REMARQUES SUR LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposition ne sont-ils pas, en fait, un même mode de raisonnement ? (question posée dans un Bulletin de l'APMEP)

Une telle question est au coeur même de la logique, et pour être plus précis, de la distinction, souvent oubliée, entre la logique formelle d'Aristote et la logique mathématique, distinction que l'on peut rapprocher de la distinction entre géométrie et géométrie analytique. Sur cette distinction, on peut lire par exemple l'article de René Thom, "Les mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique" in *Pourquoi la Mathématique?* UGE, Paris 1974, p. 72-73.

Le terme *formel* que l'on retrouve dans deux expressions qui aujourd'hui nous semblent proches, le *formel* de la logique formelle aristotélicienne et le *formel* du calcul formel, a-t-il la même signification dans les deux cas.

Si la logique formelle s'intéresse à la forme du raisonnement, c'est-à-dire la manière dont il se dit ou s'écrit, et aux règles qui régissent cette forme, le raisonnement porte sur un contenu et c'est ce contenu qui lui donne sens. La logique se définit alors comme une codification des règles du discours qui permet d'atteindre la vérité. Dans ce cadre, celui de la recherche de la vérité, la logique s'appuie sur des principes qui lui sont antérieurs, principes qui régissent cette recherche de la vérité; autrement dit la logique est fondée par une métaphysique. En particulier, c'est le principe du tiers-exclu qui permet le raisonnement par l'absurde : pour montrer que A implique B, on peut montrer que si l'on suppose simultanément A et la négation de B, alors cela conduit à une contradiction ; par conséquent, si l'on suppose A, alors *nécessairement* B. C'est de la même façon que l'on justifie le raisonnement classique par exhaustion : pour montrer que deux grandeurs A et B sont égales, on montre que les hypothèses $A < B$ et $A > B$ conduisent à une contradiction, il ne reste alors que la seule possibilité $A = B$.

Une telle conception suppose, et c'est encore la métaphysique qui fonde cette hypothèse, une adéquation entre le langage et les "choses" dont il parle ; c'est cette adéquation nécessaire au développement de la science qui conduit les Grecs à se méfier des lieux où cette adéquation est mise en défaut, ainsi la méfiance envers l'infini.

La logique moderne, quant à elle, se définit comme un calcul. Si l'idée de considérer le raisonnement comme un calcul est ancienne, il fallait attendre le développement du calcul algébrique pour que puisse se mettre en place une représentation algébrique des *lois de la pensée* telle que la propose Boole dans l'ouvrage qui porte ce titre. Il s'agit essentiellement ici d'un calcul *symbolique* en ce sens que les lettres sur lesquelles opère le calcul représentent des objets, ici des propositions, et l'on peut comparer l'oeuvre de Boole à celle de Descartes mettant en place la géométrie analytique où le calcul porte sur des lettres représentant des mesures de grandeurs. Mais si ce calcul, celui de Boole comme celui de Descartes, reste proche des objets sur lesquels il porte, il ouvre la voie à ce que l'on appelle un calcul *formel* ; celui-ci porte essentiellement sur les lettres sur lesquelles il opère, indépendamment de toute signification. On est ainsi conduit à définir un calcul comme un ensemble de règles portant sur des signes, c'est ce point de vue qui conduit à la logique algébrique telle qu'on peut la lire par exemple dans l'ouvrage de Couturat *L'Algèbre de la Logique* (Gauthier-Villars, Paris 1905). Mais cette conception algébrique de la logique, si elle est fondée comme calcul, laisse en suspens le problème de son adéquation à la pensée elle-même, comme le note Louis Couturat lorsqu'il écrit, dans l'ouvrage cité :

"C'est une question philosophique de savoir si, et dans quelle mesure, ce calcul répond aux opérations réelles de l'esprit, et est propre à traduire ou même à remplacer le raisonnement."

On pourrait rapprocher cette question de celle posée par Poncelet lorsqu'il énonce les deux postulats de la géométrie analytique, le premier postulat affirmant que, une situation géométrique étant donnée, on peut la représenter par un système d'équations, le second postulat affirmant que les nouvelles équations obtenues après calcul représentent encore des propriétés de la situation géométrique donnée. Si l'on remarque que le calcul est soumis à des règles formelles indépendantes de la situation géométrique donnée, la question se pose des raisons qui pemettent d'affirmer l'adéquation entre le calcul et la situation géométrique. C'est le problème que pose toute représentation symbolique d'une situation lorsque l'on affirme que les calculs (c'est-à-dire les transformations effectuées sur les symboles de façon indépendante des objets qu'ils représentent) nous donne des informations sur la situation primitive.

Dans le cadre de la logique algébrique, la contraposition se présente comme une simple tautologie. Si le calcul des propositions peut être défini à partir de deux opérations logiques, l'une binaire représentée par le signe v, l'autre unaire représentée par le signe ' satisfaisant à la propriété $A''= A$, la proposition $A \Rightarrow B$ n'est autre qu'une façon d'écrire la proposition $A' \vee B$, laquelle peut s'écrire $A' \vee B''$ et par conséquent $B'' \vee A'$. On pourrait écrire, sous une forme purement calculatoire

$$(A \Rightarrow B) = A' \vee B = A' \vee B'' = B'' \vee A' = (B' \Rightarrow A')$$

Evidemment la question se pose du lien entre un tel calcul et le raisonnement, mais c'est là un problème philosophique auquel on ne peut répondre par une simple identification, même si l'on remarque que le calcul booléen a été fabriqué pour représenter les lois de la pensée comme la géométrie analytique a été fabriquée pour représenter les phénomènes géométriques.

On peut évidemment répondre à cette question en recourant à la notion d'interprétation, mais cela renvoie à d'autres questions : Qu'est-ce qui fonde l'interprétation ? Dans quelle mesure ce fondement relève-t-il de la seule connaissance positive (non métaphysique) ? Tout cela nous rappelle que l'identification du raisonnement par l'absurde et de la contraposition, si elle peut paraître séduisante dans un premier temps, pose un problème philosophique qui ne se réduit pas à une simple prise de position, celui de l'adéquation entre les constructions formelles qui se proposent de représenter des parties du réel (ici, le raisonnement humain) et ces parties du réel.

Pour revenir à la géométrie analytique, peut-on se contenter de dire que les équations des coniques de la géométrie analytique sont équivalentes aux lourdes propriétés énoncées par Apollonius, ou faut-il ajouter que les équations cartésiennes, loin d'être une simple reformulation des énoncés apolloniens, mettent en place une nouvelle manière de penser la géométrie ? et par conséquent ne se contentent pas de répéter Apollonius (en précisant aussi que si elles disent plus, elles disent aussi moins).

Rudolf Bkouche