

## A propos du Calcul

### **Multiplication**

*multiplication d'un nombre concret par un nombre abstrait*

4 pommes + 4 pommes + 4 pommes + 4 pommes + 4 pommes = cinq fois 4 pommes

4 pommes + 4 pommes + 4 pommes + 4 pommes + 4 pommes = 4 pommes multiplié<sup>1</sup> par 5

la première ligne suggère d'écrire  $5 \times 4$  pommes

la seconde ligne suggère d'écrire  $4$  pommes  $\times 5$

il ne s'agit pas ici de commutativité, il s'agit de représentation d'un calcul, les deux représentations sont possibles, pourvu que l'on sache ce qu'elles signifient

j'ai usé ici de la multiplication d'un nombre concret (4 pommes) par un nombre abstrait, il y a donc une distinction entre les deux nombres, le multiplicande (nombre concret) et le multiplicateur (nombre abstrait)

reste ici une question d'usage : traditionnellement on dit cinq fois quatre pommes, et l'on écrit  $4 \times 5$  (4 pommes multiplié par 5). le mieux est de se conformer aux usages pour des raisons pratiques. Une interprétation formalisée, si nécessaire, viendra plus tard.

*sur la commutativité*

je reprends ce qu'il y avait dans mon livre d'arithmétique à l'école communale (je ne sais plus quelle classe) à la fin des années quarante (l'*Arithmétique* de Lemoine, je crois)

cinq fois 4 pommes = quatre fois 5 pommes

on peut regarder le schéma ci-dessous

? ? ? ?  
? ? ? ?  
? ? ? ?  
? ? ? ?  
? ? ? ?

cinq rangées de quatre pommes

mais aussi

quatre colonnes de cinq pommes

il y a ici un aspect empirique qu'il ne faut pas négliger, d'un empirisme organisé par le maître il est vrai, mais c'est le rôle du maître que d'organiser cet empirisme. Il n'y a rien ici de *naturel*, au sens d'antérieur à l'homme.

---

<sup>1</sup>j'hésite sur l'accord

pour les nombres abstraits, c'est autre chose, mais on peut admettre que ce qui a lieu pour le comptage de nombres concrets (qu'est-ce qu'une multiplication, sinon un comptage de nombre concrets) est encore vrai pour des nombres abstraits.

on peut d'ailleurs, s'appuyant sur une lecture possible des livres arithmétiques d'Euclide, considérer un nombre abstrait comme un nombre concret : un nombre d'unité (un nombre de 1 si l'on veut, ce que je noterai par un nombre de **u**)

on peut reprendre ce que j'ai écrit au début (en changeant pomme en **u**)

$$4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} = \text{cinq fois } 4 \mathbf{u}$$

$$4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} + 4 \mathbf{u} = 4 \mathbf{u} \text{ multiplié par } 5$$

la première ligne suggère d'écrire  $5 \times 4 \mathbf{u}$

la seconde ligne suggère d'écrire  $4 \mathbf{u} \times 5$

Notons que les nombres 4 et 5 jouent des rôles différents.

On peut récupérer la commutativité avec le schéma ci-dessous

**u u u u**  
**u u u u**  
**u u u u**  
**u u u u**  
**u u u u**

ce qui montre que cinq rangées de 4 **u** et quatre colonnes de 5 **u** sont égales.

Il y a ici un aspect empirique des nombres, lié au comptage, qu'il ne faut pas négliger (même remarque que ci-dessus sur l'empirisme)

*une remarque de Wittgenstein*

Wittgenstein exerça, rappelons le, le métier d'instituteur, ce qui n'est pas sans lien avec sa conception des mathématiques et particulièrement de l'arithmétique.

Dans ses *Remarques sur les Fondements des Mathématiques*, Wittgenstein parle de l'inexorabilité des mathématiques, donnant comme exemple une suite arithmétique : si l'on connaît le premier terme  $a$  et la raison  $r$ , le  $n^{\text{ième}}$  terme de la suite est complètement déterminé, *inexorablement déterminé* pourrait-on dire.

Wittgenstein pose alors la question de la nature de cette inexorabilité : une nécessité *a priori*, ou le résultat d'une pratique (le comptage), cette dernière réponse renvoyant à un certain caractère expérimental de la logique (la logique comme science naturelle).

Les diagrammes de Lemoine ne sont-ils pas une approche expérimentale de la pratique du comptage et du calcul ? (c'est moi qui pose la question)<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Il y a en France un rejet de l'empirisme qui me semble très regrettable en particulier lorsque l'on parle de mathématiques. D'autant qu'il y a une tradition française de l'empirisme, que ce soit D'Alembert, Poincaré ou Borel. Il est vrai que l'on parle aujourd'hui du caractère expérimental des mathématiques en s'appuyant sur l'usage des ordinateurs, oubliant que la première machine à calculer inventée par l'homme est la main. Les Anglo-Saxons ne l'ont pas oublié qui parlent de *digit*. N'oublions pas que le premier qui a proposé la mise en place de laboratoires de mathématiques dans les lycées s'appelait Emile Borel et que sa proposition date de 1904.

Autre exemple de cette pratique : la détermination de la somme des entiers, dont on dit que Gauss la trouva à l'école élémentaire. Ici encore il y a un aspect empirique ou plutôt expérimental, puisqu'il y a plus qu'une simple observation :

question : calculer la somme des dix premiers nombres

on écrit les deux suites

1 2 3 4 5 6 7 8 9  
9 8 7 6 5 4 3 2 1

En quelle classe peut-on donner cet exercice, en aidant éventuellement les élèves qui ne sont pas des Gauss ?

*règle de trois*

La règle de trois est un outil de calcul pour résoudre des problèmes de proportionnalité. On peut donc considérer la règle de trois comme une réduction à l'unité.

Ainsi le problème suivant : 5 pommes coûtent 35 francs, combien coûteront 7 pommes.

On raisonne de la façon suivante : si 5 pommes coûtent 35 francs, une pomme coûte cinq fois moins, soit  $35/5$  francs et 7 pommes coûteront sept fois plus, soit  $7 \times (35/5)$  francs ou  $(35/5) \times 7$  francs, suivant la notation que l'on utilise (cd. ci-dessus). On peut avoir plus compliqué : si 3 pommes coûtent 20 francs, combien coûteront 7 pommes. Ici la division  $20/3$  ne tombe pas juste, ce qui pose un problème de calcul.

En général, pour éviter les divisions qui ne tombent pas juste, on renvoie l'opération de division à la fin et l'on procède de la façon suivante :  $(7 \times 20)/3$  ou  $(20 \times 7)/3$ , autrement dit on effectue la multiplication avant la division.

On peut justifier cette règle par les deux raisons suivantes : d'une part, elle donne le même résultat que la première règle, d'autre part, elle est plus simple que la première règle.

Ces justifications, bien qu'insuffisantes sur le plan théorique, suffisent dans un premier enseignement. Elles sont liées au fait, empirique dans une première approche, qu'un calcul sur des grandeurs se ramène à un calcul sur des nombres, ce qui permet de confondre, en pratique, les deux calculs.

On peut cependant en donner une justification théorique de la façon suivante en s'appuyant sur la proportionnalité.

Dans une théorie numérique de la proportionnalité, les relations

$$a/b = c/d$$

et

$$ad = bc$$

sont équivalentes.

On en déduit aisément les relations numériques

$$c = (a/b) \cdot d$$

$$c = ad/b$$

ce qui justifie les deux règles de calcul de  $c$ .

Cela n'est plus vrai pour les grandeurs<sup>3</sup>.

On peut alors considérer deux formes de la règle de trois, la première étant la réduction à l'unité, la seconde s'appuyant sur la proportionnalité.

Pour illustrer ces deux méthodes nous proposons le problème suivant :

Sur une carte, 2cm représentent 12 kilomètres, quelle distance représenteront 5cm.

on peut utiliser la réduction à l'unité :

Si 2cm représentent 12 km, alors 1cm représente  $12/2$  km et par conséquent 5 cm représentent  $5 \times (12/2)$  km soit  $5 \times 12/2$

La règle de proportionnalité peut être énoncée de la façon suivante : si on note  $x$  la distance cherchée, alors le rapport de 5cm à 2 cm est égal au rapport de  $x$  à 12 km, autrement dit

$$5/2 = x/12$$

ce qui implique

$$x = 12 \times (5/2)$$

soit

$$x = 12 \times 5/2$$

On pourrait aussi dire, de façon obsolète mais signifiante

$$x \text{ est à } 12\text{km} \text{ comme } 5 \text{ cm est à } 2 \text{ cm}$$

et la suite.

Je rappelle que, dans la quatrième de couverture des cahiers d'écoliers, en bas de la table de multiplication, avec les signes usuels des opérations +, -, ×, :, on trouvait encore le signe :: qui signifie comme. On peut alors écrire la relation

$$x : 12 \text{ km} :: 5 \text{ cm} : 2 \text{ cm}$$

Mais revenons à la règle de trois, celle-ci évite l'usage de la proportionnalité et peut servir d'introduction à cette notion. C'est l'une des raisons de son efficacité pratique et théorique.

Le rejet de la règle de trois lors de la réforme des mathématiques modernes résulte d'une double confusion :

$$\text{règle de trois} = \text{proportionnalité} = \text{linéarité}$$

L'égalité ci-dessus est une trivialité dans le cadre d'une théorie formelle, mais comme on sait, les égalités formelles ne sont pas toujours des égalités dur le plan de la signification et de la compréhension.

Je ne prétends pas donner de méthodes d'enseignement, seulement ajouter quelques remarques dans le débat sur le calcul.

Rudolf Bkouche

---

<sup>3</sup>On peut considérer les lourdes démonstrations données par les géomètres pour dire que le rapport des longueurs  $a$  et  $b$  est égal au rapport des longueurs  $c$  et  $d$ , si et seulement si l'aire du rectangle de côté  $a$  et  $d$  est égale à l'aire du rectangle de côté  $b$  et  $c$ . Notons que les longueurs ne sont pas mesurées et que la démonstration ne fait pas appel à la mesure des longueurs. Je renvoie au livre V des *Eléments* d'Euclide.