

La géométrie élémentaire, une science physique ?

Rudolf Bkouche

IREM de Lille

"Geometry is a physical science."¹

W. K. Clifford

Introduction

La géométrie : science mathématique ou science physique ?

Cette question est moins celle du statut de la géométrie que celle des relations entre sciences mathématiques et sciences physiques, question d'autant plus difficile lorsque l'on sait que la signification des termes "mathématique" et "physique" s'est transformée au cours de l'histoire et par conséquent la relation entre ces deux domaines de la science.

Cela nous demande de revenir sur la signification de ces termes d'abord à l'époque de la naissance de la géométrie rationnelle telle que l'ont développée les géomètres grecs, ensuite à l'époque moderne, celle de la Révolution Scientifique au XVII^{ème} siècle, enfin à l'époque contemporaine marquée par la naissance des géométries non-euclidiennes et le développement des méthodes formalistes.

Cependant avant de commencer cette étude nous énoncerons deux propriétés géométriques, posant la question de leur appartenance aux mathématiques ou à la physique.

Le premier théorème, un des fleurons de la géométrie grecque, énonce qu'il existe, à similitude près, cinq polyèdres réguliers et cinq seulement, propriété que l'on peut opposer à celle qui dit que dans le plan existe, pour tout entier $n \geq 3$, un n -gone et un seul défini à similitude près.

Le second théorème, à l'origine de la topologie algébrique, est la formule d'Euler qui énonce que pour tout polyèdre convexe, si l'on note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, f le nombre de faces, alors

$$s - a + f = 2$$

Ces deux énoncés sont considérés traditionnellement comme des énoncés mathématiques, mais si l'on considère que ces deux théorèmes énoncent des propriétés profondes de l'espace on peut affirmer qu'ils participent de l'étude des corps solides, donc des sciences physiques.

Notons cependant une différence entre ces deux énoncés. Si la formule d'Euler peut être approchée empiriquement, à partir de quelques situations particulières², l'assertion

¹William K. Clifford, *the common sense of the exact sciences*, Dover, New York 1955, p. 43. L'ouvrage de Clifford a été publié après sa mort en 1885 par Pearson, le chapitre "Space" dont est extrait l'assertion citée a été écrit en 1875 (cf. la préface de Pearson, p. lxiii)

²Les travaux d'Euler sur les polyèdres sont développés dans deux mémoires. Dans le premier mémoire d'Euler ("Elementa Doctrinae Solidorum", *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/1753),

concernant les polyèdres réguliers résulte du seul raisonnement, autrement dit c'est le raisonnement qui nous permet ici d'appréhender l'une des propriétés profondes de l'espace.

La physique moderne, issue de ce que l'on appelle la Révolution Scientifique du XVII^{ème} siècle, nous a habitués à cette appréhension purement déductive des propriétés du monde, l'expérience ayant pour objet moins de découvrir ces propriétés que de les vérifier une fois connues, vérification qui s'appuie sur un discours théorique déjà construit, et l'on sait que les instruments utilisés pour cette vérification sont eux-mêmes construits à partir des résultats théoriques. Ainsi Bachelard, après avoir rappelé que "*les instruments ne sont que des théories matérialisées*"³, écrit

"Après avoir formé, dans les premiers efforts de l'esprit scientifique, une raison à l'image du monde, l'activité spirituelle de la science moderne s'attache à construire un monde à l'image de la raison. L'activité scientifique réalise, dans toute la force du terme, des ensembles rationnels."

Mais contrairement au discours bachelardien qui place cette transformation de la raison scientifique dans la science du XX^{ème} siècle, on peut considérer que cette transformation a commencé avec la géométrie grecque. Si la physique aristotélicienne, en se voulant au plus proche de la connaissance intuitive, participe de la construction d'une raison à l'image du monde, la géométrie grecque, telle qu'elle a été codifiée par Euclide, participe de la rationalisation du monde, la découverte des polyèdres réguliers en étant l'une des marques les plus profondes. En ce qui concerne la mécanique, cette transformation aura lieu avec la géométrisation du temps telle qu'elle apparaît avec la Révolution scientifique du XVII^{ème} siècle. La mathématisation croissante des sciences de la nature et la naissance des méthodes formalistes au début du XX^{ème} siècle renforceront cette emprise du rationnel sur le réel, renforcement qui apparaît comme un renouvellement de la pensée scientifique. Mais ce *nouvel esprit scientifique*, pour reprendre une expression de Bachelard, s'inscrit dans une histoire de la mathématisation des sciences de la nature. Nous reviendrons ci-dessous sur le terme "mathématisation".

Mathématiques et physique dans le corpus aristotélicien

Rappelons d'abord comment Aristote exprime dans la *Physique* la distinction entre le "mathématique" et le "physique" :

1758, p. 109-140) l'approche est essentiellement expérimentale, c'est à partir de situations déjà connues (en particulier les polyèdres réguliers) qu'Euler conjecture la formule qu'il tentera de démontrer dans un second mémoire ("Démonstration Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hædris Planis Inclusa Sunt Prædita", *Novi commentarii academix scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/1753), 1758, p. 140-160). Ultérieurement Cauchy ("Recherche sur les Polyèdres", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1811, p.) puis Jordan ("Recherches sur les polyèdres", *J. für die Reine und Angew. Math.*, Bd. LXVI, 1866, p. 22-91) donneront des démonstrations de la formule d'Euler que l'on peut encore considérer comme des démonstrations de type expérimental.

³Gaston Bachelard, *Le Nouvel Esprit Scientifique*, "Nouvelle Encyclopédie Scientifique", PUF, Paris 1934/1973, p. 16

"La géométrie étudie la ligne physique en tant qu'elle n'est pas physique ; au contraire, l'optique étudie la ligne mathématique, non en tant que mathématique, mais en tant que physique."⁴

Cette distinction peut être précisée si l'on revient sur le sens des termes "mathématique" (μαθηματικην) et "physique" (φυσικησ) chez Aristote. Le terme φυσικησ renvoie à la connaissance de la nature, c'est-à-dire aux objets de la connaissance empirique, le terme μαθηματικην renvoie à la connaissance scientifique, celle que nous atteignons par la démonstration. Ainsi Aristote distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique, ici la ligne considérée comme rayon lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif. On peut alors considérer que c'est *via* l'activité de raisonnement que se constitue l'objet mathématique ; dans une perspective gonséthienne, on pourrait dire qu'un objet de connaissance devient objet mathématique dès qu'il devient objet de discours démonstratif. En ce sens c'est la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, autrement dit, y compris dans les mathématiques euclidiennes, c'est le langage qui modèle les objets. Il faut alors, pour éviter tout malentendu, distinguer entre la chose qui nous est donnée par la connaissance empirique et l'objet, lequel représente la chose *via* le discours.

C'est cette réduction au discours qui constitue la science rationnelle, celle qui se construit *via* le raisonnement comme l'explique Aristote dans les *Seconds Analytiques* :

"Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration."⁵

Cela nous amène à faire deux remarques.

Ce que nous appelons aujourd'hui les sciences mathématiques, lesquelles participent selon certains des sciences formelles, a un sens différent de celui que lui donnaient les Grecs. Nous pourrions rappeler ici le terme néerlandais *wiskunde* introduit par Stevin pour désigner les mathématiques, lequel terme désigne la science.

Quant aux sciences physiques, la mathématisation de la physique telle qu'elle est apparue au XVII^{ème} siècle a permis d'insérer la mécanique dans ce que l'on appelait alors la *mathesis universalis* ; en ce sens la physique moderne mathématisée s'inscrit dans le programme aristotélicien des *Seconds Analytiques*⁶. Ainsi la physique est devenue un chapitre des mathématiques à condition de donner au terme "mathématique" un sens plus large que celui qui réduit les mathématiques à leur seul caractère de science formelle. Mais on peut dire aussi que les mathématiques sont un chapitre de la physique dans la mesure où elles prennent leur source dans le monde et où elles sont un moyen de connaître une part du monde. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de l'exposé.

Géométrie et corps solides

⁴Aristote, *Physique*, texte établi et traduit par Henri Carteron, Les Belles Lettres, Paris 1973, Livre II, p. 63, 194 a,

⁵Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979, p. 8

⁶On peut alors considérer que la physique n'a pu réaliser le programme des *Seconds Analytiques* qu'en prenant ses distances d'avec le monde qu'elle se proposait d'étudier.

"Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie"⁷ écrit Poincaré dans *La Science et l'Hypothèse*, mettant ainsi l'accent sur l'objet d'étude de la géométrie élémentaire.

La géométrie élémentaire, celle que nous ont léguée les Grecs, a pour objet d'étude les propriétés des corps solides quant à leur forme et à leur grandeur. Un corps solide peut être défini comme un corps dont la forme et la grandeur restent invariables lorsqu'ils se meuvent. Notons qu'une lecture purement formelle de cette définition pose problème ; si l'égalité est définie par le mouvement, il faut alors définir la notion de mouvement, et plus précisément la définition de mouvement sans déformation⁸, c'est-à-dire celui qui conserve la forme et la grandeur, ce qui renvoie à une circularité. Pour éviter une telle circularité, on peut considérer que les notions de corps solides et de mouvement sont issues de l'expérience du monde et que la géométrie a pour objet d'étudier les propriétés des corps solides, lesquelles restent invariantes par le mouvement, autrement dit d'explicitier les relations entre corps solides et mouvement. Une lecture empiriste des *Eléments* d'Euclide permet alors de sortir du cercle, la géométrie a moins pour objet de définir les corps solides que d'explicitier les propriétés d'invariance des corps solides par rapport au mouvement, corps solides et mouvement relevant de la connaissance empirique. Une telle lecture s'inscrit dans le programme de la *mathesis universalis*, laquelle n'est autre que la construction de la science rationnelle.

Deux corps solides sont égaux lorsqu'ils ont même forme et même grandeur ce que l'on peut reconnaître à la possibilité de les superposer. Cette possibilité pose problème ; si on peut vérifier que deux corps solides plans, deux plaques planes par exemple, sont égaux en les superposant, cette opération est impossible pour des corps solides tridimensionnels : comment superposer deux cubes en bois égaux ? Cette difficulté exige d'énoncer des critères permettant d'affirmer *a priori* que deux corps solides sont égaux.

Notons que les *Eléments* d'Euclide proposent une définition plus large de l'égalité, l'égalité de grandeur, puisqu'ils considèrent comme égaux deux triangles ayant même aire⁹. Nous restreignons ici l'usage du terme "égalité" à la seule relation "*même forme et même grandeur*" ; c'est celle qui est assurée par le principe de l'égalité par superposition que nous énoncerons sous la forme :

Deux objets que l'on peut superposer sont égaux.

Ce principe s'appuie sur le mouvement et par cela-même renvoie à la connaissance empirique. La construction d'une géométrie rationnelle implique que l'on énonce des critères d'égalité qui évitent tout recours à l'expérience pour ne s'appuyer que sur le seul discours démonstratif, ce sera le rôle des cas d'égalité des triangles. Nous ne reviendrons pas ici sur le rôle de ces critères dans l'élaboration de la géométrie rationnelle, renvoyant à l'un

⁷Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), Flammarion, Paris 1968, p. 86

⁸Notons que pour Aristote le terme "mouvement" désigne le changement en général, le mouvement proprement dit étant appelé le mouvement local. Il faut alors définir parmi les mouvements locaux ceux qui conservent la forme et la grandeur des corps solides (cf. Aristote, *Catégories*, traduction Tricot, Vrin 1977, p. 72-75).

⁹Pour lever ces difficultés terminologiques, Legendre propose d'appeler *équivalentes* deux figures planes ayant même aire (cf. Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823, p. 60)

de nos précédents articles¹⁰. Nous nous bornerons ici à expliquer comment les cas d'égalité permettent d'éliminer le mouvement de la géométrie : en effet une fois démontrés ces cas d'égalité, qu'il faut considérer comme des critères de superposition, il suffit, pour montrer l'égalité de deux corps ou de deux figures, de s'appuyer sur ces cas d'égalité et leurs conséquences. En ce sens les cas d'égalité jouent un rôle fondamental dans la mise en place de la géométrie rationnelle.

Rappelons que dans les *Eléments* d'Euclide seule la démonstration du premier cas d'égalité des triangles (la proposition 4 du Livre I) s'appuie sur la superposition, exemple classique de démonstration de type expérimental en ce sens qu'elle décrit ce que l'on appelle aujourd'hui une expérience de pensée. Ce premier cas d'égalité permet de se passer de la superposition et ainsi d'éliminer tout recours au mouvement dans la suite de l'exposé euclidien, y compris dans la démonstration des deux autres cas d'égalité¹¹.

On peut voir dans les *Eléments* d'Euclide un mode exemplaire de construction d'un discours rationnel s'appuyant sur des données de la connaissance mondaine (les corps solides et les figures qui les représentent) ; si les définitions, postulats et axiomes jouent le rôle d'énoncés premiers, ces énoncés renvoient à une connaissance intuitive des objets étudiés. Une fois ces énoncés explicités, on peut mettre en place le discours démonstratif qui permet, à partir des vérités premières énoncées par les axiomes et les postulats, d'énoncer de nouvelles propriétés des objets étudiés qui sont autant de vérités du monde. Ainsi se développe une forme de connaissance du monde fondée par le seul usage d'un discours convenablement réglé permettant non seulement de connaître ces vérités mais aussi les raisons de ces vérités. C'est cela qui fonde la nécessité des vérités connues par la voie de la démonstration, ces vérités non seulement sont vraies mais ne peuvent pas ne pas être vraies.

Un autre aspect de l'usage de la démonstration réside dans la réduction des objets étudiés à des objets de discours, c'est sur les objets de discours que porte le raisonnement montrant ainsi ce fait remarquable que le discours rationnel, s'il constitue ce que l'on pourrait appeler une réduction langagière du monde, permet une connaissance du monde. La connaissance rationnelle se construit ainsi comme une réduction du monde *via* le langage. Il est alors remarquable que cette réduction langagière soit efficace et on peut voir ici une première forme de ce que Wigner a appelé la déraisonnable efficacité des mathématiques dans la connaissance des sciences de la nature¹², mais il faut donner au terme "mathématiques" le sens plus général de *mathesis universalis*. Il importe de noter que cette réduction langagière n'est pas formaliste au sens moderne de ce terme. Pour les géomètres grecs le langage parle des objets et les propriétés énoncées concernent les objets¹³ ; c'est en ce sens que les objets du discours géométrique représentent ce que l'on appelle les *idéalités mathématiques*, que l'on peut considérer comme des constructions de l'esprit humain, lesquelles permettent de parler des objets du monde empirique¹⁴. Notons que la

¹⁰Rudolf Bkouche, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles", *Bulletin de l'APMEP* n°430, septembre-octobre 2000, p. 613-629

¹¹Euclide recourt encore une fois au mouvement dans le livre XII des *Eléments* pour définir la sphère comme la surface obtenue par rotation d'un cercle autour de l'un de ses diamètres (Livre XII, définition 14).

¹²E.P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960, p. 1-14

¹³sur les limites de cette conception nous renvoyons à l'ouvrage de Umberto Eco, *Kant et l'ornithorynque* (1997), traduit de l'italien par Julien Gayraud, Grasset, Paris 1999

¹⁴Il faut alors distinguer les idéalités mathématiques des constructions formelles hilbertiennes dont l'usage se veut indépendant de toute signification antérieure au langage.

construction de ces idéalités leur confère une existence objective dans la mesure où elles ne dépendent plus de la façon dont elles ont été construites, c'est en ce sens que l'on peut parler d'une ontologie de ces idéalités qui conduit à renverser l'ordre de la connaissance, les objets empiriques originaux devenant de simples reproductions, plus ou moins grossières, de ces idéalités¹⁵.

Géométrie et Mécanique

Précisons d'abord un point de terminologie : le terme *mathématisation* que nous utiliserons dans la suite de cet exposé signifie moins une application des mathématiques¹⁶ à un domaine de la science que l'entrée du domaine de la science considéré dans la *mathesis universalis* au sens donné ci-dessus. C'est en ce sens que l'on peut parler de la mathématisation de la physique considérée comme science de la nature, la philosophie naturelle du XVII^e siècle, dont Newton se proposait d'explicitier les principes mathématiques qui la guide dans son ouvrage dont nous rappelons le titre complet : *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*¹⁷.

Cette mathématisation de la physique a commencé par la mécanique considérée comme science du mouvement mais cette mathématisation s'appuie, selon Newton, sur le fait que la géométrie s'inscrit dans une mécanique universelle dont elle n'est que la partie consacrée à l'art de mesurer. C'est ce qu'explique Newton dans la préface des *Principia* :

*"Geometry does not teach us to draw these lines (right lines and circles), but requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but no geometrical problems. The solutions of these problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, when so solved, is shown; and it is the glory of geometry that from those few principles brought from without, it is able to produce so many things. Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring."*¹⁸

Newton distingue alors la géométrie comme science de la grandeur (*magnitude*) des corps et la mécanique comme science du mouvement des corps.

Il peut alors donner une exposition déductive de la mécanique en s'appuyant sur le modèle euclidien ce qui permet de considérer les *Principia* comme une continuation des *Eléments*. Mais cette exposition déductive a un prix, la géométrisation du temps, c'est-à-dire la réduction du temps à une idéalité sur le modèle des idéalités géométriques : le temps ne représente plus cette notion complexe liée au devenir, il n'est qu'une forme qui permet d'étudier le mouvement que Newton définit de la façon suivante :

¹⁵On peut considérer la philosophie platonicienne comme l'expression de ce renversement.

¹⁶J'ai dit ailleurs combien l'expression "application des mathématiques" était ambiguë et combien il fallait s'en méfier.

¹⁷Isaac Newton, *Principia*, Motte's translation revised by Cajori (2 volumes), University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1934/1962

¹⁸Isaac Newton, *Principia*, o.c. volume I, p. xvii

"Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equally without relation to anything external..."¹⁹

Notons la référence au mouvement uniforme ("*flows equally*") qui apparaît comme un cercle analogue à celui dont nous avons parlé plus haut à propos des relations entre corps solides et mouvement. Il faut alors comprendre qu'il s'agit moins de relier la définition du temps au mouvement uniforme que de définir le temps comme étant lui-même un mouvement uniforme de référence qui permet de mesurer les autres mouvements. Le mouvement d'un corps n'est plus lié à son devenir pour n'être plus que la correspondance qui associe à chaque instant la position du corps.

En ce sens le temps newtonien est statique ; ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrisation du temps n'est pas la simple représentation du temps par une droite, elle exprime une *statification* du temps, c'est cette statification du temps et par conséquent du mouvement, ce que l'on pourrait appeler *la réduction du devenir à l'être*, qui a permis de développer une théorie mécanique déductive répondant au programme des *Seconds Analytiques*. La mécanique rationnelle ainsi construite permet alors une réduction des phénomènes liés au mouvement analogue à celle opérée par la géométrie grecque pour les corps solides, ici encore les objets de discours ainsi construits renvoient à de nouvelles idéalités mathématiques.

Mathématiques pures et mathématiques mixtes

Contrairement à la mécanique dont la récente mathématisation prenait encore en compte le caractère empirique originel, permettant le développement au XVIIIème siècle d'une philosophie empiriste, la géométrie représentait un bloc rationnel qui pouvait amener à penser qu'elle était rationnelle par essence.

C'est ce que montrent les grandes tentatives de classification des sciences qui se développent à l'époque classique, celle de Bacon et celle de D'Alembert qui distinguent *mathématiques pures* et *mathématiques mixtes*²⁰.

Ainsi D'Alembert écrit dans la rubrique "Mathématiques" de l'*Encyclopédie* :

"Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle Mathématiques pures, considère la propriété de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second cas par l'étendue ; dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique ; dans le second, Géométrie.

La seconde classe s'appelle Mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers."²¹

¹⁹*ibid.* o.c. p. 6

²⁰Ces classifications des sciences sont exposées par D'Alembert dans le *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (1759/1763) (Editions Gonthier, Paris 1965). Bacon, p. 171-175, D'Alembert, p. 179-182.

²¹*Encyclopédie Méthodique, Mathématiques* (3 tomes), Paris-Liège 1784-1785, réédition ACL, Paris 1987, tome second, p. 366

D'Alembert, qui est l'auteur de l'article "Mathématiques", précise ensuite :

"Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, etc."

Dans l'article "Mathématiques", D'Alembert se contente de citer les grandes divisions des Mathématiques mixtes sans entrer plus avant dans leur définition et renvoie au *Discours Préliminaire* pour plus de précision.

La question peut alors se poser de ce qui caractérise les mathématiques mixtes : en quoi sont-elles mathématiques ? que signifie le terme *mixtes* opposé au terme *pures* ?

Le terme *mixtes* laisse entendre une part de connaissance empirique dans la définition des mathématiques mixtes ; on peut alors essayer d'explicitier l'opposition pures/mixtes *via* les termes *abstrait* et *concret* utilisés dans le texte de l'*Encyclopédie* : les mathématiques pures étudient la grandeur en tant qu'elle est considérée comme abstraite alors que les mathématiques mixtes s'intéressent aux grandeurs concrètes, ce qui ne fait que repousser la question. D'autant que D'Alembert explique le rôle de l'abstraction dans la construction de la science, écrivant :

*"L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres."*²²

L'abstraction participe ainsi de la problématisation, c'est-à-dire de l'organisation de l'ensemble des questions que nous nous posons lorsque, confrontés à certaines situations, nous essayons de les comprendre, questionnement qui conduit à expliciter les propriétés que nous nous proposons d'étudier à propos de cette situation. L'abstraction (l'activité d'abstraction) est ainsi constitutive de toute connaissance scientifique.

Revenant à la part de connaissance empirique intervenant dans la définition de la grandeur concrète, on peut alors poser la question : pourquoi la géométrie est-elle classée parmi les mathématiques pures alors que la mécanique est classée parmi les mathématiques mixtes ? Pour préciser cette question nous reviendrons aux articles "Géométrie" et "Mécanique" de l'*Encyclopédie*, articles tous deux écrits par D'Alembert.

*"Géométrie est la science des propriétés de l'étendue en tant qu'on la considère comme étendue et figurée."*²³

Dans les lignes qui suivent, D'Alembert rappelle l'étymologie du terme *géométrie* et par conséquent l'origine empirique du domaine de la connaissance défini par ce terme. La géométrie est ainsi définie comme provenant de l'abstraction de connaissances empiriques antérieures, reste alors à expliciter le mode d'abstraction qui conduit de la géométrie empirique à la géométrie mathématique et le rôle joué par la démarche hypothético-déductive, point sur lequel nous reviendrons. La définition même de la géométrie donnée par D'Alembert prend en charge ce processus d'abstraction, processus que l'on peut considérer au XVIII^{ème} siècle comme achevé. C'est en ce sens que la géométrie, devenue

²²Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 29

²³*Encyclopédie*, o.c. tome second, p. 128

science des propriétés de cette entité *abstraite* qu'est l'étendue, participe, selon D'Alembert, des mathématiques pures.

*"Mécanique, partie des mathématiques mixtes, qui considère le mouvement et les forces motrices, leur nature, leurs lois et leurs effets dans les machines"*²⁴

La part d'empirisme est ici donnée par le mouvement ; c'est donc le mouvement qu'il faut mathématiser, ce qui permettra de réduire la mécanique à une théorie hypothético-déductive analogue à la géométrie rationnelle telle qu'elle est exposée dans les *Eléments* d'Euclide, lesquels resteront jusqu'au XIX^{ème} siècle l'exemple paradigmatique d'un exposé hypothético-déductif²⁵.

En comparant avec le texte de Newton cité ci-dessus, on voit que la place de la géométrie est ambiguë, à la fois participant des mathématiques pures pour des raisons qui relèvent essentiellement de la tradition, et des mathématiques mixtes par leur origine empirique. Cette reconnaissance de la part d'empirisme de la connaissance géométrique est ancienne comme l'explique Neugebauer à propos d'Archytas de Tarente qui opposait l'arithmétique à la géométrie, celle-ci ne pouvant donner des preuves aussi satisfaisantes que celle-là²⁶, mais on peut penser que la tradition d'une géométrie purement rationnelle est devenue d'autant plus prégnante que la réduction langagière, en mettant en avant les idéalités mathématiques, a pu occulter la part d'empirisme de la connaissance géométrique. On peut noter, même s'il le fut à moindre échelle, que le caractère rationnel de la mécanique a conduit, dans l'enseignement supérieur français, à placer la mécanique parmi les sciences mathématiques, même si les grands traités de mécanique rationnelle ont toujours mis l'accent sur le caractère expérimental de la mécanique, tout cela pour dire combien est floue la frontière entre le rationnel et l'expérimental, ce que Ferdinand Gonseth résume de la façon suivante :

*"Dans toute expérimentation il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique), il y a un résidu intuitif."*²⁷

et il précise :

"La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que de tendances, mis non d'essence."

²⁴*ibid.* p. 370

²⁵Nous distinguons deux types d'exposés hypothético-déductifs, l'exposé de type euclidien qui suppose donnés des objets, les axiomes n'étant que les relations premières (évidentes par elles-mêmes !) entre ces objets et l'exposé de type hilbertien dont les objets ne sont que des mots, les termes primitifs de la théorie, termes reliés par les axiomes qui ne sont eux-mêmes que des assertions premières sans autre signification qu'elles mêmes. Dans notre article "La démonstration : du réalisme au formalisme" (in *La Démonstration, Mathématiques et Philosophie*, coordonnée par Michèle Villetard-Tainmont, IREM de Lille, avril 2003"), nous posons la question des raisons qui ont conduit les mathématiciens à passer du point de vue euclidien au point de vue hilbertien.

²⁶O. Neugebauer, *The Exact Science in Antiquity*, Dover Publications, New York, 1969, p. 148

²⁷Ferdinand Gonseth, *Les Fondements des Mathématiques*, préface de Jacques Hadamard, Blanchard, Paris 1926/1974, p. 107

Plus tard Gonthier explicitera les trois aspects de la connaissance géométrique, l'intuitif, l'expérimental et le théorique, insistant sur l'articulation entre ces trois aspects, ce qu'il appelle une synthèse dialectique²⁸.

Le séisme non-euclidien

La relation entre géométrie mathématique et géométrie physique se posera sous une forme différente avec les géométries non-euclidiennes.

Parmi les postulats énoncés par Euclide dans les *Eléments*, le cinquième, dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, pose problème par son caractère non évident.

*"Si une droite tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits."*²⁹

Rappelons que ce postulat sert à démontrer la proposition 29 du Livre I qui énonce l'égalité des angles alternes-internes découpés par une sécante sur deux droites parallèles ; cette proposition étant elle-même la réciproque de la proposition 27, il semblait raisonnable d'en donner une démonstration et c'est pour assurer celle-ci qu'Euclide énonce son cinquième postulat dont la démonstration de la proposition 29 apparaît comme une simple paraphrase. On peut considérer le recours au cinquième postulat comme la marque d'un échec, dont Euclide lui-même était peut-être conscient, ce qui explique les nombreuses tentatives de démonstration de ce postulat qui vont se développer tout au long de l'histoire de la géométrie³⁰, d'autant que les deux ingrédients les plus importants dans le développement de la géométrie grecque, la méthode des aires et la théorie des proportions géométriques, en sont des conséquences. C'est l'absence de démonstration de cette propriété nécessairement vraie mais non évidente qui conduit D'Alembert à la présenter comme le "scandale" de la géométrie³¹.

Les tentatives de démonstration du cinquième postulat ont conduit à énoncer des propriétés équivalentes, parmi elles l'existence de triangles semblables non égaux, propriété que Laplace considérait plus évidente que l'énoncé euclidien et proposait d'adopter comme postulat de la géométrie. Une autre propriété équivalente est celle qui dit que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits³².

²⁸Ferdinand Gonthier, *La Géométrie et le Problème de l'Espace* (6 volumes), Editions du Griffon, Neuchâtel 1945-1955. Pour une présentation des conceptions de Gonthier nous renvoyons aux articles de Rudolf Bkouche, "Quelques remarques sur la démonstration (autour de la philosophie de Gonthier)" in *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7^{ème} colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon mai 1989), IREM de Besançon et IREM de Lyon 1990, et Houria Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonthier" in *La Figure et l'Espace*, Actes du 8^{ème} Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Lyon 1991), IREM de Lyon 1993.

²⁹Euclide, *Les Eléments*, volume 1, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaire par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990 p. 175

³⁰Bonola, *Non-euclidean geometry* (1912), translated by H. S. Carslaw, Dover Publications, New York 1955 et Jean-Claude Pont, *L'Aventure des Parallèles*, Peter Lang, Berne 1986

³¹Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 318

³²Notons que si le postulat des parallèles implique que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, la réciproque suppose que la géométrie est archimédienne (cf. Legendre, *Eléments de Géométrie*, o.c. p. 26-27).

Parmi les tentatives de démonstration du postulat des parallèles, nous citerons celle de Ibn Al Haytham, reprise par au XVIII^{ème} siècle par Lambert, qui consiste à montrer qu'un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle, et celle de Al-Khayyam, reprise au XVIII^{ème} siècle par Saccheri, qui se propose de montrer que si un trapèze isocèle a un angle droit, c'est un rectangle. Ces tentatives feront apparaître le lien entre le postulat des parallèles et l'existence de rectangles. Ibn Al-Haytham et Al-Khayyam s'appuient sur un raisonnement par l'absurde, raisonnement qui sera repris, sans que l'on en connaisse la filiation, par Saccheri et Lambert.

Ibn Al-Haytham considère un quadrilatère ayant trois angles droits et pose la question du quatrième angle : droit, obtus ou aigu. S'il est droit la géométrie est euclidienne ; on peut montrer, sous l'hypothèse archimédienne, que l'angle obtus est contradictoire au fait que l'on peut toujours prolonger une droite ; le cas de l'angle aigu est plus difficile et Ibn Al-Haytham s'appuie sur le postulat suivant :

*"Une droite de longueur constante, qui se meut orthogonalement sur une autre droite située dans un même plan, engendre par son extrémité libre une droite parallèle à la droite sur laquelle elle se meut, et toutes les perpendiculaires abaissées de l'une sur l'autre sont égales."*³³

énoncé dont on peut montrer qu'il est équivalent au cinquième postulat.

Lambert reprend le problème autrement. Il remarque que l'hypothèse de l'angle obtus correspond à la géométrie sphérique et que l'on obtient l'hypothèse de l'angle aigu en considérant une sphère de rayon imaginaire. Il définit ainsi trois géométries, celle de l'angle droit (l'euclidienne), celle de l'angle obtus (la sphère), celle de l'angle aigu (la sphère de rayon imaginaire). La géométrie du plan ne peut alors être que la géométrie de l'angle droit.

D'autres exemples de géométries distinctes de la géométrie usuelle seront étudiés, telles celles de Schweikert ou de Taurinus³⁴. Cependant, parmi toutes ses constructions, seule la géométrie euclidienne représente le plan usuel. La géométrie non-euclidienne apparaîtra lorsque l'on pensera que le plan usuel pourrait ne pas être euclidien.

C'est cela que dit Gauss dans une lettre de 1817 à Olbers :

"J'en viens de plus en plus à la conviction que la nécessité de notre géométrie ne peut pas être démontrée, ou du moins qu'elle ne peut pas l'être par la raison humaine ni pour la raison humaine. Peut-être atteindrons-nous, dans une autre existence, une compréhension de la nature de l'espace qui nous est maintenant inaccessible.

*Jusque là, il nous faut mettre la géométrie au même rang que l'arithmétique dont la vérité est purement a priori, mais plutôt au même rang que la mécanique"*³⁵

C'est la question de la vérité physique du postulat des parallèles qui est posée, ainsi c'est une question de physique qui conduira à penser la possibilité d'une géométrie non-euclidienne.

³³Khalil Jaouiche, *La Théorie des Parallèles en Pays d'Islam*, Vrin, Paris 1986, p. 65 ; la traduction du texte d'Ibn Al-Haytham est donnée p. 162.

³⁴Bonola, *Non-euclidean geometry* o.c. p. 75-83

³⁵ cité et traduit par Gonthier in *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, volume VI, "Le Problème de l'Espace", Editions du Griffon, Neuchâtel 1955, p. 94

De l'échec des tentatives de démonstration du postulat des parallèles, trois géomètres de la première partie du XIX^{ème} siècle, Gauss³⁶, Bolyai³⁷, Lobatchevski³⁸, émettront l'idée que ce postulat peut ne pas être vraie et construiront une géométrie fondée sur la négation de ce postulat conduisant à l'idée que par un point hors d'une droite on peut mener plusieurs droites du plan défini par le point donné qui ne rencontrent pas la droite donnée.

On voit ici poindre l'idée d'une pluralité de géométries possibles. Cette pluralité posera un double problème :

D'une part un problème logique, qu'est-ce qui guide le raisonnement dans une telle géométrie qui fait apparaître des objets différents de nos habitudes, ainsi un quadrilatère ayant trois angles droits et dont le quatrième ne l'est pas ? Ce problème est d'autant plus fort que les textes fondateurs de la géométrie non-euclidienne sont rédigés dans un style euclidien et qu'il n'est pas toujours facile, pour le lecteur, de s'assurer de la justesse des raisonnements. Cette question logique doit être reliée à ce que l'on a appelé, à la fin du XIX^{ème} siècle, la *crise des fondements* et nous ne l'aborderons pas ici.

D'autre part un problème physique, s'il existe plusieurs géométries incompatibles entre elles, laquelle est la géométrie de notre espace, la *vraie* géométrie pourrait-on dire ?

Notons que Lobatchevski abordait en 1835 cette question sous la forme suivante :

*"En réalité, dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement : c'est lui qui rend possibles les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement et, pour cette raison, l'espace en lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous (souligné par nous)."*³⁹

et pour préciser cette conception du caractère artificiel⁴⁰ des constructions géométriques, Lobatchevski ajoutait :

"Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines forces de la nature suivent une géométrie et d'autres leur géométrie propre."

Ainsi Lobatchevski non seulement mettait en cause l'unité mathématique de la géométrie mais il posait la question de son unité physique pour représenter le monde.

³⁶Gauss n'a rien publié de son vivant *"par crainte des clameurs des Béotiens"* comme il l'écrit à Bessel. Cependant son traité de 1827 sur les surfaces et l'étude des triangles géodésiques (c'est-à-dire dont les côtés sont des géodésiques) montre qu'il connaissait le lien entre les géométries non-euclidiennes et la géométrie des surfaces.

³⁷Janos Bolyai, "La science absolue de l'espace", traduction par Jules Hoüel, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, tome 5, 1867, p. 207-378

³⁸Nicolas Lobatchevski, "Etudes géométriques sur la théorie des parallèles", traduction par Jules Hoüel, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles*, tome 4, 1866, p. 83-120, réédition sous le titre *La théorie des parallèles*, Monom, 1980

³⁹Nicolas Lobatchevski, "Nouveaux principes de la géométrie" (1835-1838) (traduit du russe par F. Mailloux), *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3ème série, tome 2, 1900.

⁴⁰Le terme "artificiel" doit être entendu ici comme opposé au terme "naturel" (est artificiel ce qui n'existe pas dans la nature, ce qui est construit par l'homme).

Ainsi le passage de la géométrie aux géométries conduisait à redéfinir le rapport entre une géométrie mathématique issue d'une construction axiomatique et la géométrie physique, celle du monde.

De Riemann à Einstein

Cette question de la pluralité des géométries renouvellera la question de l'espace, c'est ce qu'expose Riemann dans sa dissertation de 1854, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie"⁴¹, l'un des textes les plus importants de l'histoire de la géométrie. S'appuyant sur un travail antérieur de Gauss sur la théorie des surfaces⁴², Riemann proposait une notion générale d'espace, lui permettant de poser la question de la nature de l'espace physique.

L'article de Riemann comprend trois parties, la première est consacrée à la notion générale de multiplicité à n dimensions, la seconde introduit les relations métriques, essentiellement infinitésimales, cherchant à généraliser les constructions de Gauss sur la surfaces et introduit la courbure de l'espace, enfin la troisième se propose de définir la nature de l'espace physique, renvoyant à l'expérience pour une réponse à cette question. Dans cette dernière partie Riemann pose la question de savoir si la géométrie de l'espace est indépendante des corps, auquel cas la courbure de l'espace est constante, les observations astronomiques montrant qu'elle nulle, ou si au contraire la présence des corps influe sur la géométrie de l'espace.

Cet article aura une double postérité, mathématique d'une part, physique de l'autre.

Sur le plan proprement mathématique, la notion générale d'espace conduira à l'étude générale des espaces dits *abstrait*s, les variétés de la géométrie différentielle moderne, et ouvrira un nouveau chapitre des mathématiques toujours florissant.

Sur le plan de la physique nous distinguerons deux grandes problématiques.

La première porte sur la nature de l'espace physique ; il s'agit alors de regarder, parmi les divers espaces que l'on peut construire, lesquels peuvent représenter l'espace de la physique. Parmi ces travaux nous citerons ceux de Helmholtz et ceux de Clifford.

Helmholtz s'interroge sur les axiomes que doit vérifier l'espace et met en valeur ce qu'il appelle l'*axiome de libre mobilité* qui exprime la possibilité du mouvement des corps solides ; un tel espace est alors à courbure constante au sens de Riemann⁴³.

Clifford, quant à lui, s'est posé la question du sens physique de la courbure de l'espace, s'appuyant sur le lien proposé par Riemann entre la courbure et la présence de matière. Ceci l'a conduit aux remarques suivantes :

"That small portions of space are in fact of a nature analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.

That this property of being curved or distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.

⁴¹Bernhart Riemann, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie", traduction Jules Houël, in *Oeuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968, réédition Gabay, Paris 1990

⁴²Carl-Friedrich Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes* (traduction Roger), Blanchard, Paris 1967. Le texte de Gauss a été publié en 1827.

⁴³Helmholtz, "On the Origin and Significance of Geometrical Axioms" in James R. Newman, *The World of Mathematics*, Tempus 1988, volume one, p. 637-657

*That this variation of the curvature of space is what really happens in that phenomenon which we call the **motion of matter**, whether ponderable or etherial.*

That in the physical world nothing else takes place but this variation subject (possibly) to the law of continuity."⁴⁴

Cette notion de courbure de l'espace définie par l'influence des corps sur la géométrie de l'espace fera son chemin pour aboutir à la théorie de la Relativité Générale d'Einstein en 1916.

Notons cependant que Clifford ne s'intéresse qu'à l'espace. C'est la théorie de la Relativité Restreinte qui conduira à penser l'espace-temps et sa représentation géométrique par Minkowski. L'espace de Minkowski est un espace plat, c'est-à-dire sans courbure, permettant de représenter les phénomènes électromagnétiques. Pour intégrer la théorie de la gravitation dans cette nouvelle physique, il faudra faire appel aux variétés riemanniennes, la courbure représentant les forces gravitationnelles liées à la présence des corps ; ainsi la gravitation participe de la géométrie de l'espace-temps marquant ainsi l'influence des corps matériels sur la géométrie. On peut alors parler d'une première géométrisation de la physique intégrant les forces gravitationnelles dans la géométrie. Après ce premier succès Einstein posera la question de la géométrisation de l'électromagnétisme, c'est-à-dire de son insertion dans la structure de l'espace-temps. Si ces recherches n'ont pas abouti au résultat espéré par Einstein elles ont conduit à une notion importante de la physique moderne avec les théories de jauge dont nous ne pouvons parler ici, théories qui constituent une étape importante dans la géométrisation de la physique⁴⁵.

La seconde problématique ouvre un champ plus large conduisant à définir des relations étroites entre la géométrie différentielle considérée comme étude des espaces abstraits généraux et la physique mathématique, l'un des exemples les plus importants étant celui de la représentation géométrique de la mécanique analytique de Lagrange par Levi-Civita⁴⁶. Un système mécanique à n degrés de liberté étant donné, l'ensemble de ses positions possibles est représenté par un espace de dimension n muni d'une métrique définie par son énergie cinétique : *l'espace des configurations* ; on peut alors écrire les équations du mouvement du système mécanique considéré comme celle du mouvement d'un point dans l'espace des configurations. On peut alors montrer que si le système n'est soumis à aucune force la trajectoire du point qui le représente est une géodésique de l'espace des configurations (ligne de plus courte distance), ce qui conduit à une forme généralisée du

⁴⁴W. K. Clifford, "On the Space Theory of Matter" (1876), in James R. Newman, *The World of Mathematics*, o.c. p. 559-560

⁴⁵Rappelons que la première théorie de jauge est issue des travaux de Hermann Weyl sur la recherche d'une théorie géométrique englobant la gravitation et le champ électromagnétique. Nous renvoyons ici à un article de Hermann Weyl, "Gravitation und Elektrizität", *Sitzungsberichte des Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1918 (cet article est publié en anglais in *The Principles of Relativity, a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, with notes by A. Sommerfeld, translated by W. Perret and G.B. Jeffrey, Dover Publications, 1952, p. 200-216) et à son ouvrage *Space, Time, Matter*, (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover Publications, New York 1952

⁴⁶T. Levi-Civita, "Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche", *Annali di matematica pura ed applicata*, Serie II, Tomo XXIV, 1896, p. 255-300

principe d'inertie. Cette représentation géométrique a ouvert un champ d'études toujours actif que nous ne pouvons aborder ici⁴⁷.

Retour sur la distinction entre géométrie physique et géométrie mathématique

Le développement de la géométrie au XIX^{ème} siècle après ce que nous avons appelé le séisme non-euclidien a conduit d'une part à la distinction entre géométrie mathématique et géométrie physique en même temps qu'elle a créé de nouveaux rapports entre ces deux domaines. Ce que Einstein résume de la façon suivante :

*"Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité"*⁴⁸

soulignant ainsi une certaine irréductibilité des deux géométries, mais il revient plus loin sur le rôle d'une théorie géométrico-physique :

*"Une théorie géométrico-physique est, à première vue, nécessairement privée du caractère intuitif ; elle est un simple système de concepts. Mais ces concepts servent à établir une connexion logique entre une multiplicité de phénomènes sensibles réels ou imaginés ? Rendre une théorie intuitive, cela signifie donc qu'il nous faut représenter cette plénitude de phénomènes dont l'ordre schématique est réalisé par la théorie"*⁴⁹

Mais la question de la nature de l'espace physique est devenue plus complexe lorsque Poincaré a montré que la question posée par Riemann à la fin de son article et le renvoi à l'expérience ne pouvait être résolue simplement. En effet toute expérience nécessite des instruments de mesure et ces instruments sont construits à partir d'une théorie géométrique déjà élaborée. On ne peut donc répondre d'une façon unique à la question de la nature de l'espace et Poincaré explique que la question revient à choisir non une réponse vraie illusoire mais la réponse la plus commode⁵⁰.

Quelques années plus tard, Reichenbach expliquait dans son ouvrage *Philosophy of Space and Time* :

*"Mathematics reveals the possible spaces ; physics decides which among them corresponds to physical space"*⁵¹

⁴⁷Nous nous contenterons de citer l'ouvrage de Jean-Marie Souriau, *Structures de systèmes dynamiques*, "Collection Dunod Université", Dunod, Paris 1970 et celui de Vladimir Arnold, *Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique* (1974), traduit du russe par Djilali Embarek, Editions Mir, Moscou 1976

⁴⁸Albert Einstein, "La Géométrie et l'Expérience" (1921) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, textes traduits par Maurice Solovine et Marie-Antoinette Tonnelat, Gauthier-Villars, Paris 1972 p. 76

⁴⁹*ibid*, p. 85

⁵⁰Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), préface de Jules Vuillemin, Flammarion, Paris 1968, p. 74-76

⁵¹Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (1927) (translated by Maria Reichenbach and John Freund, with introductory remarks by Rudolf Carnap), Dover, New York 1957, p. 6

On peut alors remarquer la double interprétation du terme "*decides*" ; soit l'espace physique a une structure géométrique déterminée et le physicien doit découvrir cette structure parmi les possibles, soit la structure est déterminée par le physicien pour rendre compte des phénomènes ; la préface de Carnap laisse entendre que c'est la seconde interprétation qu'il faut lire :

*"In physical geometry, there are two possible procedures for establishing a theory of physical space. First, the physicist may freely choose the rules for measuring length. After this choice is made, the question of the geometrical structure of physical space becomes empirical ; it is to be answered on the basis of the results of experiments. Alternatively, the physicist may freely choose the structure of physical space ; but he must adjust the rules of measurement in view of the observational facts."*⁵²

En ce sens la géométrie physique relève plus d'une question de cohérence globale que d'une question de vérité⁵³.

Quelques considérations didactiques

Ces remarques sur le statut de la géométrie nous conduisent à situer l'enseignement de la géométrie au carrefour des mathématiques et de la physique, c'est-à-dire à la fois dans l'enseignement des mathématiques et dans l'enseignement des sciences physiques⁵⁴.

Nous nous placerons ici dans une perspective gonséthienne sur les trois aspects de la géométrie rappelés ci-dessus, en insistant sur la nécessaire articulation de ces trois aspects. Il ne saurait être question de distinguer, autrement que pour les besoins de l'analyse, le moment empirique et le moment rationnel, encore moins le moment physique et le moment mathématique.

Pour préciser cela nous rappelons une idée ancienne d'Emile Borel aujourd'hui reprise par Jean-Pierre Kahane, celle des laboratoires de mathématiques et plus précisément de la place de la géométrie dans de tels laboratoires⁵⁵.

Le caractère expérimental de la géométrie apparaît sous diverses formes dont l'une des plus anciennes est la pratique des instruments géométriques, instruments de mesure ou instruments de constructions géométriques, parmi lesquels la règle et le compas.

Comme nous l'avons déjà rappelé, l'usage d'un instrument scientifique ne relève pas de la seule pratique mais suppose un lien explicite entre la connaissance empirique et la

⁵²*ibid.* p. vi

⁵³La question philosophique de la *vraie* nature de l'espace reste toujours d'actualité comme le montre le débat entre Hawking et Penrose dans leur ouvrage *Space and Time*, "The Isaac Newton Institute Series of Lectures", Princeton University Press, Princeton, 1996, traduction française par Françoise Balibar, *La Nature de l'Espace et du Temps* (1996), présentation par Marc Lachièze-Rey, "nrf essais", Gallimard, Paris 1997

⁵⁴Si la rencontre des disciplines a un sens autre que celui du discours moraliste sur l'interdisciplinarité, cette rencontre est moins celle des enseignants des disciplines concernées que celle que l'on peut pratiquer à l'intérieur même d'une discipline, ainsi l'enseignement de la géométrie demande de faire des mathématiques dans le cours de physique et de faire de la physique dans le cours de mathématiques.

⁵⁵Emile Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire" (1904), in *Oeuvres*, tome 4, CNRS, Paris 1972, p. 2225-2256

connaissance rationnelle, c'est ce lien qui permet l'expérimental⁵⁶. Pour préciser cela nous rappellerons ce que dit Abel Rey des rapports entre la règle et la droite d'une part, le compas et le cercle d'autre part :

*"La règle et le compas (ne sont) que le symbole des idées claires et distinctes de la droite et du cercle"*⁵⁷

Les constructions à la règle et au compas se situent ainsi au carrefour de la géométrie rationnelle et de la géométrie pratique et participent ainsi de l'aspect expérimental de la géométrie au sens gonséthien défini ci-dessus. En ce sens, si laboratoire de mathématique il doit y avoir, les constructions à la règle et au compas y ont une place importante sinon première. Le dessin géométrique, en tant qu'il est un dessin structuré, apparaît ainsi moins comme un accompagnement du cours, la partie pratique en quelque sorte, que comme faisant partie de l'enseignement de la géométrie ; d'une part les constructions géométriques constituent des théorèmes d'existence mettant en jeu des algorithmes géométriques, d'autre part leur exécution matérielle exige un respect rigoureux des règles ainsi mises en place. La rigueur apparaît ainsi moins comme un exercice de style caractéristique du cours de mathématiques que comme une nécessité pour réaliser l'objectif que l'on s'est donné, savoir, la construction d'un objet géométrique déterminé. Si l'on se place dans le cadre de la géométrie élémentaire, on peut alors considérer que la détermination de l'algorithme participe de la phase "analyse" de la résolution d'un problème de construction tandis que la réalisation matérielle s'inscrit dans la phase "synthèse".

C'est à dessein que nous avons employé le terme "algorithme". Il nous semble important que dans l'enseignement scientifique, y compris dans l'enseignement de l'informatique, le terme "algorithme" soit défini indépendamment de tout usage machinal. La construction d'un algorithme est une opération intellectuelle, donc théorique, à des fins essentiellement pratiques, cette construction étant soumise à des contraintes définies par les instruments dont on dispose. Mais de telles contraintes ne sont pas seulement pratiques, tout instrument, aussi sommaire soit-il, implique une pensée théorique, aussi sommaire soit-elle, qui a permis sa réalisation. En ce sens l'usage d'un instrument est liée à la pensée qui en définit l'usage, question d'autant plus importante dans l'enseignement que le problème est moins de réaliser une performance que de comprendre les enjeux à la fois théoriques et pratiques de l'usage d'un instrument.

Les Grecs connaissaient d'autres instruments géométriques que la règle et le compas comme le montrent les divers appareils décrits par exemple par Eutocius⁵⁸ pour résoudre les grands problèmes qu'ils se posaient (duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle), et si l'on reste au seul plan de la pratique, on ne voit pas en quoi la construction "mécanique" de la conchoïde de Nicomède et de son intersection avec une

⁵⁶Il nous semble important de distinguer l'empirique et l'expérimental ; si le premier peut être défini comme l'appréhension inorganisée d'un donné extérieur, le second renvoie au contraire à une construction matérielle nous permettant de mettre en rapport connaissance rationnelle et connaissance du monde.

⁵⁷Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité*, volume 5, "L'Apogée de la Science Technique Grecque : L'Essor de la Mathématique", Albin Michel, Paris 1948, p.124

⁵⁸Eutocius, "Commentaires au Traité sur la Sphère et le Cylindre, I et II", in Archimède, *Œuvres*, tome IV, texte établi et traduit par Charles Muegler, Les Belles Lettres, Paris 1972, p. 41-75. On peut lire aussi l'article de Joëlle Delattre et Rudolf Bkouche, "Pourquoi la règle et le compas" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Commission Inter-IREM Epistémologie, Ellipses, Paris 1993, p. 87-112

droite⁵⁹ est moins acceptable que la construction de l'intersection d'un cercle tracé au compas et d'une droite tracée à la règle. D'autant que les constructions à la règle et au compas peuvent être aussi considérées comme des constructions mécaniques.

Il faut alors revenir sur une propriété particulière de la droite et du cercle : ce sont les seules courbes planes que l'on peut faire glisser sur elles-mêmes sans les déformer. Si les géomètres grecs n'ont jamais explicité une telle propriété, elle apparaît *via* les instruments qui permettent de tracer les droites et les cercles, savoir, la règle et le compas. On peut la lire aussi dans la définition euclidienne de la droite :

*"Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle."*⁶⁰

définition qui, de notre point de vue, convient aussi au cercle.

Dans l'enseignement d'aujourd'hui où la question est moins de raconter Euclide que de le retranscrire dans un cadre moderne, il serait utile que cette propriété de la droite et du plan apparaisse explicitement dans l'enseignement de la géométrie, propriété qui relève à la fois de la pratique du dessin géométrique et du statut théorique des objets considérés, propriété qui montre comment s'articulent pratique du dessin et géométrie rationnelle.

Restant dans le cadre de la réalisation matérielle d'objets géométriques ou liés à la géométrie, nous pouvons aborder la construction de solides. Il faut ici distinguer deux moments dans l'enseignement de la géométrie des solides, le moment empirique, celui de la leçon de choses pourrait-on dire, qui permet d'expliciter le double aspect de l'étude des corps solides, leur reconnaissance d'une part qui pose le problème du même (même forme et même grandeur), leur fabrication d'autre part, reconnaissance et fabrication s'appuyant sur la géométrie rationnelle. La géométrie des corps solides oblige ainsi à mieux prendre en compte les enjeux de la démonstration. C'est le raisonnement qui permet de découvrir des propriétés qui ne deviennent évidentes, au sens visuel du terme, qu'après démonstration⁶¹, ainsi l'égalité par superposition dont nous avons déjà parlé, ainsi les diverses propriétés d'incidence qui portent sur ces objets invisibles que sont les points, les droites, et les plans, invisibles au sens qu'ils n'apparaissent qu'à travers les corps solides dont ils marquent les limites ; ainsi une surface est la limite d'un corps, une ligne est la limite d'une surface, un point est la limite d'une ligne. On peut considérer que l'on ne connaît empiriquement que les corps et que c'est la géométrie qui conduit à inventer les objets-limites que sont les points, les lignes et les plans⁶².

Mais revenons sur le problème de la fabrication des objets solides. Pour construire de tels objets on utilise ce que l'on appelle des "*plans*", c'est-à-dire des représentations planes des objets à fabriquer. Se pose ainsi d'une part la question de la représentation plane

⁵⁹Eutocius, o.c. p. 69-73. La conchoïde de Nicomède permet de résoudre le problème de la trisection de l'angle et celui de la double moyenne proportionnelle.

⁶⁰Euclide, *Les Eléments*, o.c. p. 154

⁶¹On peut dire que la démonstration géométrique élargit la vision.

⁶²A côté de ces définitions comme objets-limites, nous noterons les définitions cinématiques : la ligne, engendrée par le mouvement d'un point ou le plan, engendré par le mouvement d'une ligne. La géométrie suppose la concordance de ces deux modes de définition (cf. Federigo Enriques, "Les Principes de la Géométrie", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, réédition Jacques Gabay, Paris 1991, III-1, p. 13)

des objets solides⁶³, d'autre part de leur fabrication à partir de cette représentation. Mais ici encore c'est le raisonnement qui permet de résoudre ces divers problèmes. On peut alors considérer que le problème général de la représentation s'inscrit dans l'enseignement de la géométrie des corps solides, non pas comme une simple illustration ou application d'un cours⁶⁴, mais comme partie de cet enseignement.

Nous pouvons citer le *filicoupeur* inventé par Charles Pérol⁶⁵ pour construire des solides en polystyrène, construction qui demande une étude préalable utilisant des représentations planes et des méthodes analytiques. Parmi ces constructions, nous en citerons deux qui nous semblent exemplaires :

- la construction des polyèdres réguliers
- la construction de la section d'un cube par trois points situés sur sa surface.

On peut alors considérer que, à côté de la règle et du compas, le filicoupeur a sa place dans les laboratoires de mathématiques. Nous pourrions citer d'autres instruments géométriques dont les divers instruments de mesures géométriques⁶⁶ ou les instruments cités par Eutocius pour construire les diverses courbes liées à la résolution des grands problèmes de la géométrie grecque (cf. ci-dessus).

Nous n'aborderons pas ici la question de la place de l'informatique, d'abord parce que nous pensons que celle-ci ne peut être efficiente que pour qui possède déjà une pratique géométrique, ensuite parce que le travail "à la main" des machines analogiques, dont les prototypes sont la règle et le compas, permet de comprendre le lien entre la part théorique et la part pratique du dessin géométrique ; mais on pourrait aussi utiliser les divers instruments de dessin inventés au cours des âges, dont les instruments grecs déjà cités. La question se situe encore une fois dans les articulations, ce qui est occulté par la boîte noire informatique⁶⁷. Il faut alors penser l'informatique moins comme outil pédagogique que comme outil mathématique, c'est comme outil mathématique que l'informatique peut avoir sa place dans l'enseignement, ce qui suppose que les usages mathématiques de l'informatique s'insèrent dans l'enseignement au moment où ils peuvent devenir pertinents.

On pourrait parler longtemps des divers lieux où la géométrie apparaît sous ses multiples facettes, ainsi la représentation perspectiviste⁶⁸ ou la représentation de la terre *via* la topographie⁶⁹ et la cartographie⁷⁰. Il faut alors souligner que la géométrie n'est pas une science extérieure que l'on appliquerait pour résoudre les problèmes posés par la

⁶³Le problème de la représentation est lui-même double, d'une part la représentation d'objets solides existants, d'autre part la représentation d'objets imaginaires, soit qu'on veuille donner l'illusion que ces représentations correspondent à des objets réels (ainsi la peinture), soit qu'on veuille construire les objets solides correspondant à ces représentations (architecture et dessin industriel).

⁶⁴S Sur la distinction entre illustration et application nous renvoyons à un article de Nicolas Rouche in Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre VIII, p. 148

⁶⁵Charles Pérol,

⁶⁶On peut trouver une présentation de ces instruments dans l'ouvrage d'Emile Fourrey, *Curiosités géométriques*, Vuibert, Paris 1907, p. 153-219, réédition avec une préface d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994

⁶⁷Nous pourrions citer l'exemple du calcul où l'on peut opposer le calcul "à la main" (le calcul posé ou le calcul au boulier) et la boîte noire de la calculette.

⁶⁸Thérèse Gilbert, *La perspective en questions*, "gem", ciaco éditeur, Louvain la Neuve 1987

⁶⁹Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie Élémentaire*, tome II, *Géométrie dans l'espace*, nouvelle édition refondue et corrigée, Armand Colin, Paris 1949, p. 283-313.

⁷⁰Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC/Fernand Nathan, Paris 1977, volume 5, p. 26-37

représentation perspectiviste ou par la cartographie, elle participe de ces domaines de la connaissance tout autant que ceux-ci sont constitutifs de la pensée géométrique. En cela ils ont leur place dans l'enseignement de la géométrie.

Enfin nous terminerons cet article en revenant sur l'une des "notions premières" de la géométrie, la notion d'espace. Comme souvent dans les sciences hypothético-déductives, l'expression "notion première" est ambiguë et la notion d'espace en est un exemple.

Nous avons mis l'accent dans cet article sur le rôle des corps solides dans la constitution de la géométrie rationnelle. On peut remarquer que la notion d'espace n'intervient pas dans la géométrie grecque, ce qui montre qu'elle n'est pas nécessaire pour développer l'étude des corps solides. C'est pourquoi nous préférons parler de géométrie des corps solides.

Par contre la notion d'espace devient utile dès que l'on veut comparer les positions relatives de deux corps ou les diverses positions d'un corps en mouvement. Effectivement la notion géométrique d'espace intervient au début de l'époque moderne à partir de deux problématiques liées au problème des positions relatives, d'une part la représentation plane des corps avec la perspective, d'autre part l'étude du mouvement avec la mécanique. L'espace est alors introduit comme le réceptacle universel dans lequel se situent les phénomènes géométriques ou mécaniques, ce qu'Euler explique dans ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne* :

*"il (l'espace) ne fait que fournir les lieux que les corps occupent et remplissent"*⁷¹

précisant que cet "*espace sans corps est nommé un vide* (souligné par Euler), *et un vide est donc une étendue sans corps*".

C'est en référence à cet espace, réceptacle universel, que l'on peut parler, comme le veut la tradition de l'enseignement français, de *géométrie dans l'espace*⁷².

L'espace ainsi défini devient une notion première de la connaissance géométrique, mais le statut d'une telle notion reste flou, ce que montrent les débats opposants rationalistes et empiristes au XVIII^{ème} siècle. Pour dépasser ces débats, Kant définira l'espace et le temps comme *formes a priori de l'intuition* antérieures à toute connaissance mais nécessaires pour appréhender le monde et permettre la connaissance rationnelle⁷³. Cependant la notion de forme *a priori* de l'intuition néglige deux points : d'une part la notion d'espace géométrique est une construction du XVII^{ème} siècle, d'autre part la notion de temps est une reconstruction rationnelle permettant d'éviter les difficultés liées au devenir. En ce sens l'espace et le temps de la science moderne, loin de participer d'une intuition *a priori*, sont des constructions rationnelles historiquement datées, Mais comme souvent, une construction rationnelle, une fois inventée par l'homme, devient éternelle et par conséquent est éternelle. On peut alors considérer la position kantienne comme une tentative d'explication de cette éternité, éternité à l'échelle humaine il est vrai si l'on considère que les formes *a priori* de l'intuition sont constitutives de l'esprit humain.

⁷¹Leonhart Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (1772), précédées de l'Eloge d'Euler par Condorcet et annotées par Cournot, 2 volumes, Hachette, Paris 1842, volume 1, p. 271

⁷²Rappelons que les Anglais parlent de *Solid Geometry*.

⁷³Immanuel Kant, *Critique de la Raison Pure*, traduction de Jules Barni revue par Pierre Archambault, chronologie, présentation et bibliographie de Bernard Rousset, Garnier-Flammarion, Paris 1976, p. 81-105

Ainsi la notion d'espace une fois inventée devient une notion première de la géométrie. On peut alors considérer deux étapes, d'abord celle du réceptacle universel newtonien, puis, après les révolutions non-euclidiennes et formalistes, celle de la reconstruction formelle issue de l'algèbre linéaire et de la géométrie différentielle. Mais si les reconstructions rationnelles deviennent fondatrices, elles ne sont pas premières du point de vue de l'enseignement et l'on peut considérer que la notion géométrique d'espace, loin d'être le point de départ de l'enseignement de la géométrie, en est l'un des aboutissements. Cela n'exclut pas l'usage naïf du terme "espace", suffisant pour les débuts de l'enseignement de la géométrie, que l'on se place du point de vue des mathématiques ou de celui de la physique.

Pour être complet, il aurait fallu aborder d'autres points où la part mathématique et la part physique de la géométrie se rencontrent sans que l'on puisse toujours les distinguer. Parmi ces points nous pouvons citer, sans être exhaustifs : les figures régulières qui interviennent dans l'étude des pavages et des cristaux, les problèmes d'équilibre en mécanique, lesquels ont conduit à la notion de barycentre, l'optique géométrique, l'électromagnétisme où la notion d'orientation est importante.

Ces diverses questions où s'entremêlent sciences mathématiques et sciences physiques participent de l'enseignement de chacune de ces disciplines, c'est cela qui nous conduit à dire qu'il est important que la physique apparaisse dans le cours de mathématiques et que les mathématiques apparaissent dans le cours de physique.

Pour préciser cette dernière remarque nous reviendrons sur l'un des premiers objets rencontrés dans l'enseignement de la géométrie : la droite.

Dans les ouvrages classiques d'enseignement de la géométrie élémentaire, on se propose moins de définir la droite que d'en montrer quelques exemples parmi lesquels le fil tendu ou le rayon lumineux. Par contre dans les ouvrages d'enseignement de l'optique, on énonce que, dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite. On voit ainsi apparaître un cercle, le discours géométrique s'appuyant sur la connaissance des rayons lumineux et le discours optique s'appuyant sur le discours géométrique.

La question est alors moins de définir l'objet premier que de mettre en rapport divers objets. La notion géométrique de droite apparaît alors comme une idéalité mathématique qui permet de parler des rayons lumineux ; il importe moins de définir un objet premier que d'explicitier comment le discours rationnel à la fois se construit dans le monde et réduit la part du monde qu'il étudie pour mieux le rendre intelligible⁷⁴. En ce sens le "*physique*" et le "*mathématique*" s'interpénètrent sans que l'on puisse dire *a priori* lequel est antérieur à l'autre du point de vue de la connaissance. On voit ici comment l'optique et le géométrique se rencontrent, ce que l'on peut résumer en affirmant que l'optique a sa place dans l'enseignement de géométrie comme la géométrie a sa place dans l'enseignement de l'optique. En ce sens la goniométrie relève autant de l'enseignement de la géométrie que de l'enseignement de l'optique.

⁷⁴Dans un article ultérieur nous reviendrons sur la question de la réduction dans la construction de l'intelligibilité du monde.