Epistémologie, Histoire et Enseignement des Mathématiques

rudolf bkouche
IREM de Lille/France

> *"Ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prête celui qui est enseigné"*[1]
>
> Francisco Sanchez, *Il n'est Science de Rien*

La science n'est pas fabriquée pour être enseignée, elle a ses enjeux propres qui sont, comme le dit l'adage, de comprendre le monde et de le transformer. Dans une société donnée, la science peut alors avoir plus ou moins d'importance, autrement dit la valeur sociale de la science (c'est-à-dire la valeur accordée par la société ou du moins par ceux qui se considèrent, à tort ou à raison, l'élite représentative de cette société) peut être plus ou moins grande et les raisons de cette valeur sociale peuvent être diverses. C'est cette valeur sociale qui conduit à la mise en place d'un enseignement scientifique mettant en valeur certains domaines de la science, ainsi les mathématiques à l'époque des deux grandes réformes de l'enseignement scientifique de ce siècle (les années 1900 et les années 1970[2]), ainsi, ce qui semble vraisemblable, l'informatique et les sciences connexes au début du prochain siècle; mais c'est aussi cette valeur sociale qui définit les enjeux des domaines de la connaissance enseignés, enjeux de connaissances, mais aussi enjeux idéologiques pour dire les choses de façon générale.

C'est à travers les divers enjeux qui se définissent autour d'un domaine de la science[3] qu'il faut comprendre d'une part la place effective de l'enseignement de ce domaine, d'autre part les formes de cet enseignement: c'est ainsi que l'on peut comprendre, non seulement la place de l'enseignement des mathématiques dans les réformes du XXème siècle rappelées ci-dessus, mais aussi la façon dont se sont développées les réflexions sur leur enseignement et les pratiques correspondantes, qu'il faut aussi comprendre la place prise par les deux grands courants de réflexions issus des réformes et contre-réformes depuis les années soixante-dix, marquées institutionnellement par les deux groupes HPM[4] et PME[5] qui gravitent autour des congrès ICME, qu'il faut enfin comprendre la place des nouveaux instruments de la technique moderne (ce que l'on appelle en France les *nouvelles technologies*) dans l'enseignement des mathématiques[6].

Cela dit, lorsqu'un domaine de la connaissance est considéré comme devant être enseigné, le problème se pose des conditions de son enseignement. Parmi les problèmes

---

[1]Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984

[2]Pour une étude de ces réformes nous renvoyons au colloque *Réformer l'enseignement scientifique au XXème siècle*, Paris janvier 1994 et à l'ouvrage qui en est issu, *Les Sciences au Lycée*, Vuibert, Paris 1996

[3]Il faudrait, pour être précis, distinguer enjeux "primaires" et "secondaires", ceux qui conduisent à la mise en place d'un domaine de la connaissance et à sa délimitation et ceux qui se définissent au cours du développement du domaine de la connaissance. Mais l'on peut remarquer que, une fois le domaine mis en place, enjeux "primaires" et enjeux "secondaires" se mêlent; si la distinction a un intérêt historique, relié aux raisons qui amènent à définir un domaine particulier de la connaissance, elle tend ensuite à s'effacer devant le développement du domaine de la connaissance en question.

[4]History and Pedagogy of Mathematics

[5]Psychology and Mathematical Education

[6]Nous renvoyons au document "Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century" préparatoire à la rencontre de Catane (septembre 1974), une traduction française est publiée in *Repères-IREM* n°18, janvier 1995. Pour une analyse critique de ce document, cf. Rudolf Bkouche, "Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie", *Repères-IREM* n° 26, janvier 1997

posés par l'enseignement d'un domaine de la connaissance se pose celui de son *appréhension* par qui ne le connaît pas encore[7], autrement dit des difficultés rencontrées dans cette appréhension, difficultés d'ordre technique et difficultés d'ordre conceptuel.

Si la réflexion sur l'enseignement des mathématiques est ancienne dans la mesure où l'enseignement des mathématiques est ancien, on peut considérer qu'elle s'est renouvelée au XXème siècle avec les deux réformes citées ci-dessus, et plus particulièrement après l'échec de la seconde de ces réformes, celle des *mathématiques modernes*, réforme dont on avait espéré qu'elle permettrait l'accès des mathématiques à tous. On se retrouve aujourd'hui quelque peu démuni lorsque l'on cherche les moyens de rendre enfin cet enseignement accessible au plus grand nombre[8]. Devant cet échec d'un enseignement des mathématiques pour tous, de nombreux travaux se sont efforcés, à travers de multiples approches, de définir des démarches pédagogiques permettant d'assurer, de la meilleure façon possible, cet enseignement des mathématiques pour tous qui apparaît comme un point essentiel de la démocratisation de l'enseignement[9].

Parmi ces approches, nous citerons d'abord la tentative d'une étude *scientifique* des phénomènes d'enseignement qui s'est élaborée autour de la *didactique*, avec comme conséquence la recherche d'une *ingénierie* didactique, travaux dont nous ne parlerons pas ici[10].

Je m'intéresserai essentiellement au courant défini par *"une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques"*, courant qui s'est développé en France autour de la Commission Inter-IREM Epistémologie[11]. Ces travaux ont le mérite de mettre l'accent sur les problématiques qui ont conduit, au cours de l'histoire, à développer une activité mathématique, posant ainsi la question de l'apport de la connaissance de l'histoire des mathématiques à la pratique enseignante. Comme souvent dans ce type de travaux, au carrefour de la militance et de la scientificité, un enthousiasme justifié a conduit à un certain état d'esprit de prosélytisme, prosélytisme nécessaire dans la mesure où il a permis à des enseignants de s'intéresser aux aspects historiques de la discipline qu'ils enseignent, c'est-à-dire à la façon dont elle s'est construite et développée jusqu'à son état actuel, mais prosélytisme dangereux lorsqu'il conduit à chercher dans l'histoire des mathématiques et dans la réflexion épistémo-

---

[7]Je préfère ici employer le terme *appréhension* au terme *apprentissage*, lequel me semble être devenu, *via* les diverses tentatives de théorisation, trop restrictif pour le problème que nous posons. J'utiliserai par contre le terme *apprentissage*, débarrassé de ses connotations constructivistes, pour parler de l'activité des élèves placés en situation d'élèves devant appréhender un domaine de la connaissance.

[8]Nous ne poserons pas ici la question des raisons qui conduisent à vouloir rendre accessible au plus grand nombre la connaissance des mathématiques, on peut considérer que ces raisons s'appuient d'une part sur l'idéal de démocratisation issu des *Lumières*, d'autre part sur *l'idéologie des mathématiques partout* défendue par les réformateurs des *mathématiques modernes* (cf. Rudolf Bkouche, "La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en france: de la réforme de 1902 à la réforme des *mathématiques modernes*" in *Les Sciences au Lycée*, o.c.).

[9]La question reste posée de la part nécessaire de ces mathématiques pour tous, nous ne l'aborderons pas dans le cadre de cet article.

[10]Pour une présentation de la didactique, nous renvoyons à l'ouvrage de Samuel Johsua et Jean-Jacques Dupin, *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF, Paris 1993 et aux analyses de cet ouvrage dans *Repères-IREM* n°19, avril 1995; pour une analyse critique (partielle) de cette volonté de scientificité, nous renvoyons à Rudolf Bkouche: *La formation des maîtres: professionnalisation ou formation professionnelle*, IREM de Lille, 1993, et "Variations sur nécessité et suffisance" *Repères-IREM* n°18, janvier 1995

[11]Pour une présentation de ce courant, nous renvoyons à l'ouvrage édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin Inter-IREM, Lyon 1988. Rappelons que les IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) existent en France depuis 1969 et regroupent des enseignants de tous les ordres d'enseignement (université, lycée et collège, école élémentaire).

logique qui l'accompagne les conditions qui devraient enfin permettre de réussir l'enseignement des mathématiques[12].

La question n'est pas de convaincre les enseignants de mathématiques que l'introduction d'une perspective historique leur apportera le salut; il s'agit plutôt d'expliciter, dans la mesure du possible, les raisons qui peuvent conduire à mener une réflexion d'ordre épistémologique dans le cadre du métier d'enseignant. Qu'une telle réflexion amène à s'intéresser à l'histoire des mathématiques, voire à y chercher les conditions d'un meilleur exercice du métier d'enseignant, nous importe peu ici; ce que nous voulons développer, c'est comment une réflexion d'ordre épistémologique participe de l'exercice même du métier.[13]

L'objet de cet article est donc moins de définir *a priori* la part de l'histoire et de l'épistémologie dans l'enseignement que de tenter de cerner les lieux où l'enseignant rencontre, dans le cadre de la pratique de son métier, des problèmes d'ordre épistémologique. C'est dans la mesure où la réflexion d'ordre épistémologique s'inscrit dans les problèmes d'enseignement que celle-ci peut prendre sens dans la pratique du métier; cela ne signifie pas qu'un enseignant ne puisse avoir une réflexion épistémologique propre (c'est-à-dire indépendante de tout problème d'enseignement) et c'est l'affaire de chacun de s'y intéresser ou non[14].

Si l'on veut éviter le volontarisme et le prosélytisme dont j'ai parlé ci-dessus, il est nécessaire de pointer, autant que cela se peut, les lieux où l'activité d'enseignement rencontre des questions d'ordre épistémologique. Citons d'abord*l'idéal de simplicité* qui anime toute activité mathématique, sinon toute activité scientifique; on oublie trop que la science s'inscrit dans un idéal de simplicité, que c'est cette simplicité qui constitue la valeur de la science comme l'un des lieux privilégiés de l'intelligibilité du monde, mais que cette simplicité, loin d'être donnée, est une construction lente, un objectif souvent difficile à atteindre, et que, en fin de compte, c'est cette simplicité qui conduit à accepter le prix à payer pour l'atteindre (cf. annexe). On peut aussi citer *la question de la démonstration*, laquelle est au cœur de toute activité mathématique quelque peu consistante[15]; on sait combien la démonstration apparaît redoutable aux élèves, ce qui implique de la part des enseignants une réflexion sur la démonstration en tant que telle, réflexion sans laquelle la démonstration risque de n'apparaître que comme le simple

---

[12]Ce danger est souligné par Evelyne Barbin qui explique, dans la préface de l'ouvrage cité ci-dessus, qu'il ne faut pas attendre de cette perspective historique la solution à tous les problèmes d'enseignement.

[13]J'insiste sur le fait que je me place ici du point de vue de l'enseignant à l'exclusion de toutes considérations sur les élèves. Celles-ci sont secondes (ce qui ne signifie pas secondaires) dans la mesure où c'est la construction par *celui qui enseigne* de son propre rapport au savoir qu'il enseigne qui conditionne son enseignement et qui peut lui permettre de penser, avec quelque pertinence, le problème de l'apprentissage de sa discipline par les élèves. Il est vrai que l'activité d'enseignement conduit *celui qui enseigne* à transformer son propre rapport au savoir et par cela-même sa façon d'enseigner, mais une telle transformation suppose un socle initial à partir duquel un enseignant peut définir les conditions de son enseignement.

[14]On peut concevoir cependant que l'intérêt propre pour l'épistémologie et l'histoire de la discipline (curiosité intellectuelle pure indépendante de toute considération d'enseignement) influe sur la pratique du métier, on peut concevoir aussi que les intérêts d'ordre épistémologique ou historique liés à la pratique du métier conduisent à découvrir un intérêt propre pour l'épistémologie. Tout cela nous rappelle le caractère intellectuel du métier d'enseignant, caractère qui nous semble quelque peu oublié aujourd'hui.

[15]Sur la question de la démonstration nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin Géométrique, de la main à l'ordinateur*, Actes du colloque Inter-IREM Géométrie (Le Quesnoy, juin 1994), IREM de Lille, 1996, p. 189-232.

usage de quelques règles et procédures définies *a priori* comme nous y invitent aujourd'hui les diverses boîtes à outils, référentiels et autres calembredaines à la mode[16].

Nous revenons sur le rôle que peut jouer la réflexion épistémologique de l'enseignant (ou du futur enseignant) dans l'activité enseignante. Cela pose évidemment la question de la place de l'épistémologie et de l'histoire des sciences dans la formation des maîtres?

Nous distinguerons ici la réflexion épistémologique, en tant qu'elle est *constituante* d'une pensée, et l'épistémologie, en tant que *discours constitué*; c'est la réflexion épistémologique en tant que réflexion sur la constitution du savoir que je mettrai en avant dans la mesure où cette réflexion participe de la réflexion pédagogique, de même que cette dernière s'insère dans une réflexion épistémologique dans la mesure où l'activité d'enseignement, en tant qu'elle participe de la transmission d'un savoir, pose le problème de la relation entre construction du savoir et acquisition du savoir[17]. Cela dit, la réflexion épistémologique ne devient consistante que si elle s'appuie sur le discours constitué de l'épistémologie; de même qu'on imagine mal qu'un élève reconstruise de lui-même un savoir déjà constitué (encore que certains courants pédagogistes actuels se complaisent dans une telle conception de l'enseignement), on imagine difficilement une réflexion *spontanée* sur l'activité scientifique; c'est dire que la réflexion épistémologique *personnelle* se construit sur une culture *acquise*, c'est en ce sens que l'on peut demander que la formation des maîtres prenne en charge un enseignement de l'épistémologie et de l'histoire des sciences.

Il nous reste à revenir sur l'épistémologie elle-même; pour cela nous nous plaçons dans une problématique gonséthienne. Prolongeant l'analyse de Gonseth qui distingue entre une *stratégie de fondement* et une *stratégie d'engagement* dans la construction de la connaissance[18], nous distinguerons trois aspects de l'épistémologie, une *épistémologie des fondements*, une *épistémologie du fonctionnement* et une *épistémologie des problématiques*[19].

L'épistémologie des fondements se propose l'étude des conditions de légitimation de l'activité scientifique sous ses deux formes aujourd'hui canoniques, la forme mathématico-logique et la forme expérimentale (encore faut-il préciser ce que chacune de ces deux formes signifie dans le cadre d'un domaine donné de la connaissance). Nous pouvons distinguer deux grandes formes de cette épistémologie des fondements, une forme *métaphysique*, laquelle s'appuie sur une ontologie des objets (que l'on se situe dans une philosophie empiriste où les objets mathématiques sont des *abstractions* issues de la connaissance sensible, ou que l'on adopte un point de vue platonicien), et une forme *analytique*, laquelle s'appuie essentiellement sur une analyse du langage conduisant à expliciter ce que l'on pourrait appeler *la grammaire du raisonnement*, les objets étant définis (ou redéfinis) par un système de relations donné *a priori*. En ce qui

---

[16]Nous parlons ici des divers "gadgets" introduits depuis quelques années dans l'enseignement français dans l'espoir que les élèves, à défaut de comprendre les mathématiques, sauront "réussir" quelques exercices fabriqués *ad hoc*.

[17]Le discours pédagogique actuel insiste trop souvent sur la place de la construction du savoir au dépens de l'acquisition du savoir, comme si le rôle de l'enseignement se situait moins dans la transmission d'un savoir déjà constitué que dans la possibilité pour l'élève de construire un savoir qui lui serait propre. On ne construit pas du savoir *ex nihilo*, l'autonomie de l'élève passe par l'appropriation d'un savoir qui *a priori* n'est pas le sien et l'enseignement a justement pour but qu'il devienne sien; c'est parce qu'il a acquis du savoir que l'élève peut construire du savoir. Quelle serait l'autonomie d'une personne qui n'aurait pas *acquis* sa langue maternelle, à laquelle on aurait laissé la *liberté* de construire sa propre langue?

[18]Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, L'Age d'Homme, Lausanne 1975, préface.

[19]Ces trois aspects de l'épistémologie seront développés dans un article à venir.

concerne les mathématiques, on peut ainsi distinguer entre *une mathématique des objets* fondée sur les vérités premières que sont les axiomes, considérés comme propositions portant sur des objets existants, propositions évidentes par elles-mêmes comme on peut le lire dans les traités classiques de géométrie élémentaire, et *une mathématique des relations* comme se présente la construction hilbertienne[20]. La diversité des modes de raisonnement qui ont constitué dans l'histoire ce que l'on appelle la démonstration et la diversité des conditions de légitimation de ces raisonnements nous amène à prendre en compte la diversité des approches du problème des fondements et en particulier son historicité. L'étude de l'épistémologie des fondements se pose ainsi doublement; d'une part une étude *synchronique* s'intéressant aux principes qui régissent les règles de raisonnement, d'autre part une étude *diachronique* dont l'objet est l'étude des transformations des conditions de légitimation du raisonnement dans l'histoire, ce qui pose le double problème des raisons de ces transformations d'une part et d'autre part des *invariants historiques*[21] qui font que l'on reconnaît une unité dans les diverses formes du raisonnement mathématique à travers les âges.

L'épistémologie du fonctionnement peut être considérée comme l'analyse des procédures, moins dans leurs fondements que dans leur signification, autant sur le plan proprement technique que sur le plan conceptuel. Il s'agit ici moins de rechercher un discours fondateur que d'expliciter comment des procédures, des modes de raisonnement ou des modes de recherche se sont constitués et comment ils ont été et sont utilisés[22]. Ceci nous renvoie encore une fois aux raisons qui conduisent à fabriquer de tels procédures, c'est-à-dire aux problèmes qui en sont à l'origine.

L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit l'homme à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes. Si, comme le dit Max Weber, *"la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation"*[23], c'est à travers les problèmes que la méthode scientifique s'est construite et c'est dans le caractère même de ces problèmes et leur formulation que l'on peut essayer de comprendre comment se sont mis en place les théories plus ou moins sophistiquées qui constituent la science. Cela nous conduit à privilégier la notion de problématique (ou de champs de problèmes[24]) dans l'étude des conditions de la construction de la science, problèmes de fondements et règles de fonctionnement s'articulant autour des problématiques dans lesquelles ils se situent.

C'est avec l'épistémologie des problématiques que nous reviendrons à l'histoire des mathématiques, dans la mesure où une analyse historique de l'évolution d'un domaine de la connaissance nous permet de mieux appréhender les diverses significations de ce domaine de la connaissance. Pour préciser ce point, il nous semble nécessaire de

---

[20]Rudolf Bkouche, "Le projectif ou la fin de l'infini" in *Histoires d'infini*, Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie (Brest 1992), IREM de Brest 1994 et "Axiomatique euclidienne et axiomatique hilbertienne" (à paraître).

[21]Pour la notion d'invariant historique, nous renvoyons à la leçon inaugurale de Paul Veyne au Collège de France (Paul Veyne, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976)

[22]On pourrait citer le calcul différentiel de Leibniz (cf. G. W. Leibniz, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989) ou le rôle de l'analytique dans les travaux de Lagrange (cf. Rudolf Bkouche, "Les aventures de la méthode analytique", colloque inter-IREM Epistémologie, Reims, mai 1996).

[23]Max Weber, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965, p. 203

[24]pour reprendre l'heureuse expression du *Groupe d'Enseignement Mathématiques* de Louvain-la-Neuve (G.E.M.) (cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII).

mettre l'accent sur l'ambiguïté épistémologique de l'histoire des sciences et par cela même sur l'ambiguïté de l'intervention de l'histoire des sciences dans l'enseignement scientifique.

Dans l'introduction des *Fondements de l'Arithmétique*, Frege écrit, à propos de la méthode historique:

"La méthode historique, qui veut surprendre la genèse des choses et connaître l'essence par la genèse, a sans doute une vaste juridiction; elle a aussi ses limites."[25]

Nous ne discuterons pas ici le point de vue de Frege qui oppose, quant aux travaux sur les fondements des mathématiques, méthode logique et méthode historique; nous voulons seulement, nous appuyant sur la critique de Frege, mettre l'accent sur l'ambiguïté de ce que l'on appelle la méthode historique, ambiguïté que l'on peut situer dans la confusion entre *l'origine des notions* et *l'histoire de leurs découvertes* pour reprendre une distinction proposée par Leibniz[26], l'origine renvoyant à un *"ordre naturel des idées"* indépendant de l'esprit humain alors que l'histoire renvoie aux *"accidents"* et *"occasions"* qui permettent les découvertes.

On peut demander à l'histoire de découvrir l'*essence des choses* en retrouvant leur genèse, ce qui suppose une signification première originelle, la compréhension des choses passant nécessairement par les retrouvailles de cette signification première. L'histoire devient ainsi sa propre négation, son objet est moins de comprendre un processus historique en tant que tel que de s'appuyer sur le développement historique pour redécouvrir un sens originel perdu[27]; en ce qui concerne l'enseignement, la méthode historique serait alors le moyen d'atteindre cette signification première. La méthode historique ainsi conçue repose sur une double illusion, d'une part l'existence d'une signification première assimilée à l'*essence des choses*, d'autre part la nécessité d'atteindre cette signification première pour comprendre les choses que l'on étudie; c'est une telle conception de l'histoire que critique, avec raison, Frege.

On peut aussi chercher dans l'histoire moins une origine illusoire que la compréhension d'un certain type de développement; en ce qui concerne l'histoire des sciences, la question n'est plus celle de la genèse d'une notion, au sens où cette genèse nous donnerait la clé, c'est-à-dire le moyen d'atteindre l'essence de cette notion, elle est celle d'une part des conditions de son émergence lorsque cela est possible[28], d'autre part des modes de développement de cette notion, ce qui nous renvoie à l'épistémologie des problématiques. Dans une telle conception, la mise en place d'une perspective histo-

---

[25]Gottlob Frege, *Les Fondements de l'Arithmétique* (1884) (traduction et introduction de Claude Imbert), Editions du Seuil, Paris 1969, p. 119

[26]Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*, Garnier-Flammarion, Paris 1966, livre III, chapitre 1, p. 237.

[27]Nous rapprocherons cette conception de l'histoire des conceptions de Hegel qui, en cherchant une signification globale de l'histoire, se propose moins de l'étudier dans sa réalité que de la redéfinir afin de la mieux placer dans son cadre supposé. Dans ces conditions, *l'essence des choses* représente moins le développement historique que les conceptions de l'historien, autrement dit, ce qui soutient l'histoire ne relève plus de l'histoire. On peut aussi considérer que les conceptions de l'historien s'inscrivent elles-mêmes dans l'histoire, mais c'est ici un autre problème, moins celui de l'histoire que celui de l'histoire de l'histoire.

[28]Rappelons que Frege, dans l'ouvrage cité ci-dessus, se propose d'expliciter la notion de nombre entier. On sait que cette notion remonte aux débuts de l'histoire de l'humanité et qu'il ne peut être question de connaître sa genèse autrement que par une reconstruction hypothétique, cette reconstruction s'appuyant sur les conceptions propres de son auteur (cf. note précédente). Si une telle méthode de reconstruction peut avoir son utilité dans le travail de l'historien des sciences, elle est essentiellement d'ordre heuristique.

rique dans l'enseignement a pour objet moins un enseignement en tant que tel de l'histoire que la problématisation des notions enseignées; que les problématiques sur lesquelles se construit l'enseignement soient alors les problématiques originelles ou non devient alors de peu d'importance.

C'est, bien évidemment, cette seconde conception de l'histoire qui sous-tend cet exposé, la place de l'histoire des sciences dans l'enseignement des sciences se situant essentiellement dans ses implications pédagogiques, autrement dit, dans ce qu'elle permet de comprendre de la science enseignée; c'est en cela que l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement d'une science diffère d'un enseignement de l'histoire de cette science. Cela nous conduit à distinguer, d'une part le rôle de la connaissance historique dans l'élaboration de l'enseignement, lequel relève du métier d'enseignant (ce qui pose la question de la place de l'histoire des sciences dans la formation des maîtres), d'autre part l'intervention effective de l'histoire des sciences dans l'enseignement. La mise en place d'une perspective historique dans l'enseignement n'implique en rien que l'histoire apparaisse en tant que telle dans l'enseignement lui-même, c'est alors au maître que revient la détermination de la part effective d'histoire (cours d'histoire proprement dit, lecture de textes anciens, reconstitution de problèmes dits "historiques"[29],…) intervenant dans la classe, ce qui suppose que le maître ait, d'une part la connaissance des aspects historiques de ce qu'il enseigne, d'autre part qu'il ait su porté sur ces aspects historiques un regard épistémologique[30].

A côté de ces deux conceptions de la place de l'histoire dans l'enseignement, celle que l'on pourrait appeler *hégélienne* et celle de *la perspective historique*, je parlerai d'une troisième conception, celle de l'analogie entre le développement historique des sciences et le développement personnel de la connaissance, entre la phylogenèse et la psychogenèse, pour reprendre une terminologie devenue classique[31]. Cette conception, que Piaget a développée autour de l'*épistémologie génétique*, me semble doublement réductrice, sur le plan du développement personnel d'une part, sur le plan de l'histoire collective d'autre part.

L'analogie piagétienne repose sur l'hypothèse de l'existence de structures psychologiques profondes qui régissent, *via* les mécanismes de l'accommodation et de l'assimilation, l'acte de connaître, constituant ce que l'on appelle aujourd'hui la *cognition*[32]. L'aspect problématique de la construction scientifique est ainsi éliminé, celle-ci se réduisant aux seules interactions entre un sujet connaissant *objectivé* comme ensemble de processus cognitifs et le monde extérieur, l'ensemble des processus cognitifs étant lui-même organisé par la théorie des stades, laquelle rend compte de l'analogie entre la genèse des connaissances chez l'individu et le développement historique de la science[33].

---

[29]moins pour dire que tel problème a été étudié par untel à telle époque, ce qui présente peu d'intérêt, que pour mettre en place, sous une formulation moderne, une problématique significative.

[30]L'expérience de l'enseignement de l'histoire des mathématiques, autant dans les classes que dans la formation des maîtres, nous apprend que l'enseignement de l'histoire d'une science a ses propres difficultés d'appréhension; il s'agit donc moins d'ajouter une discipline de plus à l'enseignement que d'expliciter comment une perspective historique permet, pour qui l'apprend, une meilleure compréhension de la science en question.

[31]Jean Piaget et Roland Garcia, *Psychogenèse et Histoire des Sciences*, Flammarion, Paris 1983

[32]sur les notions d'accomodation et d'assimilation, nous renvoyons à l'article de Piaget, "La psychogenèse des connaissances et sa signification épistémologique" in *Théories du langage, Théories de l'apprentissage, Le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*, organisé et rtecueilli par Massimo Piatelli-Pamarini, Editions du Seuil, Paris 1979, p. 53-64

[33]Jean Piaget, *L'épistémologie génétique*, "Que sais-je?", PUF, Paris 1970

Ainsi le sujet connaissant n'existe plus en tant que sujet, du moins de sujet conscient, si l'on considère que le sujet n'est plus qu'un ensemble de processus en interaction avec le milieu dans lequel il baigne. De même l'histoire n'est plus que la description d'un ensemble d'interactions qui ont conduit, plus ou moins nécessairement, à l'état actuel des connaissances, ce qui renvoie à un aspect téléologique que l'on pourrait situer à l'intersection de Hegel et de Darwin. En ce sens, l'épistémologie génétique élimine le sujet, autant le sujet individuel que le sujet collectif, mais c'est peut-être le prix à payer pour amener l'épistémologie à la scientificité.

C'est ce souci de scientificité qui amène Piaget à écrire dans la préface de son *Introduction à l'épistémologie génétique*:

"Il y a longtemps déjà que la psychologie expérimentale, la sociologie et la logistique, ou logique algébrique, pour ne parler que des disciplines qui ont fourni le plus de travaux collectifs, se sont constituées à titre de sciences distinctes, indépendantes des discussions d'ensemble de la philosophie. Nous voudrions examiner à quelles conditions il pourrait en être ainsi de l'épistémologie génétique, ou théorie de la connaissance scientifique fondée sur l'analyse du développement même de cette connaissance. Il s'agit donc de chercher s'il est possible d'isoler l'objet d'une telle discipline et de constituer des méthodes spécifiques, propres à trouver la solution de ses problèmes particuliers."[34]

et préciser quelques lignes plus loin comment se différencie philosophie et science, la première se donnant pour objet *"la totalité du réel, de la réalité extérieure comme de l'esprit et des relations entre eux"* tandis que la seconde *"se donne au contraire un objet limité"*, ne devenant discipline scientifique *"qu'avec la réussite d'une telle délimitation"*.

Piaget oppose alors les *"divergences inévitables"* entre les diverses philosophies et *"l'accord relatif des esprits"* atteint par une science, mais, précise-t-il, *"c'est dans la mesure où elle ne sollicite cet accord que pour la solution de problèmes restreints et dans l'emploi de méthodes également bien définies"*.

L'épistémologie génétique, constituée comme approche scientifique de la connaissance, doit donc délimiter les objets qu'elle étudie si elle veut aborder, autrement que par la seule spéculation philosophique, le problème fondamental des rapports du sujet connaissant avec les objets qu'il est amené à connaître; elle est ainsi amenée *"pour expliciter comment le sujet est affecté par l'objet"* à "*poser ce sujet et cet objet réunis à titre d'objet de sa propre recherche"*, le nouveau sujet connaissant étant alors le théoricien de la connaissance[35]. C'est cela qui conduira Piaget à élaborer ce que l'on appellerait aujourd'hui un "modèle" de sujet connaissant, l'ensemble de processus cognitifs dont nous avons déjà parlé. La théorie des stades, en rendant compte aussi bien du développement collectif que du développement individuel, légitime ainsi l'analogie entre le développement historique de la science et la genèse de la construction des connaissances chez l'individu, analogie que Piaget développe tout au long de son oeuvre, quitte à la remettre en question lorsque besoin est, nous le verrons à propos de la géométrie.

En ce qui concerne les mathématiques, cette analogie se réclame de la rencontre entre la psychologie piagétienne et la pensée mathématique contemporaine comme on peut le lire dans les articles de Piaget et de Dieudonné dans l'un des premiers ouvrages

[34]Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique* (2 tomes), PUF, Paris 1950; réédition 1973, tome 1, p. 13
[35]Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, o.c. tome 1, p. 45

où se dessine une réflexion sur la réforme des *mathématiques modernes*[36]; elle a conduit Piaget à identifier ce qu'il considère comme les structures profondes de la connaissance mathématique (lesquelles relèveraient selon Piaget de la psychologie) avec les structures-mères de Bourbaki (structures d'ordre, structures algébriques, structures topologiques) telles qu'elles ont définies dans son article-programme "L'architecture des sciences mathématiques"[37]. Une telle identification impliquait une harmonie entre le développement des mathématiques contemporaines et l'apprentissage des mathématiques, la construction bourbakienne apparaissant moins comme un moment de l'histoire des mathématiques que comme le mode de construction de la pensée mathématique; l'apprentissage des mathématiques passait ainsi par les structures-mères dont Bourbaki avait expliqué, dans l'article cité ci-dessus, comment elle fondaient les mathématiques.

S'appuyant sur l'analogie supposée entre les structures de la pensée telle qu'elle se construisent chez l'enfant et les structures-mères de Bourbaki (cf. ci-dessus), Piaget explique alors la construction de la connaissance géométrique chez l'enfant d'un point de vue structural: les structures topologiques précèdent les structures projectives, lesquelles précèdent les structures métriques; la connaissance géométrique se construit ainsi selon un schéma correspondant au *Programme d'Erlangen*. Les mathématiques contemporaines en adoptant le point de vue structural ont ainsi retrouvé l'ordre *"naturel"* de la construction de la connaissance, contrairement à l'ordre historique qui s'est d'abord appuyé, avec la géométrie grecque, sur les relations métriques, le projectif venant en second et le topologique en dernier lieu seulement. Piaget explique ainsi ce renversement:

"Si, historiquement, ces éléments semblent donnés antérieurement à la découverte de la structure, et si cette dernière joue ainsi essentiellement le rôle d'un instrument réflexif destiné à dégager leurs caractères les plus généraux, il ne faut pas oublier que, psychologiquement, l'ordre de la prise de conscience renverse celui de la genèse: ce qui est premier dans l'ordre de la construction apparaît en dernier à l'analyse réflexive, parce que le sujet prend conscience des résultats de la construction mentale avant d'en atteindre les mécanismes intimes."[38]

ce qui semble pour le moins peu convaincant.

Il faut alors revenir à une conception problématique de l'histoire des sciences. La géométrie s'est construite autour de la mesure des grandeurs, géométrie pratique qui relève de la métrologie mais aussi géométrie rationnelle lorsqu'elle se propose de déterminer, par le seul raisonnement, les propriétés de ces grandeurs à partir de quelques unes d'entre elles considérées comme vérités premières; c'est le principe de l'axiomatique euclidienne et l'on sait que les *Eléments* d'Euclide ont constitué et constituent encore, pour les héritiers de la pensée grecque, le modèle de toute activité scientifique, voire de toute activité qui se veut fondée en raison[39]. Les propriétés topologiques restent implicites,

---

[36]Jean Piaget et *al*, *L'Enseignement des mathématiques*, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955, chapitre premier, "Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence" par Jean Piaget, chapitre III, "L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre" par Jean Dieudonné.

[37]Nicolas Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), Cahiers du Sud, Paris 1948; réédition Blanchard, Paris 1962

[38]Jean Piaget et *al*, *L'Enseignement des mathématiques*, *op. cit.* p. 14

[39]L'exemple canonique étant l'*Ethique* de Spinoza.

peut-être à cause de leur évidence intuitive et il faudra attendre le XVIIIème siècle pour qu'elles posent problème. Quant aux notions projectives, elles prennent naissance autour des pratiques perspectivistes; c'est la nécessité de mettre en ordre ces pratiques (et l'ordre ici est d'abord l'ordre euclidien) qui conduit les géomètres à mettre en avant ce que l'on appelle aujourd'hui les propriétés projectives.

C'est cet aspect problématique que Piaget ignore dans son identification des structures psychologiques et des structures mathématiques; il peut ainsi reconstruire l'histoire en fonction des nécessités internes de l'épistémologie génétique en même temps qu'il explicite une théorie psychologique de la connaissance qui s'adapte à cette histoire reconstruite. On pourrait dire que c'est l'état de la connaissance mathématique contemporaine qui le force à construire une histoire et une psychologie compatible avec cet état, comme si cet état avait besoin d'être légitimé par des considérations psychologiques ou épistémologiques[40]. Ainsi le point de vue structural se développe sur une unification qui se propose de fonder à la fois les mathématiques et la connaissance des mathématiques.

Une telle unification pose cependant un problème; si les structures mathématiques sont la marque de structures cognitives profondes, comment la tentative d'explication psychologique de la connaissance mathématique peut-elle éviter la circularité de la psychologie lorsque celle-ci s'appuie sur les mathématiques. Loin de rejeter une telle circularité, Piaget la prend en charge comme participant de l'édifice qu'il construit, distinguant seulement, chez le sujet connaissant, entre une prise de conscience naïve qui ignore les structures profondes mises en jeu et une analyse réflexive qui permet au sujet d'expliciter ces structures profondes; c'est ainsi qu'il écrit[41]:

"Les mathématiques reposent sur un ensemble d'opérations constitutives, dont la conscience naïve prend simplement acte, tandis que la réflexion critique, dite "théorie du fondement des mathématiques" en poursuit systématiquement l'analyse."

Ce n'est pas ici le lieu d'une étude approfondie du cercle piagétien, cercle incontournable dans toute tentative d'explication de la construction de la connaissance par le sujet connaissant et qui marque les limites de la scientificité d'une telle tentative[42].

La position piagétienne pose alors une double question.

La première question est celle des limites de l'identification des structures cognitives profondes (si elles existent) et des structures mises en place par un domaine de la science au cours de son développement. Quel est le lien, par exemple, entre les notions topologiques de la connaissance naïve et les structures topologiques des mathématiques contemporaines? question que l'on peut préciser de la façon suivante: dans quelle mesure les notions naïves sont-elles constitutives des constructions structurales et dans

---

[40]Peut-être faut-il rappeler ce truisme qui nous dit qu'un domaine de la connaissance n'a pas besoin de telles légitimations pour se développer et que le rôle de l'épistémologie est essentiellement de comprendre comment un domaine de la connaissance se développe et comment il construit les conditions de sa légitimation; mais la compréhesion se situe ici moins dans la définition de causes ou de lois (au sens des sciences positives) que dans la recherche de raisons (sur la distinstion qentre causes et raisons, cf. Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*, Gallimard, Paris 1996).

[41]Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, o.c. tome 1, p. 47

[42]La reconnaissance de telles limites est loin d'être acceptée comme le montrent, d'abord l'épistémologie génétique, ensuite le développement récent des sciences cognitives; mais peut-être est-ce là la marque d'un point de vue naïf incapable de sortir de l'opposition métaphysique/sciences positives telle qu'elle a été codifiée par le positivisme.

quelle mesure les constructions structurales, une fois construites, intègrent-elles les notions naïves?

La seconde question se situe à l'intérieur même de la psychologie; dans quelle mesure les structures mises en place par la psychologie cognitive ont-elles une réalité chez le sujet connaissant. Il y aurait ici à distinguer le sujet cognitif, construction conceptuelle de la psychologie, et le sujet connaissant, celui qui construit sa connaissance; le premier problème des théories cognitivistes est alors celui de l'adéquation (de l'idonéité, dirait Gonseth) du sujet cognitif comme *modèle* (au sens technique du terme) du sujet connaissant[43].

Il semble ici que les conceptions de Piaget, enthousiasmé par sa rencontre avec les mathématiciens[44], relève d'un malentendu sur la notion de structure, malentendu qu'il faudrait replacer, du point de vue de l'histoire des idées, dans l'histoire des courants structuralistes du milieu de ce siècle. En fait, le point de vue piagétien subordonne les aspects problématiques de la connaissance (au sens que nous avons dit ci-dessus) à la conception structurale, laquelle se propose, par souci de cohérence et de simplicité, la reconstruction de la connaissance; en ce sens les conceptions piagétiennes nous renvoient à une ontologie (au sens métaphysique du terme) des structures, position paradoxale pour qui se proposait de construire une épistémologie positive[45]. Comment peut-on comprendre, du point de vue de Piaget, la distinction signalée ci-dessus, entre une mathématique des objets et une mathématique des relations, si ce n'est en recourant à une conception téléologique de l'histoire, banale il est vrai, la rigueur hilbertienne rectifiant les fameuses lacunes d'Euclide et le point de vue structural apparaissant comme un aboutissement nécessaire de la connaissance mathématique. Les enjeux mathématiques qui ont conduit Hilbert à mettre en place les méthodes formalistes se réduiraient donc à la seule nécessité d'atteindre la vérité structurale et de réconcilier enfin les mathématiques et la psychologie; c'est faire bien peu de cas des problèmes auxquels se sont confrontés les mathématiciens et de l'invention qu'ils ont manifestée pour les résoudre.

Le problème posé ici n'est autre que celui du lien complexe entre l'épistémologie, considérée comme un chapitre de la philosophie, et la psychologie cognitive; il me semble que l'explicitation d'un tel lien, pour se construire en dehors des confusions (telle celle de Piaget) ou des anathèmes (telle les positions du psychologisme et de l'antipsychologisme[46]), doit commencer par une analyse de la distinction entre cognition et connaissance.

A partir des trois conceptions de l'intervention de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, nous avons voulu ici mettre en avant ce que l'on pourrait considérer comme les perversions d'une telle intervention, parmi lesquelles l'introduction d'une nouvelle discipline, l'histoire des mathématiques, qui poserait autant de problèmes que les mathématiques[47]. En particulier, à travers la critique de Piaget,

---

[43]Sur la distinction entre sujet cognitif et sujet connaissant nous renvoyons à notre article cité "Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie".

[44]Jean Piaget et *al*, *L'Enseignement des mathématiques*, *op. cit.*

[45]Jean Piaget, *Sagesse et illusions de la philosophie*, PUF, Paris 1965, réédité en 1992. Piaget s'y oppose, non sans raison, à certaines prétentions *"suprascientifiques"* de la philosophie, mais cette critique nécessaire (même si elle est souvent injuste) de la philosophie s'accompagne en contrepoint d'une défense de la science (en particulier des sciences humaines) qui relève plus de la foi rationaliste de son auteur que de l'argumentation rationnelle.

[46]Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*, o.c.

[47]Veloso demandait non sans humour lors de l'Université d'Eté de Montpellier (juillet 1993) quelle discipline nouvelle il faudrait introduire dans l'enseignement, lorsqu'après avoir introduit l'histoire des mathé-

nous avons voulu poser, non seulement la question de la pertinence d'une analogie entre le développement de l'histoire et la genèse des connaissances chez l'individu, mais aussi poser le problème de la tendance à la psychologisation des problèmes d'enseignement.

La réflexion sur l'enseignement d'un domaine de la connaissance participe essentiellement de l'épistémologie de ce domaine, mais lorsque nous disons épistémologie, nous pensons plus à la réflexion philosophique qu'à la fabrication d'une nouvelle science positive. L'épistémologie ne peut être une science au sens que son objet d'étude est la science en tant que construction de l'esprit humain, d'un esprit humain qui, parce qu'il est sujet conscient et qu'il agit en fonction de finalités qu'il s'est fixées, individuellement ou collectivement, ne peut être réduit à l'état d'objet de connaissance observé par un sujet, lequel ne pourrait être qu'un super-sujet épistémologue appelé, lui aussi, à devenir un objet de connaissance pour le super-super-sujet mettant en place une épistémologie du second ordre et ainsi de suite; c'est là le paradoxe de toute théorie cognitiviste qui se veut scientifique. En ce sens, s'il y a une réflexion didactique, cette réflexion est d'ordre philosophique avant que de participer de la science positive, si l'on considère que l'élève est un sujet et que l'acte d'enseignement est une relation entre sujets, le sujet maître et le sujet élève, relation qui se construit autour d'un savoir, le rôle du maître étant de transmettre ce savoir à l'élève, le rôle de l'élève étant de prendre ce savoir au maître, la finalité de cette relation étant d'amener l'élève à de ne plus dépendre du maître. S'il y a quelqu'objectivité dans l'enseignement, elle se définit autour du savoir.

Autant dire que le rôle d'une intervention de l'histoire d'une science dans l'enseignement de cette science reste essentiellement de mettre en valeur les enjeux de la construction de la connaissance; c'est en ce qu'elle s'appuie sur une réflexion d'ordre épistémologique qu'elle peut permettre de donner à *ceux qui sont enseignés* (pour reprendre l'expression de Sanchez citée en exergue) les moyens de comprendre *la force de ce qui leur est enseigné*.

matiques pour faciliter l'apprentissage des mathématiques, il faudra prendre en charge les difficultés posées par l'enseignement de l'histoire des mathématiques.

Annexe : De l'idéal de simplicité dans les sciences

"It seems to me to be one of the chief objects of mathematical instruction to develop the faculty of perceiving this simplicity and harmony, which we cannot fail to observe in the theoretical physics of the present day."[48]

Hermann Weyl

Dans un ouvrage de réflexion sur l'activité scientifique, Emile Picard écrivait:

"On doit d'ailleurs reconnaître qu'il est indispensable, pour le progrès de la science, que les choses paraissent simples"[49]

Notons d'abord que Picard ne dit pas que les choses sont simples, mais demande qu'elles paraissent simples. Cette exigence marque ainsi moins une propriété du monde que la volonté de l'esprit humain de construire la simplicité du monde. Et faut-il rappeler que les mathématiques sont l'un des lieux privilégiés où se construit la simplicité du monde?

Exigence fondatrice de la pensée scientifique, cet idéal de simplicité ne saurait être ignoré de cette initiation à la pensée scientifique que constitue l'enseignement des sciences[50]. C'est cet idéal de simplicité qui permet de comprendre les raisons des sophistications nécessaires élaborées tout au long de l'histoire des sciences, sophistications dont le premier objectif reste de rendre plus aisé, à l'intérieur d'un domaine de la connaissance, autant les instruments techniques pour résoudre les problèmes que l'on y rencontre que les constructions conceptuelles qui permettent une appréhension globale de ce domaine de la connaissance.

J'aimerais citer un ouvrage d'enseignement élémentaire expliquant à de jeunes élèves les *raisons* du calcul littéral:

"la résolution d'un problème est souvent facilitée lorsqu'on représente par des lettres les nombres inconnus qui interviennent dans ce problème."[51]

précisant ensuite:

"On peut raisonner sur ces lettres comme s'il s'agissait de nombres inconnus."

Il s'agit moins ici de développer le calcul littéral, ce qui n'aurait aucun sens à ce niveau, que de montrer comment l'introduction de lettres pour désigner les inconnues conduit à la *mise en équation* d'un problème et à la résolution d'une équation, et comment cette *résolution algébrique*, comme on disait alors, simplifie la résolution du

---

[48]Hermann Weyl, *Space, Time, Matter* (1918) (translated from the German by Henry L. Brose), Dover Publications, New York 1952, p. 23

[49]Emile Picard, *La Science Moderne*, Flammarion, Paris 1914, p. 68

[50]Est-ce un simple truisme que de rappeler que l'enseignement des sciences participe de l'initiation à la pensée scientifique? Les idéologies pédagogistes d'aujourd'hui, que ce soit celle de la pédagogie centrée sur l'apprenant ou celle, à prétentions plus savantes, de la transposition didactique, nous rappellent que ce que ce qui nous semble un truisme ne "va plus de soi" (cf. Rudolf Bkouche,*La formation des maîtres: professionnalisation ou formation professionnelle*, o. c.).

[51]Lebossé et Hémery, *Arithmétique, Algèbre et Géométrie* (classe de cinquième des lycées et collèges), Fernand Nathan, Paris 1948, p. 91

problème. C'est cette simplification de la résolution des problèmes qui conduit à prendre conscience de l'intérêt du calcul littéral et des raisons de le développer, les polynômes et la théorie des équations viendront après.

On peut rapprocher les assertions de Lebossé et Hémery de celle de Descartes ouvrant la *Géométrie*:

"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."[52]

La méthode cartésienne consiste alors, d'abord à restreindre le champ des longueurs à déterminer aux seules longueurs de droites parallèles aux directions de coordonnées, ensuite écrire, en utilisant le calcul de Viète[53], les équations auxquelles satisfont les longueurs inconnues cherchées et à résoudre les équations correspondantes. On voit ainsi comment le calcul permet de résoudre aisément les problèmes dès lors que l'on sait les réduire au calcul. Le calcul littéral, qui permet de calculer indifféremment sur les quantités connues ou inconnues[54], conduit alors, par la seule utilisation des règles de calcul, à la résolution du problème posé. Nous ne nous étendrons pas ici sur la méthode de la géométrie analytique, nous voulions seulement dire comment elle participe de cet idéal de simplicité dont nous avons parlé ci-dessus.

La méthode (au sens cartésien du terme) n'est alors que l'instrument de cette construction de la simplicité.

On retrouve ce même idéal de simplicité dans l'autre grande méthode contemporaine définie par Desargues[55], la méthode arguésienne qui unifie, sur le plan de la représentation et sur le plan du langage, le théorie des coniques, méthode qui conduira au développement de la géométrie projective.

Ainsi les deux méthodes géométriques, l'analytique et la synthétique, celle du calcul et celle des figures, marquent essentiellement un effort de simplicité (au sens de la construction du simple)[56]; c'est ainsi qu'il faut comprendre le mode d'unification géométrique que chacune d'elles propose aux géomètres, d'autant plus que le dépassement de l'opposition entre les deux méthodes se fera par une "simplificité" encore plus grande, laquelle conduira aux synthèses modernes de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes.

C'est encore cet idéal de simplicité que l'on retrouve dans le point de vue structural développé par Bourbaki[57] et dans la tentative de modernisation de l'enseignement des mathématiques proposée par la réforme de 1970.

Pourtant l'échec de la réforme de 1970 dans sa volonté de construire un enseignement des mathématiques pour tous pose un problème quant à la signification de

---

[52]René Descartes, *Discours de la Méthode, plus La Dioptrique, les Météores et la Géométrie* (1637), Fayard, Paris 1986, p. 333

[53]François Viète, "Introduction à l'Art Analytique" (traduction française par Vaulézard) in Vaulézard, *La Nouvelle Algèbre de M. Viète* (1630), Fayard, Paris 1986

[54]Rappelons que l'apport de Viète a été de représenter les quantités connues (les coefficients des équations) par des lettres, donnant ainsi toute sa signification au calcul littéral.

[55]Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.

[56]C'est ainsi que l'on peut comprendre le discours sur la généralité nécessaire des méthodes géométriques développé par Chasles dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1937, réédition Gabay, Paris 1989).

[57]Nicolas Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Les Grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), Cahiers du Sud, 1948; nouvelle édition augmentée, Blanchard, Paris 1962

cette simplicité: de quelle simplicité s'agit-il? et dans quelle mesure les discours sur la simplicité des mathématiques sont-ils pertinents, en particulier en ce qui concerne l'enseignement?

Lorsque Bourbaki explique, dans le mode d'emploi[58] de ses *Eléments de Mathématiques*:

"Le traité prend les mathématiques à leur début…"

il s'empresse de préciser:

"Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université."

rappelant ainsi que l'ouvrage n'est pas un ouvrage d'enseignement et qu'il ne s'adresse pas au débutant.

C'est que la simplicité des constructions structurales ne peut être perçue que dans une compréhension globale des mathématiques.

Ainsi la définition d'un groupe, aussi simple soit-elle dans sa formulation (et d'une certaine façon elle est trop simple), non seulement n'épuise pas la richesse de la notion, mais risque d'occulter, pour le lecteur non averti, ce qui fait l'intérêt de cette notion en réduisant celle-ci à sa seule définition et à ses premières propriétés. Autant dire que ce qui importe ici, c'est moins la *simplicité* en tant que telle que la *construction du simple* que constitue la mise en place d'un concept (ici le concept de groupe) par rapport aux problèmes dans lequel il intervient; la notion de groupe n'est pas née d'une définition formelle s'insérant dans le cadre d'une algèbre structurée telle que l'expose l'ouvrage de Bourbaki, mais de son usage dans l'étude de problèmes spécifiques, tels celui de la résolution des équations algébriques avec le point de vue galoisien, ou celui de l'étude des transformations géométriques avec le point de vue du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein.

On voit apparaître ici le lien entre cette construction du simple et l'épistémologie des problématiques dont nous avons parlé ci-dessus.

Du point de vue de l'enseignement, cela nous rappelle que le simple n'est pas donné, qu'il est au contraire l'un des objectifs de l'enseignement, peut-être l'un des objectifs les plus difficiles.

Pour revenir à la notion de groupe, rien ne semble plus facile que d'en donner la définition et d'en montrer quelques propriétés élémentaires, puis, par souci de *concret* (comme on aime à dire!), d'exhiber quelques groupes parmi les contenus enseignés pour en montrer l'intérêt? En quoi cela permet-il de comprendre la richesse du concept de groupe, en quoi cela permet-il de comprendre cette simplicité dont nous avons parlé ci-dessus? Notons que la démarche opposée qui consiste à exhiber d'abord quelques *situations concrètes* pour justifier la définition formelle n'est pas plus adéquate.

Le problème n'est pas de répondre à cette difficile question de la simplicité, avec le risque de retomber dans les illusions de la réforme des mathématiques modernes (ce que j'ai appelé par ailleurs l'illusion langagière[59]). C'est justement le rôle d'une réflexion épistémologique sur la signification de la simplicité dans la science qui peut permettre à

[58]Ce mode d'emploi accompagnait les premiers fascicules publiés par Bourbaki.

[59]Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, o. c. chapitre 1; Rudolf Bkouche, *La formation des maîtres: professionnalisation ou formation professionnelle,* o. c.

celui qui enseigne de prendre en compte dans son enseignement la construction de cette simplicité et d'amener *ceux qui sont enseignés*[60] à comprendre le sens de cette simplicité, à comprendre combien la construction de cette simplicité est difficile, mais à comprendre aussi pourquoi cela vaut la peine de prendre en charge une telle difficulté.

[60]pour reprendre une expression de Francisco Sanchez dans l'heureuse traduction de Andrée Camparot (cf. Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984, p. 167)