans sa *Géométrie de Position*, les figures corrélatives, notion que

---

<sup>15</sup>ibid, tome II, p. 320-321

<sup>16</sup>Antoine Arnauld, Pierre Nicole, p. 398-404; voir aussi l'article d'Evelyne Barbin

<sup>17</sup>Cf. le mémoire de Chasles qui constitue la seconde partie de l'Aperçu historique

Poncelet se propose d'approfondir dans son quatrième cahier. Il distingue alors trois types de corrélations *"suivant la plus ou moins grande analogie que peuvent conserver entre eux, le système primitif et le système dérivé"*, précisant *"pour tous, nous admettrons que le mouvement par lequel on suppose que la figure primitive ait pu se changer en sa dérivée soit réel et géométriquement possible"*<sup>18</sup>. Ainsi, considérant la figure formée par une droite et un cercle, celle-ci se présente sous trois aspects et l'on passe de l'un à l'autre par un mouvement continu, par exemple en déplaçant la droite par rapport au cercle.

Poncelet explicite alors les trois types de corrélation:

*"Nous dirons que la corrélation est directe toutes les fois que les figures corrélatives seront composées d'un même nombre de parties semblables quant à leur nature, se correspondant chacun à chacune, et disposées absolument dans le même ordre à l'égard les unes des autres: dans cette situation, elles ne diffèreraient évidemment que par la grandeur absolue de ces parties, et nullement par leur nature et leur position relative.*

*Nous dirons que la corrélation est au contraire indirecte ou inverse toutes les fois que le déplacement nécessaire à opérer dans l'une des figures, pour la rendre identique avec sa corrélatrice, changerait l'ordre, la disposition de quelques-unes des parties dont elle se compose, sans toutefois en changer la nature.*

*Enfin la corrélation pourrait être telle que, en vertu du déplacement toujours réel de certaines parties de la figure primitive, une ou plusieurs autres parties devinssent dans la corrélatrice, imaginaires de réelles qu'elles étaient, ou réciproquement; c'est-à-dire telles que certaines distances, certains points cessassent d'exister d'une manière géométrique: nous nommerons cet état de deux figures corrélation idéale."*<sup>19</sup>

Poncelet donne alors l'exemple de la figure formée par une droite et un cercle distinguant le cas où la droite coupe le cercle et le cas où elle ne le coupe pas; on passe de l'une à l'autre cas par un mouvement continu de la droite par rapport au cercle mais les points d'intersection de la droite et du cercle, de réels qu'ils sont dans le premier cas deviennent imaginaires dans le second cas, on obtient ici deux figures en corrélation idéale.

On peut alors considérer comme représentant le même objet géométrique deux figures corrélatives, les transformations généralisées qui permettent de passer d'une figure à l'une de ses corrélatives étant assimilées à un calcul; la méthode des transformations et le principe de continuité définissent ainsi, selon Poncelet, cette méthode géométrique qui doit permettre d'obtenir le même degré de généralité que la méthode des coordonnées, comme il l'explique dans le troisième et dernier paragraphe du quatrième cahier.

Il utilisera le principe de continuité dans son *Traité* de 1822, introduisant les notions de corde idéale d'une conique (définie par une droite ne rencontrant pas la conique dont on peut dire *"afin de conserver l'analogie et le langage, que ses points d'intersection avec la courbe, et par conséquent la corde correspondante, sont imaginaires"*<sup>20</sup>) et de corde idéale commune à deux coniques, droite joignant les points d'in-

---

<sup>18</sup>Jean-Victor Poncelet, *Applications*, tome II, p. 300

<sup>19</sup>ibid, p. 301

<sup>20</sup>Jean-Victor Poncelet, *Traité*, p. 27

tersection imaginaires de deux coniques<sup>21</sup>, ce qui lui permettra d'étudier le système de deux coniques par analogie avec le système de deux cercles; l'homologie entre coniques est alors la corrélatrice de la similitude entre cercles<sup>22</sup>. En fait Poncelet montre qu'un système de deux coniques peut toujours être considéré comme la projection d'un système de deux cercles<sup>23</sup>, mais sa démonstration suppose que les deux coniques aient une corde idéale commune; lorsque les deux coniques ont leurs quatre points d'intersection réels, les deux systèmes sont en corrélation idéale et c'est le principe de continuité qui permet de relier propriétés du système de deux cercles et propriétés du système des deux coniques. Ainsi, les corrélations idéales posent des problèmes difficiles à résoudre si l'on ne veut pas s'en remettre au calcul et rien n'assure a priori la permanence des propriétés que demande Poncelet. Notons que Poncelet avait étudié à Saratoff la relation entre système de deux coniques et système de deux cercles par des méthodes analytiques et qu'il s'est efforcé par la suite d'en fabriquer l'étude géométrique équivalente, c'est en partie sur ce problème que s'est construit sa conception du principe de continuité<sup>24</sup>.

Tout en reconnaissant l'importance du travail de Poncelet, Cauchy critiquera l'usage du principe de continuité, principe mal-fondé, qui peut être utile comme méthode de recherche mais qui ne saurait servir de méthode de démonstration<sup>25</sup>.

C'est en partie pour répondre à ses objections et afin d'assurer la permanence des propriétés pour des figures corrélatives, que Chasles introduit une nouvelle forme du principe de continuité, savoir *le principe de relations contingentes*, principe qu'il fonde en remarquant "*qu'une figure peut présenter dans sa construction la plus générale deux cas différents; dans le premier, certaines parties (points, plans, lignes ou surfaces) d'où ne dépend pas nécessairement la construction générale de la figure, mais qui en sont des conséquences "contingentes" ou accidentelles, sont réelles et palpables; dans le second cas, ces mêmes parties n'apparaissent plus; elles sont devenues imaginaires; et cependant les conditions générales de construction de la figure, sont restées les mêmes*"<sup>26</sup>. Chasles considère alors pour une figure deux types de parties, d'une part "*les parties intégrantes et permanentes de la figure, celles qui appartiennent à sa construction générale, et qui sont toujours réelles*", d'autre part "*les parties secondaires, ou contingentes et accidentelles de la figure, qui peuvent être indifféremment réelles ou imaginaires, sans changer les conditions générales de la figure*"<sup>27</sup>. Les théorèmes généraux qui portent sur les parties intégrantes de la figure sont alors indépendants de la réalité ou de la non-réalité des parties secondaires, par conséquent, quand ces théorèmes sont démontrés sur une figure donnée, ils ont également lieu pour toute forme corrélatrice de la figure. Chasles s'appuie ici sur la détermination du pôle d'une droite par rapport à une conique donnée par Monge dans sa *Géométrie descriptive*<sup>28</sup> (Cf. l'article de Joël Sakarovitch dans ce recueil). Ici encore se pose la question de la légitimité de l'usage du principe, Chasles, qui sait user quand besoin est d'arguments analytiques, n'hésite pas à dire que les géomètres ont puisé leur confiance dans ce prin-

---

<sup>21</sup>ibid, p. 30-33

<sup>22</sup>ibid, p. 125

<sup>23</sup>ibid, p. 59

<sup>24</sup>Jean-Victor Poncelet, *Applications*, tome I, p.287-298

<sup>25</sup>Louis- Augustin Cauchy, "Rapport à l'Académie des Sciences, sur un mémoire de M. Poncelet, relatif aux propriétés des sections coniques", *Annales de Mathématiques*, tome XI, 1820/1821; ce texte à été publié et critiqué par Poncelet dans son *Traité*, tome II, p. 553-569

<sup>26</sup>Michel Chasles, p. 198

<sup>27</sup>ibid, p. 200

<sup>28</sup>Gaspard Monge, p. 50-51

cipe dans "*le sentiment d'infaillibilité que les habitudes de l'analyse algébrique ont fait naître en eux*"<sup>29</sup>, précisant que le principe s'applique seulement dans le cas de l'analyse finie de Descartes, autrement dit dans le cas où les équations qui interviennent sont toutes algébriques<sup>30</sup>.

Résumant tout ce qui vient d'être dit, on peut alors définir l'objet géométrique comme ce qui est commun à une famille de figures corrélatives, peu importe alors, lorsqu'on étudie les propriétés de cet objet, qu'on utilise l'une ou l'autre des figures qui représente cet objet et le pas est vite franchi qui dit que la figure devient inutile; c'est le sens de la remarque de Chasles sur la possibilité de s'affranchir d'une figure. En fait cet aspect second de la figure derrière l'objet peut être pensé de deux façons; dans un premier temps, le principe de continuité conduit à s'affranchir de la figure, c'est-à-dire à la fois de ses particularités (les parties secondaires du principe des relations contingentes) et de la complication qu'elle apporte, dans un deuxième temps, et c'est peut-être l'aspect le plus intéressant, ce même principe nous conduit à voir dans une figure la figure générale, c'est-à-dire l'objet géométrique. Ceci nous renvoie au *Programme d'Erlangen* dont nous parlerons plus loin.

Avant de parler du *Programme d'Erlangen*, je parlerai du principe de dualité qui a contribué, peut-être d'une façon plus radicale, à cet effacement de la figure en permettant de développer, à côté du formalisme du calcul littéral, ce que j'appellerai *un formalisme linguistique*<sup>31</sup>. Le principe de dualité est plus radical que la méthode des transformations en ce sens que les éléments qui se correspondent ne sont plus de même nature (droites et points en géométrie plane, points et plans en géométrie dans l'espace); c'est l'étude formelle de la dualité qui a conduit Gergonne à remarquer que la démonstration de la duale d'une propriété est la duale de la démonstration de cette propriété, la transformation devient ici purement linguistique; on peut y voir l'ébauche du point de vue structural moderne. Ce principe linguistique que l'on peut représenter par un dictionnaire, établit une nouvelle forme d'équivalence entre figures et d'une certaine façon fonde un principe général de continuité qu'on retrouve aujourd'hui dans la théorie des catégories, mais nous ne nous étendrons pas sur ce dernier point. Ce principe se traduit encore dans la pratique mathématique des deux façons que nous avons dites ci-dessus: soit la définition d'un objet d'une abstraction supérieure qui représente les objets équivalents par une certaine classe de transformations, objet sur lequel travaille le mathématicien; soit la lecture à travers une situation particulière de la relation générale. Si le premier cas relève de la logique formelle, le second cas s'inscrit dans un élargissement de l'intuition.

Cela nous conduit à la synthèse du *Programme d'Erlangen*. En reliant géométrie, théorie des groupes et théorie des invariants, Klein précise la notion de figures corrélative; la corrélation est définie par le groupe qui structure la géométrie, deux figures sont corrélatives si elles sont transformées l'une de l'autre par une opération du groupe et le principe de continuité devient une tautologie qui dit que deux figures corrélatives ont les mêmes propriétés géométriques. L'introduction des éléments imaginaires est alors définie par les données structurales, c'est-à-dire par le groupe. Nous ne reviendrons pas sur le *Programme d'Erlangen*, nous contentant de citer cette assertion qui, d'une certaine façon, en résume la métaphysique:

---

<sup>29</sup>Michel Chasles, p. 200

<sup>30</sup>ibid, p. 201

<sup>31</sup>Rudolf Bkouche, p. 464-465

*"La Géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme entièrement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection, et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis à vis des modifications apportées par la projection."*<sup>32</sup>

Cela met l'accent sur la double lecture du Programme d'Erlangen, la lecture structurale qui s'appuie sur l'aspect formel des constructions mathématiques, la lecture intuitive insistant au contraire sur les analogies, l'usage des métaphores si l'on veut, lecture qui participe de ces transferts d'intuition dont parle Dieudonné<sup>33</sup>.

La question est donc moins celle de la suppression de la figure comme le laisserait entendre une conception purement structurale des mathématiques qu'un élargissement de l'intuition permettant de lire une situation à travers une autre. Cela nous rapproche, d'une certaine façon du projet perspectiviste, la lecture d'une certaine réalité via le tableau.

Pour terminer cet article, nous reviendrons aux figures, d'une part avec une construction de Brook Taylor, significative de ce que Lambert appellera plus tard la géométrie perspective<sup>34</sup> ( $\square$ ), d'autre part avec un exemple de corrélation au sens que dit Carnot.

Nous rappelons d'abord la construction perspectiviste de Taylor<sup>35</sup>.

On veut représenter les objets d'un plan, dit plan original, sur le plan du tableau, l'oeil étant placé au point **O**; il s'agit donc, un point **A** étant donné dans le plan original, de construire l'intersection  $a$  de la droite  $OA$  avec le plan du tableau. Pour ce faire, Taylor rabat le plan original sur le plan du tableau en tournant autour de la ligne de terre, intersection du plan original et du plan du tableau, en même temps qu'il rabat l'oeil sur le plan du tableau en le faisant tourner autour de la ligne de fuite, intersection du plan parallèle au plan original passant par l'oeil avec le plan du tableau; on remarque alors que le point de fuite d'une direction parallèle au plan original s'obtient en prenant l'intersection de la ligne de fuite avec la parallèle à la direction donnée rabattue sur le plan du tableau. On montre aisément qu'après rabattement, les points **O**, **A**,  $a$  restent alignés; ce qui permet la construction du point  $a$ <sup>36</sup>.

fig 1

Cette construction étant faite, Taylor pose le problème d'effectuer des constructions directes dans le plan du tableau sans recourir au plan original; c'est ainsi qu'il propose une construction point par point d'un cercle de centre donné passant par un point donné du tableau<sup>37</sup>.

fig 2

**O** désigne le rabattement de l'oeil, on note **C** le centre du cercle, **A** le point donné et on veut construire le point **B** du cercle sur un rayon de direction donnée, direction définie par son point de fuite **E** sur la ligne de fuite; le triangle **CAB** étant isocèle de sommet **C**, les angles **CBA** et **CAB** sont égaux; soit alors **D** le point de fuite de

<sup>32</sup>Felix Klein, p. 10

<sup>33</sup>Rudolf Bkouche, Un peu d'histoire p.474; voir aussi l'article de Dieudonné

<sup>34</sup>Roger Laurent, Jeanne Peiffer, p. 219

<sup>35</sup>Brook Taylor, p. 24

<sup>36</sup>Rudolf Bkouche, "La naissance du projectif", p. 264-265

<sup>37</sup>Rudolf Bkouche, "La naissance du projectif", p. 275-276



la droite  $CA$  et  $F$  le point de fuite de la droite  $AB$ , l'égalité des angles  $CBA$  et  $CAB$  implique que  $OF$  partage l'angle  $EOD$  en deux angles égaux, autrement dit  $OF$  est la bissectrice de l'angle  $EOD$ .

La construction précédente s'appuie ainsi sur une lecture de la géométrie du plan original via le tableau, exemple de cette géométrie perspective qui n'est autre que la transformée de la géométrie usuelle par perspective.

Second exemple de cette lecture multiple, nous posons la question: qu'y a-t-il de commun entre les deux propriétés suivantes?

i) Soit une parabole de foyer  $F$  et de sommet  $A$ , si  $M$  est un point de la parabole et  $T$  l'intersection de la tangente en  $M$  avec la tangente en  $A$ , alors l'angle  $MTA$  est droit.

ii) Soient un cercle de diamètre  $AP$ ,  $M$  un point du cercle, la tangente en  $M$  au cercle coupe respectivement les tangentes en  $A$  et en  $P$  aux points  $T$  et  $R$ , alors le produit  $AT.PR$  est indépendant du point  $M$ .

On laisse au lecteur le soin de montrer que les deux figures définies ci-dessus sont corrélatives en considérant la figure suivante:

Soient une conique et  $AP$  une corde, les tangentes en  $A$  et  $P$  se coupent en un point  $Q$ , d'autre part soient  $F$  un point de la droite  $AP$ ,  $I$  et  $J$  les points d'intersection des tangentes à la conique issues de  $F$  avec la tangente en  $P$ . Etant donné un point  $M$  à la conique, on note  $T$  l'intersection des tangentes en  $M$  et en  $A$  à la conique, la droite  $FT$  recoupe la tangente en  $P$ . On montre alors que les quatre points  $RSIJ$  forment une division harmonique.

Un autre exemple de figures corrélatives est donné par la géométrie anallagmatiques (la géométrie de l'inversion). On sait qu'il existe trois classes de faisceaux de cercles, les faisceaux à points de base, les faisceaux à points limites et les faisceaux de cercles tangents en un point; ses trois classes sont représentées respectivement par un faisceau de droites concourantes, par un faisceau de cercles concentriques et par un faisceau de droites parallèles et on peut ainsi obtenir toutes les propriétés des faisceaux de cercles en étudiant seulement ces trois types de faisceaux. Par exemple on sait qu'un faisceau de cercles étant donné, un cercle orthogonal à deux cercles du faisceau est orthogonal à tous les cercles du faisceau, ce qui est une évidence si l'on travaille sur les faisceaux particuliers définis ci-dessus. On laisse au lecteur le soin de regarder les faisceaux de cercles sur une sphère.

La figure apparaît ainsi comme une représentation d'une situation générale, situation qui définit l'objet géométrique. Mais ici l'objet géométrique ne se réduit pas à l'objet idéal platonicien, la figure ne représente l'objet que dans un contexte, celui défini par les corrélations, c'est-à-dire la famille de transformations que l'on considère. Ainsi toutes les coniques s'équivalent dans la cadre de la géométrie projective (c'est le cas du second exemple donné ci-dessus) tandis que cercles et droites sont équivalents du point de vue de la géométrie anallagmatique.

Mais cette conception de la figure comme représentation d'une situation mathématique implique moins sa disparition que de nouvelles formes de lecture de cette figure. C'est l'un des aspect de la modernité mathématique que cette lecture multiple, moins l'étude du particulier à partir d'un général défini *a priori* que la reconstruction d'un général à travers des situations particulières, c'est-à-dire la reconnaissance de corrélations (pour employer le langage des géomètres de la première partie du XIXème siècle) ou la reconnaissance des structures (pour employer le langage moderne de Bourbaki). C'est aussi l'un des points forts de l'enseignement des mathématiques que l'apprentissage de cette lecture multiple.

## Bibliographie

- Antoine Arnauld, Pierre Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser*, (1662, cinquième édition 1685), Flammarion, Paris 1970
- Evelyne Barbin, "La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques", *Bulletin APMEP* n° 336, décembre 1988
- Rudolf Bkouche, "La naissance du projectif" in *Mathématiques et Philosophie* (édité par Roshdi Rashed), Editions du CNRS, Paris 1991
- Rudolf Bkouche, "Un peu d'histoire" in Daniel Lehmann, Rudolf Bkouche, *Initiation à la Géométrie*, PUF, Paris 1988,
- Lazare Carnot, *Géométrie de Position*
- Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), réédition Jacques Gabay, Paris 1989
- René Descartes, *Discours de la Méthode* (1637), réédition Fayard, Paris 1986
- Jean Dieudonné, *The Universal Domination of Geometry*, ICME IV, Berkeley 1980
- Pierre de Fermat, "Dissertation en trois parties", in *Oeuvres* (publiées par Paul Tannery et Charles Henry), GauthierVillars, Paris 1896
- Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974
- Jean-Louis Lagrange, *Mécanique Analytique* (1788), réédition Blanchard, Paris 1965/ Jacques Gabay, Paris 1989
- Roger Laurent, Jeanne Peiffer, *La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective*, Cedic/Nathan, Paris 1987
- Gaspard Monge, *Géométrie descriptive* (1899), réédition Jacques Gabay, Paris 1989
- Louis Poinsot, "Théorie nouvelle de la rotation des corps", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1851, p. 9-72, 73-129, 289-336
- Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (2 volumes, le premier volume a été publié pour la première fois en 1822), Gauthier-Villars, Paris 1865-1866
- Jean-Victor Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie* (2 volumes), Gauthier-Villars, Paris 1862-1864
- Brook Taylor, *Linear Perspective*, London 1715