La démonstration : du réalisme au formalisme

rudolf bkouche
IREM de Lille

"Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration."[1]

Aristote

Introduction générale

"Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration"[2]

écrit Nicolas Bourbaki au début de ses *Eléments de Mathématiques*.

Pourtant une lecture comparée de textes mathématiques grecs et de textes mathématiques contemporains nous apprend que les formes de la démonstration se sont transformées au long de l'histoire des mathématiques de sorte qu'il peut être difficile de reconnaître le même objet dans ces divers textes ; d'autant que l'on explique aujourd'hui que la démonstration grecque est loin d'être aussi rigoureuse qu'elle est apparue pendant plusieurs siècles et l'on a même parlé de *lacunes* dans le texte euclidien.

Ces remarques nous conduisent à parler du caractère historique de la démonstration, ce qui pose une double question : en quoi s'agit-il du même objet, autrement dit en quoi les démonstrations des *Eléments* d'Euclide et les démonstrations des *Eléments* de Bourbaki, pour prendre des textes aux deux bouts de l'histoire des mathématiques, participent-elles de la même notion et si elles participent de la même notion, quelles sont les raisons qui ont conduit la démonstration à se transformerÊ?

Nous aborderons ces questions à partir de quelques démonstrations exemplaires.

Cela nous conduira à expliciter les raisons qui ont conduit à transformer, non seulement les formes de la démonstration, mais plus généralement le statut des objets mathématiques. On pourrait résumer ces transformations *via* la question suivante : en quoi ces deux sommes de la géométrie du XXème siècle que sont les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Jacques Hadamard[3] et la *Géométrie* de Marcel Berger[4] parlent-elles du même domaine de la connaissance ? on y retrouve les mêmes termes et les mêmes énoncés de théorèmes mais les définitions des mêmes termes sont différentes et les démonstrations des mêmes théorèmes sont différentes.

Cela nous conduira aussi à tenter de définir des permanences en nous appuyant sur la notion d'*invariant historique* définie par Paul Veyne[5], ce qui permet de répondre à la question : en quoi les divers modes de raisonnement que l'on rencontre dans l'histoire des mathématiques participent-ils d'une même notion, celle que nous appelons la démonstration ? Nous reviendrons sur ce point dans un article ultérieur.

De quelques démonstrations

---

[1]Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979, p. 8
[2]Nicolas Bourbaki, *Théorie des Ensembles*, Hermann, Paris 1954, p. 1
[3]Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, (2 tomes), Armand Colin, Paris 1949, réédition Jacques Gabay, Paris 1989
[4]Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, réédition en 2 volumes, Nathan, Paris 1990
[5]Paul Veyne, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976

1- *Le premier cas d'égalité des triangles*

la démonstration euclidienne

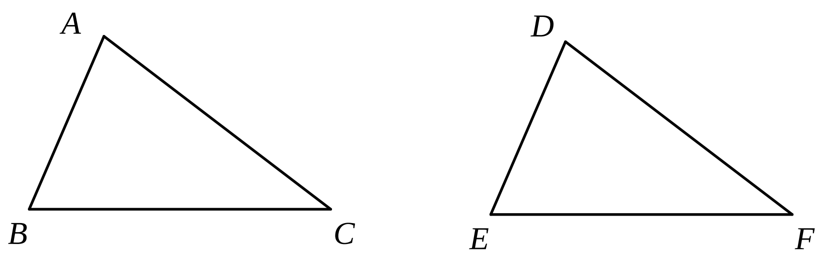
Nous rappellerons d'abord l'énoncé tel qu'il est donné dans les *Eléments* d'Euclide (Livre I, proposition 4)

"Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent."[6]

Voici la démonstration :

"Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle BAC égal à l'angle EDF.

Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.



En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors AB étant ajustée sur DE, la droite AC s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF et lui sera égale. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal, et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE."[7]

Premier point : le raisonnement ci-dessus s'appuie essentiellement sur le principe de l'égalité par superposition. Ce principe exprime une condition d'égalité des figures[8], nous en donnons ici l'énoncé dans la traduction de Vitrac :

---

[6]Euclide, *Les Eléments*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, volume I, p. 200

[7]*ibid*, p. 201-202

[8]Remarquons que l'égalité euclidienne est une égalité de grandeur, l'égalité par superposition impliquant l'égalité de grandeur. Cependant, en ce qui concerne les droites (les segments de droite d'aujourd'hui) et les angles, l'égalité de grandeur est équivalente à l'égalité par superposition.

"Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles."[9]

Ce principe énoncé parmi les axiomes (notions communes) exprime, après les axiomes généraux sur les grandeurs, une première propriété concernant les grandeurs géométriques, savoir, une condition d'égalité, condition qui fait appel au mouvement (la mise en coïncidence). On peut alors considérer ce principe comme exprimant notre expérience des corps solides, un corps solide étant défini comme un corps non déformable par un mouvement sans que l'on puisse définir une antériorité logique des notions de mouvement et de corps solide ; autrement dit, les notions de corps solides et de mouvement sont concomitantes et l'on peut considérer qu'elles participent de l'expérience première de l'homme confronté au monde[10]; c'est en ce sens que l'on peut parler d'un empirisme euclidien.

Second point : la démonstration du premier cas d'égalité des triangles peut être définie comme décrivant une suite d'opérations sur les deux triangles en question. Le discours démonstratif s'appuie explicitement sur les objets (les triangles) représentés par une figure, elle-même *matériellement* représentée par un dessin[11]; c'est en ce sens que l'on peut parler d'une *lecture raisonnée du dessin*. C'est alors l'activité de raisonnement qui permet de dépasser le dessin pour en faire d'abord la figure, c'est-à-dire le dessin questionné, ensuite l'objet idéal (*l'idéalité mathématique*), notion sur laquelle nous reviendrons à la fin de cet article.

Ainsi le raisonnement se définit par rapport à l'objet en même temps que l'objet se construit avec le raisonnement. On peut alors dire que la construction de l'objet, en tant qu'objet géométrique, et le raisonnement sont concomitants ; nous renvoyons ici à la dialectique gonséthienne[12] dont on peut dire qu'elle se constitue dans cette concomitance ; s'il y a une doctrine préalable (pour reprendre les termes de Ferdinand Gonseth) qui fonde les règles du discours démonstratif, cette doctrine ne devient préalable que *a posteriori*, autrement dit c'est la pratique de la démonstration qui permet de la fonder[13].

Nous avons dit le rôle joué par les opérations, opérations mentales il est vrai, mais on peut remarquer qu'une vérification expérimentale de la proposition énoncée consisterait à effectuer les opérations annoncées et à constater la vérité *de fait* de ces propositions. Le passage aux opérations mentales constitue ainsi une étape importante dans la transformation du *fait* en *droit*.

Notons enfin le rôle secondaire joué par la logique, laquelle se présente essentiellement comme réglant un enchaînement ordonné d'opérations ; si la logique joue un

---

[9]Euclide, o.c. p. 178

[10]Nous ne nous intéressons pas ici aux conditions de cette expérience première ; pour préciser notre point de vue nous renvoyons aux trois aspects de la connaissance géométrique développés par Gonseth, l'intuitif, l'expérimental et le théorique, aspects sur lesquels nous reviendrons. Nous renvoyons par ailleurs à un article antérieur, "Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)" in *La Démonstration mathématique dans l'Histoire* (Colloque Inter-IREM Epistémologie, Besançon 1989), Editions IREM Besançon-Lyon 1990.

[11]Sur la définition de la figure et sa relation au dessin, nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996

[12]Pour une étude de la dialectique gonsethienne nous renvoyons à l'artice de Hourya Sinaceur, "La dialectique de l'espace", in *Espace et horizon de réalité* (philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth), sous la direction de Marco Panza et Jean-Claude Pont, Masson, Paris 1992

[13]Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchatel, 1945-1955, volume I : "La doctrine préalable"

rôle de structuration du raisonnement, c'est, pour reprendre l'expression imagée de Gonseth, celui d'un *"agent de la circulation"*[14].

Enfin nous signalerons le rôle de ce premier cas d'égalité des triangles dans la construction de la rationalité géométrique, c'est-à-dire d'une connaissance discursive des situations géométriques : s'appuyant sur le principe de l'égalité par superposition, le premier cas d'égalité des triangles permet de s'en passer et par conséquent d'éliminer toute référence au mouvement dans la suite du discours géométrique[15].

la démonstration hilbertienne

A côté de la démonstration euclidienne que l'on retrouve telle quelle dans la plupart des traités classiques de géométrie élémentaire, nous rappellerons la démonstration hilbertienne correspondante, ce qui nous conduira à préciser en quoi elles se ressemblent et en quoi elles diffèrent. Nous reviendrons plus loin sur les raisons qui ont conduit Hilbert à se détacher des conceptions euclidiennes.

Hilbert explique que la géométrie est l'étude de trois systèmes de choses qu'il introduit ainsi :

"*Nous pensons trois sortes de choses ; nous nommons les choses du premier système des* ***points*** *; nous les désignons par des lettres majuscules A, B, C, …*; *nous nommons* ***droites*** *les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, …*; *nous appelons* ***plans*** *les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs* α, β, γ,…"[16]

Hilbert ne donne aucune définition de ces choses, seulement une façon de les nommer et de les noter ; points, droites et plans ne sont que des mots et ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage[17].

Hilbert poursuit :

"Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur », « entre », « congruent » ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie."

Ici encore les termes « être sur », « entre », « congruent » n'ont d'autre signification que de participer à l'énoncé des axiomes.

Les axiomes expriment les relations entre les termes primitifs, relations à partir desquelles pourra s'élaborer le raisonnement déductif. Hilbert énonce vingt-trois axiomes répartis en cinq groupes correspondants aux différents types de relations : appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore, ces termes ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage et ne sont que des

---

[14]Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, o.c. volume II : "Les trois aspects de la géométrie", p. 62

[15]Cette élimination du mouvement est un élément essentiel du discours de la connaissance rationnelle que l'on peut considérer comme la réponse aux paradoxes de Zénon. Le mouvement ne deviendra objet de connaissance rationnelle que lorsque le temps aura été géométrisé au XVIIème siècle, se distinguant ainsi de la notion de devenir. Le temps de la science classique est un temps statifié.

[16]David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971, p. 11

[17]On connaît la boutade attribuée à Hilbert qui propose de remplacer les termes points, droites, plans par tables, chaises et verres de bières ; la construction n'aurait changé en rien du point de vue de la structure du discours.

constituants du discours géométrique. Nous verrons plus loin le lien avec la connaissance intuitive.

Une fois les axiomes énoncés, la géométrie se développe selon des règles logiques explicites qui régissent l'usage des termes et des énoncés, une démonstration ne s'appuyant que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrées et les règles logiques ; ainsi tout recours à l'intuition ou à la signification des règles et des énoncés est éliminé.

Dans un tel cadre, le mouvement n'a plus sa place, même implicite. Pour définir l'égalité, Hilbert introduit la notion de congruence pour les segments et pour les angles, on définit ainsi deux relations d'équivalence respectivement sur les segments et sur les angles. Pour démonter le premier cas d'égalité des triangles, Hilbert doit énoncer un axiome qui remplace le principe de l'égalité par superposition, qu'il énonce sous la forme suivante (axiome III,5)

"Si dans deux triangles ABC et A'B'C', les congruences suivantes sont satisfaites :

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

la congruence suivante $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ *l'est aussi"*[18]

Cet axiome remplace le recours au prinicpe de l'égalité par superposition, évitant ainsi tout recours explicite au mouvement.

Notons qu'un simple changement de désignation implique la congruence

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

L'axiome III,5 énoncé, Hilbert peut alors énoncer et démontrer le premier cas d'égalité des triangles (qu'il appelle premier cas de congruence).

Hilbert démontre d'abord l'unicité du report d'un segment donné sur une demi-droite d'origine donnée ; l'existence d'un tel report est énoncée par l'axiome III,1 qui définit la congruence entre segments, l'unicité résulte de l'axiome III,5 compte tenu de l'unicité du report des angles assurée par l'axiome III,4[19].

Notons d'abord que deux triangles *ABC* et *A'B'C'* sont dits *congruents* si les côtés correspondants et les angles correspondants sont congruents. On peut alors énoncer le théorème suivant (théorème 12) :

"Si entre deux triangles ABC et A'B'C', sont satisfaites les congruences

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

ces deux triangles sont congruents."[20]

L'axiome III,5 implique les congruences

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \qquad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

---

[18]David Hilbert, o.c. p. 22

[19]On pourra comparer avec la proposition 2 du livre I des *Eléments* qui énonce une construction explicite (algorithmique) du report, Euclide, o.c. p. 197.

[20]David Hilbert, o.c. p. 25

Reste à démontrer la congruence $BC \equiv B'C'$. Sur la demi-droite d'origine B' et portant le segment $B'C'$, il existe un point D' et un seul tel que $BC \equiv B'D'$; l'axiome III,5 appliqué aux deux triangles ABC et $A'B'D'$ implique la congruence

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$$

Ainsi l'angle $B'A'D'$, congruent à l'angle BAC est congruent à l'angle $B'A'C'$ ce qui contredit l'unicité du report des angles. Il s'ensuit que les points C' et D' coïncident et que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont congruents.

Une comparaison entre les énoncés hilbertien et euclidien nous montre une proximité sémantique si l'on considère que les termes hilbertiens, même s'ils sont en principe sans signification antérieure au discours, renvoient à la connaissance intuitive. C'est ce qu'explique Hilbert à propos des axiomes et de leur regroupement lorsqu'il écrit au début de l'ouvrage : *"chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition"*[21]. La construction formelle n'est donc pas arbitraire et renvoie à des significations qui lui sont antérieures ; en ce sens on peut parler chez Hilbert d'une conception dualiste de la connaissance, nous reviendrons sur ce point ci-dessous.

La distinction se situe dans la constitution du discours démonstratif. Si le discours euclidien s'appuie sur les objets en tant que tels, ce qui implique qu'il suppose d'une part leur existence, d'autre part une connaissance intuitive de ces objets (que ces objets participent des Idées platoniciennes ou relèvent de la connaissance empirique importe peu ici), le discours hilbertien recherche, pour des raisons de légitimation sur lesquelles nous reviendrons ci-dessous, une autonomie par rapport à toute signification extérieure ; les objets ne sont que des mots (les termes primitifs de la théorie) reliés par des assertions (les axiomes) énoncées *a priori*.

Si, dans le cadre de la géométrie euclidienne, la figure, en tant qu'elle représente les objets sur lesquels porte le raisonnement euclidien (sans que nous nous prononcions ici sur la nature de ces objets), joue un rôle essentiel, elle n'a plus de place dans le raisonnement hilbertien qui porte uniquement sur les mots et les règles d'usage de ces mots, c'est-à-dire la syntaxe. Il faut cependant noter les nombreuses figures qui accompagnent l'exposé hilbertien et qui nous rappellent que ce discours, s'il se veut indépendant de toutes significations extérieures, se constitue en référence à ces significations. Si celles-ci n'interviennent pas en tant que telles dans le discours, celui-ci doit, en dernière instance, énoncer les propriétés attendues, la différence avec Euclide portant essentiellement sur la méthode ; c'est en ce sens que l'on peut parler du formalisme comme méthode, c'est l'autonomie du discours (ou plutôt la constitution d'un discours autonome) qui permet d'assurer la rigueur des démonstrations, celles-ci étant débarrassées de tout recours à l'intuition.

C'est cela qui permet à Emile Borel critique de Hilbert d'écrire :

"La possibilité de ramener la géométrie à une théorie analytique et algébrique purement abstraite ne doit cependant pas nous faire oublier les origines concrètes de la géométrie. Lorsque M. Hilbert nous dit : pensons trois systèmes de « choses » que nous appellerons points, droites et plans, ces « choses » ayant par définition des propriétés telles que la suivante: par deux points, on peut faire passer une droite et une

[21]David Hilbert, o.c. p. 11

seule, nous savons très bien que M. Hilbert n'aurait point pensé à ces « choses » si Euclide n'avait pas vécu avant lui."[22]

D'une certaine façon la critique est injuste dans la mesure où Hilbert sait bien qu'il ne fait que ré-écrire les *Eléments* d'Euclide, mais Borel explique son scepticisme devant un exposé qui se veut indépendant de toute signification intuitive. Nous reviendrons ci-dessous sur ce point qui marque à la fois la signification du formalisme et ses limites.

la démonstration "algèbre linéaire"

Toute autre est la troisième démonstration de ce premier cas d'égalité dans sa version "algèbre linéaire". Ici, non seulement le langage se veut indépendant de toute signification extérieure, mais la relation avec la géométrie élémentaire n'apparaît plus.

Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'algèbre linéaire dont on sait que, du point de vue structural, la géométrie élémentaire n'est qu'un chapitre[23].

Plaçons-nous dans le plan affine euclidien sur le corps des réels, on sait définir la longueur d'un segment AB, c'est la norme euclidienne du vecteur $\vec{AB}$; quant à l'angle de deux vecteurs il est défini par la relation

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|}$$

On appelle triangle un triplet de points non alignés. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les vecteurs $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$ *aient respectivement même normes que les vecteurs* $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$ *et que les angles* $(\vec{AB}, \vec{AC})$ *et* $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ *soient égaux, alors il existe une isométrie et une seule f telle que*

$$f(A)= A' \qquad f(B)= B' \qquad f(C)= C'$$

En effet, on sait qu'il existe une transformation affine et une seule telle que

$$f(A)= A' \qquad f(B)= B' \qquad f(C)= C'$$

et les hypothèses impliquent que cette transformation est une isométrie.

Dans cette démonstration la figure n'intervient pas, la situation géométrique est définie dans le seul cadre de l'algèbre linéaire et les seules propriétés utilisées sont les propriétés générales des espaces affines et des formes quadratiques, propriétés supposées antérieurement explicitées. Il n'y a ici, en principe, aucun recours à quelqu'intuition géométrique, ne serait-ce que comme simple référence à la façon hilbertienne citée ci-dessus.

---

[22]Emile Borel, *L'espace et le temps*, Felix Alcan, Paris 1922, p. 6-7

[23]Nous renvoyons ici à l'ouvrage de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964

comparaison des trois démonstrations données ci-dessus

En quoi les trois démonstrations étudiées ci-dessus peuvent-elles être considérées comme les démonstrations d'un même théorème. Si l'on peut considérer que les énoncés se ressemblent, en quoi parlent-ils de la même chose? Nous avons vu d'une part un raisonnement portant sur des objets dont l'existence est affirmée *a priori* (la démonstration euclidienne), d'autre part un raisonnement portant sur des objets définis à travers le seul langage de la théorie qui se propose de les étudier (la démonstration hilbertienne et la démontration "algèbre linéaire") ce qui pose déjà la question du lien entre ces divers objets. Si le discours hilbertien, en tant qu'il se veut proche de l'intuition, apparaît *sémantiquement proche* du discours euclidien, en quoi le discours "algèbre linéaire" renvoie-t-il à la géométrie élémentaire? Cette dernière question pose la question des relations entre la géométrie élémentaire et sa reconstruction *via* l'algèbre linéaire[24]. Nous nous contenterons dans un premier temps de poser ces questions, nous proposant, dans la suite de l'exposé, de revenir sur les raisons qui ont conduit à transformer à la fois les modes de raisonnement et le statut des objets géométriques.

2- *Un plan et une sphère*

Qu'est-ce qui différencie un plan et une sphère? la réponse est empiriquement évidente. Pourtant nous pouvons tenir un discours commun sur le plan et la sphère si l'on décide d'appeler droite sur la sphère une ligne de plus court chemin, c'est-à-dire un grand cercle, le plus court chemin entre deux points de la sphère étant défini par le petit arc de grand cercle joignant ces deux points (lorsque les deux points ne sont pas diamétralement opposés, cet arc est unique) ; cela nous permet, non seulement d'énoncer des propositions communes, mais encore des démonstrations communes. Se pose alors le problème d'une distinction langagière de ces deux objets empiriquement distincts ; autrement dit, comment distinguer, par le seul discours, le plan et la sphère?

Considérons la proposition suivante :

Soit ABCD un quadrilatère sphérique convexe[25]*, les propositions suivantes sont équivalentes*
i: *les côtés opposés sont deux à deux égaux,*
ii: *les diagonales se coupent en leurs milieux.*

La démonstration de cette proposition est la même que dans le cas du plan, elle utilise les cas d'égalité des triangles ou la symétrie centrale dont les propriétés sont analogues en géométrie plane ou en géométrie sphérique (du moins tant que l'on ne parle pas de droites parallèles). Nous laissons les détails des démonstrations au lecteur.

Nous appellerons *pseudo-parallélogramme* un quadrilatère convexe satisfaisant les assertions i et ii de la proposition ci-dessus ; on voit ainsi se mettre en place un discours géométrique commun pour le plan et la sphère, y compris le discours démonstratif, discours commun que l'on peut continuer avec la proposition suivante

[24]Cette dernière question fera l'objet d'un prochain article.

[25]Pour la définition des polygones sphériques et les propriétés générales de la géométrie sphérique, nous renvoyons aux deux chapitres consacrés à la géométrie sphérique de l'ouvrage de Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, tome II "Géométrie dans l'espace", o.c. p. 45-83. La proposition énoncée ci-dessus provient de l'exercice 487, p. 79.

Soit ABCD un quadrilatère sphérique convexe, les quatre côtés sont égaux si et seulement si les diagonales se coupent en leurs milieux et sont orthogonales.

Hadamard appelle, non sans justesse, un quadrilatère sphérique convexe dont les quatre côtés sont égaux, un *losange sphérique*[26].

Continuant notre discours commun, nous dirons que deux segments sphériques orientés (arcs orientés de grands cercles) *PQ* et *RS* sont *équipollents* si le quadrilatère *PQSR* est un pseudo-parallélogramme.

Ces définitions et propriétés nous conduisent à poser la question suivante : à quel moment le discours sur le plan et le discours sur la sphère vont-ils se séparer? Une telle question n'est autre que celle de l'adéquation du discours démonstratif aux situations géométriques, l'ajustement entre la connaissance empirique et la connaissance rationnelle, c'est-à-dire la possibilité d'une connaissance issue du seul raisonnement.

La sphère et le plan sont deux objets géométriques empiriquement distincts et cette distinction doit apparaître dans le cours du raisonnement, ce qui, heureusement, se produit. En effet si la relation d'équipollence est transitive dans le plan, grâce au postulat des parallèles, elle ne l'est plus sur la sphère comme il est facile de le vérifier. Ainsi, du point de vue du raisonnement, c'est le postulat des parallèles qui assure la distinction, entre la sphère et le plan (sous réserve que le plan soit euclidien) ; cela pose un autre problème, c'est moins la sphère en tant que sphère qui est en cause, on peut en effet définir les pseudo-parallélogrammes dans le plan hyperbolique (géométrie de Lobatchevski) et les propositions énoncées ci-dessus sont encore vraies et se démontrent de façon analogue, utilisant les cas d'égalité des triangles ou la symétrie centrale.

On peut alors remarquer que les propositions énoncées ci-dessus participent de la *géométrie absolue* telle que la concevait Janos Bolyai[27], la séparation se faisant *via* le postulat des parallèles. Il reste évidemment à distinguer la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, ce que nous ne ferons pas dans le cadre de cet article.

En ce sens, la démonstration fixe d'une part les ressemblances et les différences entre deux objets, ressemblances et différences langagières mais surtout ressemblances et différences structurales dans la mesure où ce sont les axiomes qui permettent de distinguer, sur le plan théorique, les situations géométriques ; on dépasse ainsi la situation empirique, c'est moins le plan et la sphère qui sont en question que la présence ou l'absence du postulat des parallèles ; les objets *plans* et *sphères* deviennent ainsi susceptibles d'une définition qui devient antérieure à leur empiricité.

Une telle construction ne saurait se situer dans le cadre euclidien ; dans un tel cadre le plan et la sphère sont déterminés comme objets distincts, non seulement empiriquement mais aussi théoriquement[28]. C'est alors une analyse du discours démonstratif qui permet de fixer les ressemblances formelles de ces deux objets *a priori* distincts et le moment où le discours se différencie ; c'est encore cette ressemblance formelle qui permet de penser la sphère comme un modèle euclidien de géométrie non-euclidienne ; c'est, dans un cadre différent, une analyse de ce type qui a conduit Felix

---

[26]*ibid*.

[27]Janos Bolyai, "Science Absolute of Space" translated by Dr. George Bruce Halsted, in Roberto Bonola, *Non-euclidean geometry* (1912) (translated by H. S. Carslaw), Dover Publications, New York 1955

[28]Nous distinguons la sphère définie comme l'ensemble des points de l'espace équidistants d'un point donné et la sphère definie comme surface indépendamment de tout plongement dans l'espace.

Klein à voir dans une construction de Cayley des modèles de géométrie non-euclidienne[29].

Nous voyons apparaître ici un caractère essentiel du discours démonstratif, son caractère explicatif. Le discours démonstratif ne se contente pas de nous dire que l'équivalence des deux assertions i et ii ci-dessus est vraie, il nous apprend comment l'usage d'un axiome nous permet d'assurer la vérité d'une propriété ; c'est en ce sens que l'on peut parler d'une *causalité mathématique*[30].

La démonstration comme discours

Point commun aux diverses démonstrations citées ci-dessus : la démonstration est un discours, discours de connaissance qui suppose une adéquation entre ce discours et *ce* qu'il nous permet de connaître. Reste alors à expliciter, autant que cela se peut, les conditions de cette adéquation si l'on considère que ce qu'il permet de connaître ne se réduit pas au discours qui le fait connaître.

C'est la question que pose Paul Valéry lorsqu'il écrit, à propos de la démonstration grecque :

"Songez à la subtilité et à la volonté qu'il leur a fallu (aux géomètres grecs) *pour accomplir l'ajustement si délicat, si improbable, du langage commun au raisonnement précis ; songez aux analyses qu'ils ont faites d'opérations motrices et visuelles très composés ; et comme ils ont bien réussi dans la correspondance avec les propriétés linguistiques et grammaticales. Ils se sont fiés à la parole et à ses combinaisons pour les conduire sûrement dans l'espace"*.[31]

On pourrait considérer ce problème comme étant celui de l'adéquation du langage aux *choses*, en employant volontairement un terme aussi vague que celui de *chose*, d'autant plus vague que la *chose* ne peut être appréhendée que *via* le langage, autrement dit c'est le langage qui précise la chose dont on parle[32]. En ce sens l'adéquation se construit *via* l'usage du langage.

Mais alors que pour les Grecs le langage doit permettre d'appréhender la chose en tant que telle, ce qui les conduira à s'interdire toute étude scientifique d'un phénomène lorsqu'ils ne sauront le réduire à son expression langagière (c'est le sens des paradoxes de Zénon), le développement de la science conduira à repenser les choses en fonction du langage qui les exprime, quitte à mettre de la distance entre les choses et leur expression langagière.

La connaissance scientifique devient alors moins la connaissance des choses en tant que telles que la connaissance des choses *via* la façon dont on peut en parler et le caractère discursif de la démonstration exprime le caractère discursif de la connaissance scientifique. Dans ces conditions l'ajustement dont parle Valéry est essentiellement une construction. On peut relier la construction de cet ajustement au principe de la meilleure convenance que Gonseth appelle le *principe d'idonéité*[33]. L'idonéité marque

---

[29]Felix Klein, "Über die sogennante Nicht-euklidische Geometrie" *Mathematische Annalen*, Band IV, 1871 p. 573-625 ; une traduction française par Laugel est paru sous le titre "Sur la géométrie dite non euclidienne" *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, XI, p. G1-G62

[30]Georges Bouligand, *La causalité mathématique*, Hermann, Paris 1934

[31]Paul Valéry, "La crise de l'esprit" (1919) in *Variété 1 et 2*, réed. idées/gallimard, Paris 1978, p. 48-49

[32]Umberto Eco, *Kant et l'ornithorynque* (1997), traduit de l'italien par Julien Gayrard, Grasset, Paris 1999, chapitre I : "sur l'être".

[33]Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, o.c. volume I : La Doctrine Préalable, p. 57-58

moins l'ajustement au sens que dit Valéry que le meilleur ajustement à un moment donnée; en ce sens l'idonéité n'est pas donnée une fois pour toutes et se construit dans la démarche scientifique elle-même, ce qui implique son caractère historique. Ce sont les diverses formes de l'idonéité qui constituent ce que Gonseth appelle des *synthèses dialectiques*[34].

En nous appuyant sur la notion de synthèse dialectique, nous distinguerons trois moments du langage mathématique. Il s'agit moins de définir des moments historiques, même si l'on retrouve ces moments dans l'histoire des mathématiques, que de penser les diverses formes du rapport entre les mathématiques et le langage en fonction des problématiques sur lesquelles ces rapports se construisent. Du point de vue de l'épistémologie des problématiques (cf. Appendice), la question est alors moins de classer ces diverses formes et les époques historiques où elles se sont développées que de tenter d'expliciter comment les problèmes auxquels se sont confrontés les mathématiciens les ont amenés à transformer ces formes. Nous explicitons dans l'appendice la place de ce que nous appelons une épistémologie des problématiques au sein de l'épistémologie.

Les trois moments du langage mathématique

La comparaison des *Eléments* d'Euclide et des *Fondements de la Géométrie* ci-dessus esquissée met l'accent sur une première différence essentielle.

Le discours grec se constitue sur des objets qui lui sont antérieurs (que ces objets relèvent des Idées platoniciennes ou soient issus de la connaissance sensible importe peu ici) et ce sont ces objets qui donnent sens au discours. Les propositions premières, axiomes et postulats, sont autant de vérités à partir desquelles le discours démonstratif permet d'énoncer de nouvelles vérités qui sont les théorèmes.

Les postulats et axiomes se manifestent essentiellement comme des propriétés évidentes, que cette évidence relève de la connaissance empirique ou des nécessités de la construction de la rationalité[35]. Ainsi Legendre pourra écrire au début de ses *Eléments de Géométrie* :

*"**Axiome** est une propriété évidente par elle-même.*
***Théorème** est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé **démonstration**."*[36]

Le discours hilbertien, au contraire, construit les objets *via* le discours lui-même ; les objets ne sont que des mots, les *termes primitifs*, reliés par des assertions, les *axiomes*, qui ne sont que les règles d'usage de ces termes primitifs. Une fois énoncés les termes primitifs et les axiomes, le discours démonstratif permet d'énoncer les théorèmes ; ces derniers ont perdu leur statut de vérité pour n'être plus que des assertions valides dans le cadre axiomatique dans lequel ils sont construits.

La question se pose alors des raisons qui ont conduit à passer du point de vue euclidien, longtemps considéré comme le modèle de la rigueur logique, au point de vue hilbertien.

---

[34]Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, o.c. volume IV : La Synthèse Dialectique; pour une analyse de la notion de synthèse dialectique nous renvoyons à l'article cité de Hourya Sinaceur, "La dialectique de l'espace".

[35]On peut citer parmi ces dernières les notions communes relatives aux grandeurs, cf. Euclide, o.c. Volume I, p. 178-179

[36]Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823, p. 4

C'est cette recherche des raisons qui nous a conduit à définir les trois moments du langage mathématique ; d'abord celui de l'adéquation du langage aux choses qui caractérise les mathématiques grecques, ensuite celui de la *"seule et même énonciation"* dont nous allons parler ci-dessous, enfin celui du formalisme hilbertien.

La question de la "seule et même énonciation"

Nous étudierons d'abord la question de la *seule et même énonciation* posée par Desargues et la méthode des transformations à laquelle elle est liée. Le point de vue arguésien qui deviendra le point de vue projectif, s'il ne remet pas en question la géométrie grecque dont il propose essentiellement un élargissement, pose cependant la question d'une réorganisation du corpus euclidien.

Dans un opuscule sur la perpective qu'il publie en 1636, Desargues, terminant son article par des considerations théoriques, remarque que des droites parallèles deviennent en général concourantes par perspective et réciproquement des droites concourantes peuvent devenir parallèles par perspective. Cette remarque sera le point de départ de son *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* de 1639 dans lequel il développe une théorie unifiée des coniques comme perspectives de cercles[37].

L'analogie entre droites concourantes et droites parallèles mise en évidence par la perspective conduit Desargues à dire que des droites parallèles ont un point commun à distance infinie. Mais Desargues va plus loin ; si ces points fictifs que sont les points à distance infinie et les points ordinaires s'échangent par perspective c'est que ces divers types de points participent des mêmes propriétés, pourvu qu'elles soient conservées par perspective, et jouent le même rôle ; c'est ainsi que Desargues réunit cônes et cylindres sous l'appellation commune de *rouleaux*. Il peut alors considérer les rouleaux à base circulaire et leurs sections planes, les coniques, montrant que ces dernières ont les mêmes propriétés dès lors que l'on peut les étudier *"par une seule et mesme énonciation, construction et préparation ou pour dire mieux par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles"*[38].

Cette question de la *"seule et même énonciation"* jouera un rôle important avec le développement de la méthode des transformations. Il suffit de montrer qu'une certaine figure se déduit d'une autre figure par une transformation définie pour affirmer que les propriétés de l'une induisent des propriétés de l'autre ; ainsi les faisceaux de droites parallèles et les faisceaux de droites concourantes ont les mêmes propriétés, de même les diverses coniques, lesquelles se déduisent les unes des autres par perspective, ont les mêmes propriétés.

La *"seule et même énonciation"* est justifiée par la possibilité de transformer une figure en une autre. Si, dans un premier temps, on recourt explicitement à la transformation échangeant deux figures, très vite on comprendra qu'il n'est pas besoin d'expliciter la transformation dès lors que l'on sait qu'elle existe ; ainsi Newton n'a pas besoin d'expliciter la transformation qui transforme un quadrilatère en parallélogramme pour considérer que le problème de la construction d'une conique tangente à quatre droites et passant par un point est résolu dès que l'on sait résoudre le problème lorsque le quadrilatère est un parallélogramme[39]. De même la géométrie perspective de Taylor[40]

[37]Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.

[38]"Lettre de Desargues à Mersenne", in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, o.c. p. 83.

[39]Isaac Newton, *The Principles of Natural Philosophy* (1686) Motte's translation revised by Cajori, University of California Press, Berkeley 1962 ; Newton décrit d'abord une transformation "projective"

et de Lambert[41] suffit à construire le tableau sans que l'on ait besoin d'effectuer la construction à partir de l'objet "en vraie grandeur".

La *"seule et même énonciation"* prendra une nouvelle ampleur lorsque Gergonne expliquera comment l'équivalence des figures se réduit à une simple question de langage[42]. On connaissait la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique qui échange droites et points de telle façon que des points alignés deviennent des droites concourantes et des droites concourantes deviennent des points alignés ; on peut ainsi associer à toute proposition géométrique, pourvu qu'elle porte sur des propriétés dites descriptives, c'est-à-dire ne faisant pas intervenir la mesure, une proposition duale en échangeant les termes points et droites et les termes alignement et concours. Comparant cette situation avec d'autres situations de dualité (polyèdres de l'espace, géométrie sphérique), Gergonne énonce une théorie générale de la dualité remarquant que la démonstration de la duale d'une proposition s'obtient en dualisant la démonstration de la proposition donnée[43]. On obtient ainsi une version langagière de la notion de transformation que l'on peut considérer comme l'aboutissement de la *"seule et même énonciation"* de Desargues. Les raisons géométriques qui fondaient le point de vue de Desargues s'effacent devant les seules considérations langagières.

On voit ainsi comment ce second moment caractérisé par la *"seule et même énonciation"*, en se débarrassant peu à peu des justifications purement géométriques et en mettant en avant le caractère purement langagier de la *"seule et même énonciation"*, conduira à une conception purement langagière de l'activité mathématique, oublieuse de la signification géométrique des termes employés. C'est en cela que nous pouvons parler d'élimination du sens, c'est ainsi que dans l'étude des pseudo-parallélogrammes ci-dessus nous avons pu établir comment un discours commun peut être poursuivi à la fois pour le plan et pour la sphère, et plus généralement en géométrie non-euclidienne, sans faire référence aux objets sur lesquels on travaille, et comment ce sont encore des considérations langagières, l'énoncé d'un axiome supplémentaire, autrement dit une bifurcation du discours, qui permet de distinguer les divers cas possibles.

Il faudrait, pour être complet, parler des méthodes analytiques qui se développent à la même époque[44] ramenant la résolution des problèmes de géométrie aux seules méthodes du calcul littéral, c'est-à-dire à un calcul sur des signes représentant les objets que l'on étudie ; mais on prendra vite conscience que le calcul porte essentiellement sur les signes indépendamment de toute signification de ces signes. C'est le point de vue de Fermat développé dans sa *Dissertation en trois parties*[45].

Une telle conception de la géomérie sera critiquée par Leibniz qui cherchera à développer un calcul portant sur les objets géométriques eux-mêmes mais il butera sur

---

(Lemme XXII, p. 90-92) ce qui lui permet de "rendre parallèles" deux droites données sans avoir besoin d'expliciter la construction.

[40]Kirsti Andersen, *Brook Taylor's on Linear Perspective*, Springer-Verlag, New York, Berlin 1992.

[41]Roger Laurent & Jeanne Peiffer, *La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective*, Cedic/Nathan, Paris, 1987.

[42]Gergonne, "Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, volume XVI, (1826) pp. 209-231.

[43]Pour une étude des travaux de Gergonne sur la dualité nous renvoyons à l'article de Karine Chemla, "Sphère et dualité", *Actes de la Quatrième Université d'Ete d'Histoire des Mathématiques* (Lille, juillet 1990), IREM de Lille 1994

[44]Desargues et Descartes sont contemporains

[45]Pierre de Fermat, "Dissertation en trois parties" in *Oeuvres*, (5 tomes), publiés sous la direction de Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier-Villars, Paris 1896, tome troisième, traduction par Paul Tannery, p. 109-120

la difficulté de définition de ces objets[46]. Plus tard Poncelet énoncera les deux hypothèses de la géométrie analytique sous la forme suivante : la première hypothèse exprime que, une situation géométrique étant donnée, la géométrie analytique permet de la représenter par des équations qui correspondent à certaines propriétés de cette situation géométrique ; la seconde hypothèse dit que, après que certains calculs ont été effectués, les nouvelles équations obtenues correspondent encore à des propriétés de la situation géométrique[47]. Poncelet pose ainsi la question de la signification des calculs par rapport à la situation géométrique[48]. Si la premiere hypothèse est banale et relève de la mise en place d'un dictionnaire, la seconde hypothèse pose un problème plus difficile : si le calcul porte sur les signes indépendamment de ce qu'ils représentent, comment peut-on comprendre que les résultats de ce calcul nous donnent des renseignements sur la situation étudiée. Notons que Descartes avait compris cette difficulté qui, au Livre III de sa *Géométrie,* tente d'interpréter géométriquement certains calculs[49].

Poncelet, à la fois insatisfait d'une réduction au calcul qui occulte les raisons des faits géométriques ainsi établis et fasciné par la puissance de la méthode analytique, cherchera, et les géomètres dits *synthétiques*[50] à sa suite, à mettre en place les conditions d'un raisonnement, sinon d'un calcul, portant directement sur les objets géométriques tout en gardant la souplesse et la fécondité du calcul analytique. Ainsi, dans un article où il démontrait par des voies *purement géométriques* des résultats sur les mouvements des corps solides obtenus analytiquement par Euler et D'Alembert, Poinsot écrivait :

"Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement." [51]

C'est en ce sens que l'on peut considérer les géomètres dits synthétiques comme des continuateurs de la pensée de Leibniz.

Les géoméries non-euclidiennes

Nous avons dit ci-dessus le caractère d'évidence qui devait marquer, pour les géomètres grecs et leurs successeurs, les principes de la géométrie ; or parmi les divers axiomes et postulats énoncés l'un posera problème par son manque d'évidence, le postulat des parallèles (cinquième postulat des *Eléménts*), dont l'énoncé donné par Euclide n'est que la forme *ad hoc* pour pouvoir démontrer la proposition 29 du Livre I

---

[46]G.W. Leibniz, *La caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverría, traduit, annoté et postfacé par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1995

[47]Jean-Victor Poncelet, *Principes d'Analyse et de Géométrie*, (deux tomes), Gauthier-Villars, Paris 1864, tome deuxième, p. 320-321

[48]C'est le problème que pose toute représentation symbolique d'une situation lorsque l'on affirme que les calculs (c'est-à-dire les transformations effectuées sur les symboles de façon indépendante des objets représentés) nous donnent des informations sur la situation primitive.

[49]René Descartes, *La Géométrie* (1637) in *Discours de la Méthode*, Fayard, Paris 1986

[50]Les géomètres du XIXème siècle opposeront à la géométrie analytique la géométrie synthétique ; faut-il voir dans ce dernier terme autre chose qu'une façon de s'opposer à la méthode analytique? Ce serait en tout cas un contre-sens que d'y voir une opposition entre analyse et synthèse.

[51]Louis Poinsot, "Une nouvelle théorie de la rotation des corps" *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1851, p. 9-72, 73-129, 289-336

qui affirme l'égalité des angles alternes-internes découpés par une sécante sur deux droites parallèles.

Nous rappellons d'abord l'énoncé euclidien dans la traduction de Vitrac,

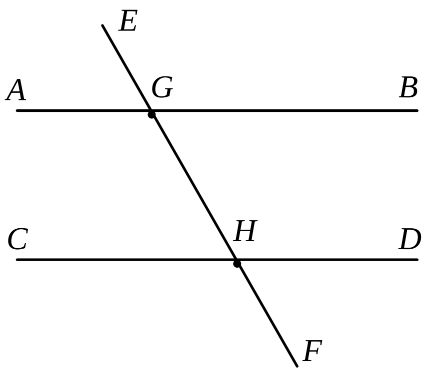
"Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits."[52]

Voici alors l'énoncé de la proposition 29 du livre I :

"Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits."[53]

et sa démonstration :

"En effet que la droite EF tombe sur les droites parallèles AB, CD. Je dis qu'elle fait des angles alternes égaux: ceux sous AGH, GHD, et l'angle extérieur, celui sous EGB, égal à celui sous GHD, intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté, ceux sous BGH, GHD, égaux à deux droits.



En effet, si celui sous AGH est inégal à celui sous GHD, l'un d'entre eux est plus grand. Que celui sous AGH soit le plus grand. Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous AGH, BGH sont donc plus grands que ceux sous GHD, BGH. Mais ceux sous AGH, BGH sont égaux à deux droits. Donc ceux sous BGH, GHD, sont plus petits que deux droits. Les droites sur des angles plus petits que deux droits, prolongées indéfiniment, se rencontrent (cinquième postulat).

Donc les droites AB et CD prolongées indéfiniment se rencontreront. Or elles ne se rencontrent pas puisqu'elles ont été supposées parallèles. Donc l'angle sous AGH n'est pas inégal à l'angle sous GHD. Donc il est égal. Mais celui sous AGH est égal à celui sous EGB et donc celui sous EGB est égal aussi à celui sous GHD.

Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous EGB, BGH sont donc égaux à ceux sous BGH, GHD. Mais ceux sous EGB, BGH sont égaux à deux droits. Et donc ceux sous BGH, GHD sont égaux à deux droits.

Donc, une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démonter.

---

[52]Euclide, *Les Eléments,* volume I, p. 175

[53]*ibid.* p. 251

La démonstration apparaît comme une paraphrase de l'énoncé du cinquième postulat ; mais l'on peut penser que la proposition I,29, dans la mesure où elle était la réciproque des deux propositions qui la précèdent et qui sont indépendantes du postulat, se devait d'être démontrée. On peut alors considérer l'énoncé du cinquième postulat comme la marque d'un échec dans la recherche de la démonstration de la proposition I,29. Les successeurs d'Euclide l'ont bien compris qui ont passé plus de vingt siècles à tenter de démontrer le postulat, sous sa forme originale ou sous des formes équivalentes telle celle de Playfair qui énonce :

"Par un point non situé sur une droite, on peut mener une droite parallèle et une seule à cette droite."[54]

La question était moins celle de la vérité du postulat des parallèles que de la démonstration d'une proposition vraie et non-évidente, vraie par ses conséquences puisque c'est le postulat des parallèles qui fonde la méthode des aires et la théorie des proportions géométriques, vraie aussi parce que le postulat est lié à l'existence de cette figure première de la géométrie élémentaire qu'est le rectangle[55].

Le *"scandale de la géométrie"*, pour reprendre une expression de D'Alembert[56], résidait dans la non-démonstration d'un énoncé vrai mais dont la vérité ne relevait pas de l'évidence. Recherchant les raisons des obstacles à une telle démonstration, D'Alembert expliquait :

"On parviendrait plus facilement à la trouver (la démonstration du postulat des parallèles)*, si on avait une bonne définition de la ligne droite…"*[57]

Se pose ainsi la question d'une bonne définition de la droite, ce que Enriques appellera plus tard une *définition logique*, c'est-à-dire indépendante de tout recours à l'expérience sensible. Nous y reviendrons.

La question du postulat des parallèles sera résolue, dans la première partie du XIXème siècle, par la découverte (l'invention!) des géométries non-euclidiennes[58]. Tout en se plaçant dans un cadre euclidien, celui du principe de l'égalité par superposition, les pères fondateurs (Gauss, Bolyai, Lobatchevski) se proposeront d'étudier les

---

[54]Dans son édition des *Eléments* d'Euclide, Heath énonce une liste d'énoncés équivalents au postulat des parallèles, énoncés souvent issus des tentatives de démonstration de ce postulat (Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*, translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath (1925), Dover Publications Inc. New York 1956)

[55]Rappelons que Ibn Al Haytham (Xème siècle) et Lambert (XVIIIème siècle) ont tenté de montrer que si trois angles d'un quadrilétère sont droits, le quatrième angle est droit, ce qui implique le postulat des parallèles. Notons l'importance culturelle du rectangle, en particulier dans les constructions architecturales (les temples grecs sont des parallélépipèdes) ; si cela n'implique pas nécessairement l'explicitation du postulat des parallèles, cela implique le caractère euclidien des objets que le géomètre étudie, ainsi les mathématiques chinoises qui étudient des objets comme les carrés et les cubes possèdent ce caractère euclidien même si les géomètres chinois n'ont jamais énoncé le postulat des parallèles (cf. Jean-Claude Martzloff, *Histoire des Mathématiques Chinoises*, Masson, Paris 1987). En ce sens, la possibilité d'une géométrie non-euclidienne remet en cause le "sens commun", c'est d'ailleurs cela qui a conduit Gauss à la nommer "non-euclidienne".

[56]Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 318

[57]*ibid*. p. 317

[58]En ce qui concerne les géométries non-euclidiennes, nous renvoyons à l'ouvrage cité de Roberto Bonola, ainsi qu'au texte de Jean-Luc Chabert, "La vraie fausse démonstration du cinquième postulat" in *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques* (édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie), Ellipses, Paris 1993, p. 277-297

conséquences de la négation du postulat des parallèles. Un tel travail avait été entrepris par les mathématiciens arabes (Ibn Al Haytham, Al Khayyam)[59] puis repris au XVIIIème siècle par Saccheri[60] et Lambert[61], dans l'espoir de trouver une contradiction. L'absence de contradiction rencontrée dans le développement du discours démonstratif conduira Gauss, Bolyai, Lobatchevski, à penser qu'une telle contradiction n'existe pas et par conséquent que l'on peut parler d'une nouvelle géométrie. Les propriétés de cette nouvelle géomérie dont plusieurs résultats sont contraires à l'intuition usuelle conduira Gauss à l'appeler *non-euclidienne*, terminologie peu heureuse dans la mesure où les textes des pères fondateurs sont rédigés dans un cadre euclidien comme nous l'avons dit ci-dessus. C'est ainsi que Bolyai appellera *géométrie absolue*[62] l'ensemble des propriétés géométriques indépendantes du postulat des parallèles ; c'est la partie commune aux deux géométries. C'est ainsi que Lobatchevski s'appuiera, pour étudier la trigonométrie, sur la géométrie de la sphère puisque celle-ci, dont la définition et les propriétés sont indépendantes du postulat des parallèles, est la même en géométrie euclidienne et en géométrie non-euclidienne[63].

Si l'on est encore loin de la conception langagière (les objets y sont ceux de la géométrie usuelle), on peut voir, à la lecture des textes des pères fondateurs, l'importance du discours démonstratif puisque c'est lui qui permet de se dégager de l'intuition des objets. Il faudra cependant un pas supplémentaire pour que la conception langagière s'affirme : la constrution de modèles euclidiens de la géométrie non-euclidienne (cf. ci-dessous).

Mais il faut noter aussi comment cette conception langagière s'appuie sur un renouveau de la pensée empiriste, en réaction à la critique kantienne.

Si l'invention kantienne des formes *a priori* de l'intuition proposait une réponse aux difficultés que constitue, pour l'empirisme, le passage de la connaissance sensible aux idées, elle allait conduire l'empirisme à se renouveler en marquant la distance entre la connaissance sensible et les constructions intellectuelles qui en sont issues.

C'est ainsi que Lobatchevski peut écrire dans la préface de ses *Nouveaux Principes de Géométrie* :

"… il n'existe dans la nature ni droites, ni courbes, ni plans, ni surfaces courbes : nous n'y trouvons que des corps, en sorte que tout le reste, conçu par notre imagination, n'existe que dans la théorie."[64]

et pour préciser cette conception du caractère artificiel[65] des constructions géométriques, Lobatchevski ajoute :

"Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines forces de la nature suivent une géométrie et d'autres leur géométrie propre."

---

[59]Khalil Jaouiche, *La théorie des Parallèles en Pays d'Islam*, Vrin, Paris 1986

[60]Gerolamo Saccheri, *Euclides ab omni nævo vindicatus*, Milan 1733

[61]Lambert, "Theorie der Parallellinien" (1766), *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, Leipzig 1786

[62]Janos Bolyai, o.c.

[63]Nicolas Lobatchevski, *La théorie des parallèles* (1840), traduction par Jules Houël (1868), réédition Monom, 1980

[64]Nicolas Lobatchevski, "Nouveaux principes de la géométrie", (1835-1838), traduit du russe par F. Mailleux, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3ème série, tome 2, 1900, p. 25

[65]Le terme "artificiel" doit être entendu ici comme opposé au terme "naturel" (est artificiel ce qui n'existe pas dans la nature, ce qui est construit par l'homme).

affirmation loin d'être claire à l'époque lorsque l'on sait que, confronté à la géométrie non-euclidienne, l'un de ses fondateurs, Gauss, posait le problème de la détermination de la *vraie* géométrie.

Ainsi la question de l'adéquation entre le langage et les choses était posée d'une manière nouvelle, le discours étant moins description de la réalité que représentation d'icelle aux fins de mieux l'appréhender. Une telle conception allait permettre de répondre aux opposants à la géométrie non-euclidienne pour qui la possibilité de plusieurs géométries était contradictoire.

En effet, si, comme le veut la conception grecque, le langage a pour fonction de dire le monde, le discours géométrique doit être unique ; ainsi Frege, après avoir expliqué que la science *"est une totalité de vérités liées entre elles"*[66], écrit :

"Qui tient la géométrie euclidienne pour vraie attribuera un sens à chacun de ses théorèmes et considèrera que chacun de ses théorèmes exprime une vérité. Il s'ensuit qu'il reconnaîtra que les termes conceptuels « points », « droites », « plans » ont un sens. Dans la géométrie euclidienne, certaines vérités ont été transmises comme axiomes. Qui tient une pensée pour fausse ne peut la reconnaître comme axiome ; un axiome est donc une vérité. De plus, c'est le propre du concept d'axiome qu'on reconnaisse qu'il est vrai sans avoir besoin d'autres vérités."

Suit une discussion dans laquelle Frege explique que l'on ne peut à la fois considérer comme vraie la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne et affirme qu'il faut *"compter la géométrie non-euclidienne parmi les non-sciences qui ne méritent encore une faible considération qu'au titre de curiosités historiques"*.

Quelques années auparavant, Cayley expliquait :

"My own view is that Euclid twelth axiom in Playfair's form (l'axiome des parallèles) *does not need demonstration, but is part of our notion of space, of the physical space of our experience - the space, that is, which become acquainted with by experience, but which is the representation of all external experience."*[67]

C'est que la possibilité d'une multiplicité de géométries née de l'existence(!) de géométries non euclidiennes pose un double problème: problème d'ordre physique (quelle est la vraie doctrine de l'espace?) et problème d'ordre logique (qu'est-ce qui fonde le discours démonstratif de la géométrie?).

Si nous ne pouvons aborder, dans le cadre de cet article, le problème d'ordre physique, nous reviendrons sur le problème d'ordre logique avec la réponse formaliste apportée par Hilbert. Cependant avant d'aborder le point de vue de Hilbert nous voudrions parler du *Programme d'Erlangen*[68] publié par Klein en 1872 qui aborde la question de la multiplicité des géométries du point de vue de la théorie des groupes de transformations.

Le Programme d'Erlangen et le point de vue structural

---

[66]Gottlob Frege, "Sur la géométrie euclidienne" in *Ecrits posthumes*, traduits de l'allemand sous la direction de Philippe de Rouilhan et Claudine Tiercelin, Editions Jacqueline Chambon, Nîmes 1994, p. 199-201

[67]Arthur Cayley, "Presidential Adress to the British Association, September 1883" Report of the British association of Science" 1883, p. 3-37 ; n°784 in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. XI, p. 429-459

[68]Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974

Le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein est d'abord une tentative de mettre de l'ordre dans les relations entre la géométrie projective telle qu'elle s'est développée au long du XIXème siècle et la géométrie élémentaire (la géométrie d'Euclide).

La géomérie projective avec la méthode des transformations, par sa généralité et sa fécondité, a conduit les géomètres projectifs à voir dans cette géométrie une géométrie générale dans laquelle doit s'insérer la géométrie élémentaire, d'autant que les propriétés d'icelle peuvent être reformulées dans le cadre projectif en prenant en compte certains éléments imaginaires tels les points cycliques du plan, points à l'infini communs à tous les cercles de ce plan ou l'ombilicale, conique à l'infini appartenant à toutes les sphères[69]. C'est cette remarque qui conduira Cayley à définir les propriétés métriques d'une figure plane comme les propriétés projectives de cette figure à laquelle on a ajouté les points cycliques, précisant :

"Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is ***all*** *geometry, and reciprocally."*[70]

Cette possibilité de reformuler les propriétés métriques dans le cadre de la géométrie projective et par voie de conséquence de les démontrer par les méthodes de la géométrie projective posait un problème de cohérence logique[71]. En effet certains des objets et des concepts de la géométrie projective faisaient appel à des notions métriques, ainsi le birapport et par conséquent la notion de transformation projective définie comme transformation conservant l'alignement et le birapport ; quant aux coniques dont Desargues avait montré qu'elles étaient toutes projectivement équivalentes, leur définition s'appuyait sur des considérations métriques dans la mesure où elles étaient définies comme perspectives de cercle. Le problème se posait donc d'une construction de la géométrie projective indépendante de la géométrie usuelle, en particulier d'une définition purement projective du birapport et des transformations homographiques, de même des coniques.

Une réponse sera proposée par Felix Klein dans le cadre de la théorie des groupes de transformations géométriques, c'est-à-dire prenant en compte les relations entre groupes de transformations et invariants. C'est l'objet du *Programme d'Erlangen* de 1872.

Felix Klein rappelle au début de son article d'une part que les propriétés métriques expriment les relations des objets de l'espace avec un cercle imaginaire à l'infini (l'ombilicale), d'autre part que les déplacements, considérés comme opérant sur la totalité de l'espace, sont des transformations projectives conservant l'ombilicale. Ceci lui permet de définir la géométrie métrique à partir de la géométrie projective en restreignant le groupe des transformations projectives à celles qui conservent l'ombilicale (on sait depuis Chasles qu'il s'agit du groupe des similitudes[72]).

Partant de ces remarques, Felix Klein peut alors définir une géométrie par la donnée d'un groupe de transformations, *le groupe principal,* opérant sur un espace ; les propriétés géométriques sont alors les propriétés invariantes par le groupe principal.

---

[69]Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. Tome Premier, p. 47-48 ; Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Gauthier-Villars, Paris 1852/1880, p. 424-425.

[70]Arthur Cayley, "A sixth memoir upon quantics" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CXLIX, 1859, p. 61-90 ; n°158 in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. II, p.561-592

[71]C'est ainsi que Felix Klein parle de la *"fatale inconsistance de la géométrie projective"* (Felix Klein, *Development of Mathematics in the 19th Century* (1928), translated by M. Ackermann, Math Sci Press, Brookline Mass. 1979, p. 122).

[72]Michel Chasles, *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie*, Bruxelles 1837, rééditions Jacques Gabay, Paris 1989, p. 549-550

Deux géométries sont dites *équivalentes* lorsque leurs groupes sont isomorphes ; pour préciser ce dernier point, Felix Klein introduit la notion de *corps* défini comme un ensemble de figures sur lequel le groupe opère simplement transitivement, c'est-à-dire que deux figures du corps étant données, il existe une transformation et une seule du groupe envoyant la premiere figure sur la seconde ; la donnée d'un corps caractérise donc complètement une géométrie. Une géométrie étant donnée, une géométrie *subordonnée* est définie par un sous-groupe du groupe principal.

La géométrie projective est ainsi déterminée par le groupe projectif opérant sur l'espace projectif ; la géométrie euclidienne est alors définie par le sous-groupe des similitudes définies comme le groupe des transformations conservant l'ombilicale. Dans ce cadre les géométries non euclidiennes peuvent être définies par la donnée d'un sous-groupe conservant une quadrique convenable.

Le point de vue de Klein prolonge des travaux antérieurs de Cayley sur les invariants des formes algébriques (les polynômes homogènes), c'est-à-dire des fonctions des coefficients qui restent inchangées (à un facteur près) lorsque l'on effectue certaines tranformations linéaires sur les coordonnées[73]. Dans le cas de trois variables homogènes, correspondant à la géométrie projective plane, Cayley avait proposé une interprétation géométrique de ces invariants ; une géométrie cayleyenne est définie par la donnée d'une conique dans le plan projectif et les transformations considérées sont les transformations conservant la conique; les expressions invariantes par ces transformations expriment alors les propriétés de la géométrie cayleyenne correspondante. Cayley remarquait que, dans le cas bi-dimensionnel, lorsque la conique dégénère en deux points que l'on peut considérer être les points cycliques du plan projectif, la géométrie correspondante n'est autre que la géométrie plane euclidienne, les transformations préservant la conique, c'est-à-dire les deux points cycliques, n'étant autre que les similitudes, ce qui lui permettait d'expliciter le lien entre propriétés métriques et propriétés projectives comme nous l'avons déjà dit. En 1871, Felix Klein montrera que, lorsque la conique n'est pas dégénérée, la géométrie cayleyenne n'est autre que la géométrie non-euclidienne[74]; on obtient ainsi la géométrie de Lobatchevski, qu'il nomme hyperbolique, lorsque la conique est réelle ou la géométrie elliptique lorsque la conique est imaginaire. On peut voir dans l'article de 1871 la première ébauche d'une classification des géométries qui sera systématisée dans le *Programme d'Erlangen*.

Le *Programme d'Erlangen* apportait une nouvelle conception de la géométrie. D'une part l'accent était mis sur l'espace et non sur les figures et la donnée du groupe apparaissait comme une structuration de la géométrie considérée. D'autre part la notion d'équivalence montrait que les propriétés géométriques dépendent de la structure ainsi définie et non de la forme particulière de cette géométrie ; Felix Klein renouvelait ainsi le point de vue arguésien de la *"seule et même énonciation"* en mettant l'accent sur la structure du discours ; on peut y voir la naissance du point de vue structural qui caractérise les mathématiques du XXème siècle.

Mais à côté de ce point de vue formel, il faut voir aussi la possibilité de lire les propriétés d'une géométrie donnée à travers une géométrie équivalente permettant ainsi des *transferts d'intuition* pour reprendre une expression de Jean Dieudonné. Ainsi le point de vue structural s'appuie dès l'origine à la fois sur une plus grande abstraction (une plus grande généralité pour reprendre le langage de Chasles) et sur un

[73]Arthur Cayley, "Memoirs upon Quantics", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, CXLIV 1854 p. 244-258, CXLVI 1856 p. 101-126, 627-647, CXLVIII 1858 p. 415-427, 429-460, CXLIX, 61-90, in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. II, n°139 p. 221-234, n°141 p. 250-275, n°144 p. 310-335, n° 155 p. 513-526, n°156 p.527-557, n°158 p.561-592

[74]Felix Klein, "Über Die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie", o.c.

élargissement de l'intuition. C'est alors un nouveau paysage des mathématiques qui s'ouvre et dont le XXème siècle recueillera les fruits.

L'axiomatique hilbertienne

Dans son article "Les Principes de la Géométrie" publié en 1911 dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*[75], Enriques posait la question d'une définition logique des objets de la géométrie, c'est-à-dire une définition dégagée de tout recours à l'expérience sensible. Cette recherche de définition logique se voulait la réponse aux questions posées par la découverte des géométries non-euclidiennes et de la multiplicité des géométries.

Cependant, au moment où Enriques redigeait son article, une réponse avait déjà été proposée par David Hilbert, lequel avait publié en 1899 la première édition des *Fondements de la Géométrie* déjà cité.

Comme nous l'avons déjà expliqué, les termes géométriques utilisés dans le discours hilbertien ne renvoient en principe à aucune signification extérieure[76]; leur usage est défini par les assertions premières que sont les axiomes.

Cependant, comme l'explique Hilbert lui-même dans son ouvrage, à propos des axiomes, ceux-ci et la façon dont ils sont regroupés ne sont que l'expression de *"quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition"*[77].

Hilbert sera plus explicite dans un ouvrage ultérieur lorsqu'il écrira :

"In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward ***abstraction*** *seeks to crystallise the* ***logical*** *relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward* ***intuitive understanding*** *fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live* ***rapport*** *with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations."*[78]

Ainsi apparaît une complémentarité entre un point de vue logique qui permet la rigueur du langage et un point de vue intuitif qui renvoie aux objets premiers et aux assertions premières de la géométrie classique[79] ; en ce sens le formalisme hilbertien apparaît bien plus comme un choix méthodologique que comme une conception globale des mathématiques.

Cependant, en ce qui concerne la mise en place du discours mathématique, Hilbert insiste sur la nécessité d'une construction autonome de ce discours, c'est-à-dire indépendante de toute signification extérieure à ce discours. Hilbert précise cependant que cette autonomie du discours qui caractérise la tendance à l'abstraction ne réduit pas

---

[75]Federigo Enriques, "Les Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, édition française*, Gauthier-Villars et Teubner, Paris-Leipzig 1904-1916 ; ré-édition Jacques Gabay, Paris 1991 ; Livre III premier volume, chapitre 1, p. 13

[76]Nous reprenons ici une expression de Ferdinand Gonseth dans son ouvrage *Les Mathématiques et la Réalité* (Blanchard, Paris 1936/1974), ouvrage dans lequel l'auteur analyse la relation entre le discours théorique et les significations auxquelles il renvoie.

[77]David Hilbert, o.c. p. 11

[78]David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952, p. iii

[79]C'est cette complémentarité qui explique l'abondance des figures dans les *Fondements de la Géométrie* ; les figures renvoient à la signification intuitive que la construction hilbertienne se propose de représenter tout en s'en détachant quant à la méthode.

l'activité mathématique à la seule logique, il lui faut un objet, c'est ainsi qu'il explique dans une conférence prononcée en 1927 :

"Comme toute science, la mathématique ne peut être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultant d'une expérience extérieure à la pensée. Pour assurer la validité des déductions, ces objets doivent pouvoir être examinés sur toutes leurs faces. Leur présentation, leur discrimination, leur ordonnance, leur relation de voisinage doivent être données immédiatement et intuitivement et cela de façon irréductible à d'autres relations. Telle est ma position philosophique devant les mathématiques ou toute pensée scientifique ; elle me paraît indispensable. ***En mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables****.*(souligné par nous)*"*[80]

Si objet premier il y a dans la construction logique des mathématiques, cet objet est le signe, lequel peut être un mot comme dans l'axiomatique de la géométrie ; c'est la seule façon, selon Hilbert, d'assurer la cohérence du discours.

Cette importance accordée au signe nous renvoie à la caractéristique universelle de Leibniz[81] ou à l'idéographie de Frege[82]. Cependant chez ces auteurs les signes restent des représentations d'objets qui leur sont antérieurs ; si l'idéographie permet la construction d'un langage exempt d'ambiguïté, celle-ci renvoie à un contenu comme le précise Frege dans son article sur la nécessité d'une idéographie (*Begriffsschift,* littéralement : écriture des concepts). Après avoir remarqué qu'un concept n'étant pas objet d'intuition *"il a besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste"*[83], Frege précise :

"aussi avons-nous besoin d'un ensemble de signes, purifié de toute ambiguïté, et dont la forme strictement logique ne laisse pas échapper le contenu"[84]

Au contraire le signe hilbertien n'a aucune autre signification que celle que lui donnent les règles d'usage que sont les axiomes. Ainsi Hilbert, prenant acte du fait que le sens fait obstacle à la rigueur du discours, décide d'éliminer le sens. On peut comparer l'attitude formaliste à la position des géomètres grecs face aux paradoxes de Zénon ; face à ces paradoxes, les géomètres grecs avaient rejeté du domaine scientifique ce que le langage ne pouvait prendre en charge sans contradiction, ainsi le mouvement et l'infini ; avec l'apparition d'une multiplicité de géométries et plus tard les paradoxes de la théorie des ensembles, dont nous ne pouvons parler ici, Hilbert et à sa suite les mathématiciens formalistes, pour sauver les mathématiques, éliminaient les objets eux-mêmes ou plutôt les réduisaient à des objets de discours.

On ne peut mieux comprendre la différence de conception entre Frege et Hilbert qu'en lisant la réponse de Frege à Hilbert après que celui-ci lui a envoyé *Les Fondements de la Géométrie*. Frege ne peut accepter que l'on énonce des axiomes sans avoir défini préalablement les objets sur lesquels portent ces axiomes;*"c'est demander aux axiomes de jouer le rôle qui incombe aux définitions"* écrit-il, précisant :

---

[80]David Hilbert, "Les fondements des mathématiques" conférence prononcée en 1927, publiée dans l'édition citée de l'ouvrage *Les Fondements de la Géométrie,* o.c. p. 261
[81]Leibniz, *La caractéristique géométrique*, o.c.
[82]Gottlob Frege, "Que la science justifie le recours à une idéographie" (1882), in *Ecrits logiques et philosophiques*, traduction et introduction de Claude Imbert, Editions du Seuil, Paris 1971
[83]*ibid*. p. 64
[84]*ibid*. p. 66

"Les propositions non définitionnelles (axiomes, principes fondamentaux, théorèmes) ne doivent contenir aucun mot ou signe dont le sens et la référence (ou la contribution à l'expression de la pensée) ne soit pas déjà pleinement établis, en sorte qu'il n'y ait aucun doute sur le sens de la proposition, sur la pensée qui y est exprimée.... Les axiomes et les théorèmes ne peuvent donc jamais établir la référence d'un signe ou d'un mot qui y figure ; ***cette référence doit être déjà établie****."* (souligné par nous)[85]

Frege précise dans sa lettre, moins ce que sont les définitions et les axiomes, que leur rôle dans la construction de la science sachant que définitions et axiomes ne relèvent pas de la logique. Ainsi pour les définitions :

"Chaque définition contient un signe (une expression, un mot) qui ne possédait pas de référence auparavant, et auquel la définition en confère un."[86]

et pour les axiomes :

"Quant aux axiomes, j'appelle ainsi des propositions qui sont vraies mais qui ne peuvent être prouvées parce que la connaissance que nous en avons découle d'une source entièrement étrangère à la logique, et que l'on peut nommer l'intuition de l'espace."[87]

On peut ainsi distinguer deux formes de formalisation, c'est-à-dire de *mise en signe*, des mathématiques ; la première, la caractéristique de Leibniz ou l'idéographie de Frege, exige que les signes renvoient au contenu de telle sorte que le calcul sur les signes porte sur les objets eux-mêmes ; la seconde s'intéresse au seul signe indépendamment de toute signification et se propose de réduire le raisonnement au seul usage convenablement réglé des signes.

Si la première forme de formalisation (la caractéristique de Leibniz ou l'idéographie de Frege) laisse entier le problème de la définition, au sens que la définition est antérieure à la formalisation, le formalisme hilbertien, quant à lui, résoud ce problème en l'éliminant : point n'est besoin de définir les objets mathématiques réduits à n'être que des signes, les axiomes auxquels ils sont soumis déterminant leur usage dans le discours mathématique.

On voit ainsi se constituer ce que l'on peut appeler une *mathématique des relations* par opposition à la *mathématique des objets* de la tradition euclidienne conduisant à une *désontologisation* des objets mathématiques au sens où ils ne relèvent plus que du seul discours. Cette désontologisation constitue une des grandes transformations de la pensée mathématique au tournant du siècle.

Reste que les objets étudiés et les axiomes énoncés par le géomètre, y compris par le géomètre formaliste, ne sont pas arbitraires ; l'axiomatique hilbertienne, lors même qu'elle s'en dégage, s'appuie sur la géométrie d'Euclide dont elle se propose d'établir, d'une façon rigoureuse, les résultats. En cela la géométrie ne se réduit pas au seul jeu langagier comme a pu le laisser croire une lecture réductrice de Hilbert, en même temps que c'est ce jeu langagier qui permet d'assurer la rigueur du discours.

Ainsi apparaît, comme l'explique Hilbert dans la préface citée de *Geometry in Imagination*, un certain dualisme de l'activité scientifique entre une tendance vers l'abstraction, laquelle renvoie à la primauté du langage, plus précisément de ses seuls

---

[85]*Logique et fondements des mathématiques, Anthologie (1850 - 1914)*, publié sous la direction de François Rivenc et Philippe de Rouillant, Payot, Paris 1992, p. 223.
[86]*ibid.* p. 222
[87]*ibid.* p. 223

aspects syntaxiques, et une tendance vers la compréhension intuitive, autrement dit à l'expérience humaine du monde.

Les limites du formalisme

Si l'on considère que le langage dit les choses, la question de la cohérence du discours renvoie à celle de la cohérence du monde, principe essentiel sans lequel on ne peut penser une connaissance scientifique. Si le discours dit la vérité du monde, il ne peut être contradictoire ; c'est cela qu'exprime Frege lorsqu'il écrit dans sa lettre citée à Hilbert :

"De la vérité des axiomes il suit qu'ils ne se contredisent pas. Aucune preuve supplémentaire de ce fait n'est donc exigible"[88]

La non-contradiction est ainsi d'ordre ontologique ; elle est dans le monde et c'est parce qu'elle est dans le monde qu'elle assure la non-contradiction du langage.

Par contre, si le langage est une construction autonome, la question se pose de la non-contradiction du discours scientifique, question qui absorbera Hilbert pendant plusieurs années. On a vu que les modèles euclidiens de la géométrie non-euclidienne renvoyaient la question de la non-contradiction à celle de la géométrie euclidienne, ce qui déjà posait problème : deux discours géométriques coexistaient, à la fois contradictoires et s'inscrivant dans une théorie commune ; ainsi, marquant ses distances avec l'empirisme façon Cayley ou le platonisme façon Frege, la conception langagière permettait de comprendre que cette coexistence n'impliquait pas contradiction. Restait alors à montrer la non-contradiction de la géométrie euclidienne, ou plutôt du discours hilbertien qui la fondait. S'appuyant sur la représentation analytique de la géométrie élémentaire, Hilbert renvoyait la question de sa non-contradiction à celle de l'arithmétique, puis, celle-ci reconstruite dans le cadre de la théorie des ensembles, à la non-contradiction de cette dernière. Ainsi toute question de non-contradiction d'une théorie renvoyait à une théorie plus large. La question se posait alors de la construction d'une théorie formelle, c'est-à-dire purement langagière, suffisamment riche pour englober l'arithmétique, dont on puisse prouver la non-contradiction de l'intérieur de la théorie. En 1931, Gödel montrait qu'on ne pouvait démontrer la non-contradiction d'une telle théorie formelle de l'intérieur de cette théorie, ruinant ainsi les espoirs de Hilbert d'une démonstration formelle de la non-contradiction des mathématiques.

Pourtant le théorème de Gödel n'a pas mis fin à l'usage des méthodes formalistes, si l'on sait que l'apport de celles-ci intervient autant avant le théorème de Gödel avec la mise en place de l'algèbre moderne[89] qu'après avec le développement de la géométrie algébrique[90] et l'analyse fonctionnelle[91]. C'est que les mathématiques, y compris les mathématiques formalisées façon Hilbert, ne se réduisent pas au système formel qui les représente dans un cadre donné. Ainsi Bourbaki, disciple de Hilbert, peut écrire sans se contredire :

"En résumé, nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une

---

[88]*Logique et fondements des mathématiques, Anthologie (1850 - 1914)*, o.c. p. 223

[89]B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, Springer-Verlag, Berlin 1930

[90]Alexandre Grothendieck et Jean Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique,* plusieurs fascicules publiés par l'IHES dans les années soixante ; voir aussi Alexandre Grothendieck et Jean Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique* I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971

[91]Lynn H. Loomis, *An Introduction toAbstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton et *al*. 1953

contradiction soudain manifestée ; ***mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que l'expérience*** (souligné par nous). *C'est peu diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité."*[92]

Il y a cependant une critique du formalisme plus profonde, sur le plan de l'activité mathématique, que la seule limitation interne liée au théorème de Gödel. C'est cette dernière que nous voulons aborder ici.

C'est le risque d'une méthode efficace que d'apparaître comme bien plus qu'une méthode, voire d'apparaître comme l'essence même du domaine de la connaissance où elle intervient. C'est ainsi que Cavaillès déclare, d'une façon quelque peu ambiguë, à propos de l'axiomatique hilbertienne :

"De là à considérer que seule la méthode axiomatique peut fonder et étendre le travail mathématique, parce qu'elle exprime son essence, il n'y avait qu'un pas, qui fut fait en 1899"[93]

et que Dieudonné voit dans le formalisme le principe même de l'activité mathématique[94]. Mais peut-être faut-il voir dans ces textes l'expression d'un succès ; si une méthode permet une telle fécondité, elle est bien plus qu'une méthode et participe de la définition même du domaine dans lequel elle intervient ; ce qui pose une question plus vaste, celle de la force de l'élimination du sens comme mode de pensée.

Nous avons insisté dans la présentation de l'axiomatique hilbertienne sur le caractère méthodologique du formalisme. Le dualisme hilbertien tel que nous l'avons expliqué ci-dessus marque lui-même les limites du formalisme et la nécessité du lien avec les aspects intuitifs de la pensée mathématique. Ces aspects intuitifs sont loin d'être négligés dans la construction hilbertienne comme l'explique Hilbert lui-même à propos des deux tendances de l'activité scientifique.

Pour comprendre comment se situent ces deux tendances dans l'activité mathématique nous rappellerons comment Felix Klein explique la place accordée à la connaissance intuitive :

"Il ne faut pas toutefois se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente ; découvrir au moyen de l'Analyse, c'est bien faire un pas très important, mais ce n'est faire que le premier pas."[95]

On peut alors considérer que le rôle de la science est de construire de l'*intuitivement évident*, le détour rationnel n'étant que l'un des moyens de la construction de cet *intuitivement évident*, conception que l'on peut rapprocher de celle exprimée par Legendre au début de ses *Eléments de Géométrie*. La connaissance intuitive n'est plus la seule connaissance première, elle est ce qui, à un moment donné, peut être appréhendé globalement par le sujet connaissant et se situe ainsi aux deux bouts du

---

[92]Nicolas Bourbaki, *Théorie des Ensembles*, o.c. Paris 1954, p. 9

[93]Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme* (1937), ré-édition avec une introduction de Jean-Toussaint Desanti et une préface de Henri Cartan, Hermann, Paris 1981, p. 75

[94]Jean Dieudonné, "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques" in *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, nouvelle édition augmentée, Blanchard, Paris 1962

[95]Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, o.c. p. 38

processus de connaissance. Dans ce cadre, le formalisme apparaît comme l'une des formes extrêmes du détour rationnel.

Ce point de vue sera explicité par Gonseth, l'un des philosophes des mathématiques de ce siècle dont les analyses restent au plus près de l'activité mathématique. Dans son ouvrage *Les Mathématiques et la Réalité* Gonseth posera la question d'une possible autonomie du langage par rapport aux objets et répondra par la négative[96]. Tout en reconnaissant l'apport hilbertien à la mise en rigueur du discours mathématique, Gonseth remarque que la construction axiomatique s'appuie sur une connaissance antérieure, celle-ci participant de l'intuition. C'est cela qui le conduira à expliciter les trois aspects de la connaissance, l'intuitif, l'expérimental et le théorique et à mettre l'accent sur leur articulation. Si Gonseth reconnait le caractère méthodologique des méthodes formalistes, il les replace dans le cadre général d'une activité mathématique qui prend en compte ses divers aspects. C'est dans ce contexte qu'il explique le rôle du langage qu'il ne réduit pas à la seule expression de significations qui lui seraient extérieures, bien au contraire le langage participe à la mise en place de ces significations ; c'est ainsi qu'il écrit :

"le discours n'est pas simplement surajouté à des significations extérieures qui sans lui resteraient ce qu'elles sont. Sa participation à ce qu'il énonce est une participation active organiquement opérante"[97]

En fin de compte, aucun des trois aspects de la connaissance n'est premier, toute connaissance se situant au carrefour de ces trois aspects.

Le statut des objets mathématiques

Que sont les objets mathématiques? Sont-ils antérieurs au langage mathématique (c'est la question des significations extérieures) ou ne sont-ils que création[98] langagière?

La vulgate platonicienne nous a appris que les objets mathématiques sont des objets idéaux (les idéalités mathématiques), mais en renvoyant aux Idées, d'une part elle implique que ces objets idéaux participent de la réalité, d'autre part elle occulte la façon dont l'esprit les appréhende.

A l'opposé du réalisme platonicien, on peut adopter un point de vue empiriste que l'on peut lire chez Aristote comparant dans *Physique* II la droite mathématique et la droite physique :

"La géométrie étudie la ligne physique en tant qu'elle n'est pas physique ; au contraire, l'optique étudie la ligne mathématique, non en tant que mathématique, mais en tant que physique."[99]

Cette distinction doit être précisée si l'on considère que les termes "mathématique" (μαθηματικην) et "physique" (φυσικησ) n'ont pas le même sens chez

---

[96]Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité* (essai sur la méthode axiomatique), Blanchard, Paris 1936/1974

[97]Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, L'Age d'Homme, Lausanne 1975, p. 15

[98]Rappelons que le terme "création" (*schöpfung*) est celui utilisé par Dedekind inventant les nombres irrationnels (Richard Dedekind, *Les Nombres : Que sont-ils et à quoi servent-ils* (Préface de Jean T. Desanti, Introduction de Mahammed-Allal Sinaceur, traduction de Judith Miller, avec Hourya Sinaceur), La Bibliothèque d'Ornicar, Paris 1978).

[99]Aristote, *Physique*, texte établi et traduit par Henri Carteron, Les Belles Lettres, Paris 1973, Livre II, p. 63, 194 a,

Aristote et aujourd'hui. Le terme φυσικησ renvoie à la connaissance de la nature, c'est-à-dire aux objets de la connaissance empirique, le terme μαθηματικην renvoie à la connaissance scientifique, celle que nous atteignons par la démonstration comme l'explique l'assertion d'Aristote citée en exergue[100]. Ainsi Aristote distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique, ici la ligne considérée comme rayon lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif. On peut alors considérer que c'est *via* l'activité de raisonnement que se constitue l'objet mathématique ; dans une perspective gonsethienne, on pourrait dire qu'un objet de connaissance devient objet mathématique dès qu'il devient objet de discours démonstratif. En ce sens c'est la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, autrement dit, y compris dans les mathématiques euclidiennes, c'est le langage qui modèle les objets.

Ainsi les objets mathématiques se situent au carrefour de la connaissance intuitive et de la connaissance discursive ; la question se pose alors de la distance entre la connaissance intuitive et la connaissance discursive.

Nous avons vu que pour les Grecs le discours exprime les propriétés des objets. Mais la question se pose de la relation entre les objets du discours et les objets dont le discours veut parler et l'on peut reprendre, à propos de la géométrie grecque ce que Umberto Eco dit de la métaphysique aristotélicienne :

"L'ontologie d'Aristote a des racines verbales."[101]

Les constructions langagières postérieures renforceront le caractère idéal des objets mathématiques, moins au sens platonicien qu'au sens d'*êtres de raison*, que ce soit avec la *"seule et même énonciation"* de Desargues ou que ce soit avec les méthodes analytiques. Les objets mathématiques seront de plus en plus façonnés par le discours, ce qui conduira aux difficultés rencontrées au XIXème siècle avec ce que l'on a appelé la "crise des fondements", laquelle est d'abord une crise du langage. Le formalisme hilbertien apparaît alors comme la solution à la crise en réduisant les objets mathématiques à des objets de discours, du moins sur un plan méthodologique. Nous avons dit plus haut la richesse de ce point de vue et ses limites.

La position gonsethienne qui refuse de trancher et qui place les objets mathématiques à l'articulation des trois aspects de la connaissance que nous avons dit plus haut a le mérite de montrer la multiplicité des points de vue dans l'activité mathématique elle-même ; c'est parce que l'on raisonne et que le raisonnement s'effectue *via* un discours que les objets mathématiques sont des constructions langagières, mais ce sont les problèmes que l'on se pose sur des objets *intuitivement connus*[102] qui donnent une épaisseur épistémologique à ces objets.

Nous conclurons cet article en citant Quine qui écrit :

"La science est un prolongement du sens commun, et elle utilise la même tactique que le sens commun : gonfler l'ontologie pour simplifier la théorie"[103]

---

[100]Nous remercions Joëlle Delattre qui nous a communiqué ces remarques sur la traduction. Précisons cependant que nous prenons l'entière responsabilité de l'interprétation de cette traduction.

[101]Umberto Eco, *Kant et l'ornithorynque,* o.c. p. 27

[102]L'expression *"intutivement connu"* est prise ici dans son sens gonsethien, il s'agit moins d'une connaissance première que d'une connaissance devenue *"intuitivement évidente"* au sens de Felix Klein.

[103]Quine, "Les deux dogmes de l'empirisme" in Pierre Jacob, *de Vienne à Cambridge,* Gallimard, Paris 1980, p. 111

La science est ainsi moins description du monde que construction du rapport de l'homme au monde. Les objets mathématiques existent parce que l'esprit humain les a construits et l'esprit humain les a construits parce qu'ils les a rencontrés. Position ambiguë dira-t-on, mais c'est cette ambiguïté qui fait la force de la connaissance scientifique.

Appendice : les trois moments de l'épistémologie

Nous nous proposons de situer dans le cadre général de l'épistémologie ce que nous avons appelé l'épistémologie des problématiques ; pour cela nous nous appuyons encore une fois sur les conceptions de Gonseth. Prolongeant l'analyse de celui-ci qui distingue entre une *stratégie de fondement* et une *stratégie d'engagement* dans la construction de la connaissance[104], nous distinguerons trois aspects de l'épistémologie, une *épistémologie des fondements*, une *épistémologie du fonctionnement* et une *épistémologie des problématiques*[105].

L'épistémologie des fondements se propose l'étude des conditions de légitimation de l'activité scientifique sous ses deux formes aujourd'hui canoniques, la forme mathématico-logique et la forme expérimentale (encore faut-il préciser ce que chacune de ces deux formes signifie dans le cadre d'un domaine donné de la connaissance). Nous pouvons distinguer deux grandes formes de cette épistémologie des fondements, une forme *métaphysique*, laquelle s'appuie sur une ontologie des objets (que l'on se situe dans une philosophie empiriste où les objets mathématiques sont des *abstractions* issues de la connaissance sensible, ou que l'on adopte un point de vue platonicien), et une forme *analytique*, laquelle s'appuie essentiellement sur une analyse du langage conduisant à expliciter ce que l'on pourrait appeler *la grammaire du raisonnement*, les objets étant définis (ou redéfinis) par un système de relations donné *a priori*. En ce qui concerne les mathématiques, on peut ainsi distinguer entre *une mathématique des objets* fondée sur les vérités premières que sont les axiomes, considérés comme propositions portant sur des objets existants, propositions évidentes par elles-mêmes comme on peut le lire dans les traités classiques de géométrie élémentaire, et *une mathématique des relations* comme se présente la construction hilbertienne. La diversité des modes de raisonnement qui ont constitué dans l'histoire ce que l'on appelle la démonstration et la diversité des conditions de légitimation de ces raisonnements nous amène à prendre en compte la diversité des approches du problème des fondements et en particulier son historicité. L'étude de l'épistémologie des fondements se pose ainsi doublement ; d'une part une étude *synchronique* s'intéressant aux principes qui régissent les règles de raisonnement, d'autre part une étude *diachronique* dont l'objet est l'étude des transformations des conditions de légitimation du raisonnement dans l'histoire, ce qui pose le double problème des raisons de ces transformations d'une part et d'autre part des *invariants historiques* déjà cités[106] qui font que l'on reconnaît une unité dans les diverses formes du raisonnement mathématique à travers les âges.

L'épistémologie du fonctionnement peut être considérée comme l'analyse des procédures, moins dans leurs fondements que dans leurs significations, autant sur le plan proprement technique que sur le plan conceptuel. Il s'agit ici moins de rechercher un discours fondateur que d'expliciter comment des procédures, des modes de raisonnement ou des modes de recherche se sont constitués et comment ils ont été et sont utili-

[104]Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation,* o.c. préface.
[105]Ces trois aspects de l'épistémologie seront développés dans un article à venir.
[106]Paul Veyne, *L'inventaire des différences,* o.c.

sés[107]. Ceci nous renvoie encore une fois aux raisons qui conduisent à fabriquer de telles procédures, c'est-à-dire aux problèmes qui en sont à l'origine.

L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit l'homme à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes. Si, comme le dit Max Weber, *"la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation"*[108], c'est à travers les problèmes que la méthode scientifique s'est construite et c'est dans le caractère même de ces problèmes et leur formulation que l'on peut essayer de comprendre comment se sont mises en place les théories plus ou moins sophistiquées qui constituent la science. Cela nous conduit à privilégier la notion de problématique (ou de champs de problèmes[109]) dans l'étude des conditions de la construction de la science, problèmes de fondements et règles de fonctionnement s'articulant autour des problématiques dans lesquelles ils se situent.

[107]On pourrait citer le calcul différentiel de Leibniz (cf. G. W. Leibniz, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989) ou le rôle de l'analytique dans les travaux de Lagrange.

[108]Max Weber, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965, p. 203

[109]pour reprendre l'heureuse expression du *Groupe d'Enseignement Mathématiques* de Louvain-la-Neuve (G.E.M.) (cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII).