Abstrait *vs* concret, une opposition ambiguë

rudolf bkouche
IREM de Lille
rbkouche@wanadoo.fr

Introduction

Dans le langage courant, le terme "abstrait" est devenu synonyme de "difficile" voire "incompréhensible" alors que le terme "concret" renvoie à la connaissance sensible laquelle serait d'accès plus facile. Et pourtant l'abstraction, que l'on peut considérer comme la construction d'objets purement intellectuels, a pour premier objectif de simplifier ce que l'on se propose d'étudier pour mieux l'appréhender. C'est ainsi que l'on peut comprendre cette définition de l'abstraction que propose D'Alembert dans son *Essai sur les Eléments de Philosophie* :

"L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres."[1].

Exemple caractéristique d'abstraction correspondant à la définition de D'Alembert, la géométrie élémentaire en tant qu'elle est l'étude des corps solides du point de vue de la forme et de la grandeur. L'étude géométrique des corps oublie la matière dont ils sont faits pour ne considérer que la forme et la grandeur de ces corps, ce qui suppose que l'on ait défini les relations "avoir même forme" et "avoir même grandeur". Nous reviendrons sur ce point.

Ainsi l'abstraction, selon d'Alembert, conduit à définir le "même". Pourtant cette définition de l'abstraction reste insuffisante comme nous le montrerons ci-dessous. Si l'abstraction est l'abstraction de quelque chose, quelle est cette chose ? On peut alors renvoyer à une explication simple, l'abstraction consiste à fabriquer un objet abstrait à partir d'un objet qui serait concret, mais qu'est-ce que cet objet concret ? On peut répondre : un objet directement appréhendé par les sens, réponse empirique qui a l'avantage de la simplicité, ou plutôt qui a l'avantage de paraître simple. Cette réponse est pourtant loin d'éclairer la question ; d'une part elle laisse de côté le processus d'abstraction, ce qui reste le point faible de toute doctrine empiriste, d'autre part elle laisse entendre que le concret précède l'abstrait. C'est sur ce dernier point que nous voulons revenir dans cet article en insistant particulièrement sur les questions d'enseignement.

Un exemple : nombres abstraits et nombres concrets

La distinction "nombres abstraits - nombres concrets" est un piège. Non qu'il ne faille pas faire une telle distinction, mais parce que, dans le cas des nombres, l'usage des termes "abstrait" et "concret" déplace cette distinction et par cela même la fausse.
Les termes "nombre abstrait" et "nombre concret" renvoient à l'idée "naturelle" que le nombre abstrait est une abstraction du nombre concret, et d'opposer "trois pommes" ou "trois poires", lesquelles conduiraient à l'idée du nombre trois, et le nombre trois. Mais ici il ne s'agit pas d'un processus d'abstraction au sens que dit D'Alembert ; quel est alors l'objet dont le nombre trois serait abstrait ?

[1]D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 29

Pour éviter cette difficulté, on peut proposer une distinction grammaticale : *"le nombre abstrait est un nom, le nombre concret est un adjectif"*[2]. Pour aussi schématique qu'elle soit, cette distinction semble plus pertinente que le recours à l'abstraction qui oublie le processus d'abstraction. Si un objet abstrait est le résultat d'un processus, c'est à travers le processus que l'on peut atteindre non seulement l'objet abstrait, mais ce qui fait son caractère abstrait. Ici se mêle deux sens du terme "abstraction", l'abstraction comme processus d'une part, l'abstraction comme résultat de ce processus.

Regardons maintenant du côté des nombres : comment voit-on l'objet commun qui se cache derrière "trois pommes"" et "trois poires" ? Et bien on les compte, c'est-à-dire que l'on use de la relation entre la comptine et les objets que l'on compte[3]. Se pose alors la question : que sont les nombres de la comptine ? des nombres abstraits, laissant ainsi entendre que le sujet comptant possèderait les nombres abstraits avant les nombres concrets ; des nombres concrets, mais alors "des nombres de quoi ?" si l'on admet qu'un nombre concret est un nombre d'objets. Ainsi se définit un objet intermédiaire, le nombre de la comptine, nombre ni abstrait au sens qu'il n'est abstrait de rien, ni concret au sens qu'il n'est pas "nombre de".

Et pourtant le nombre de la comptine joue un rôle essentiel dans l'acquisition de la notion de nombre. Sans pour autant que l'on puisse définir son statut (le poser comme nom par rapport au nombre "adjectif numéral" que serait le "nombre de" est une façon de fixer les idées mais ne dit rien sur le statut des nombres de la comptine), mais est-il nécessaire de fixer le statut des nombres de la comptine ? en fait ce statut, si statut il faut, se mettra en place au fur et à mesure que la notion de nombre se précisera.

Ce nombre sans statut précis que constitue le nombre de la comptine est pourtant essentiel à la fois dans l'apprentissage du comptage et dans l'apprentissage du calcul[4]. La difficulté tient alors moins à un processus d'abstraction (le passage supposé de la notion de nombre concret à la notion de nombre abstrait) qu'au rôle premier dans l'acte de comptage que joue la comptine. En ce sens la distinction entre nombre abstrait et nombre concret apparaît comme seconde et ne prend sens que pour qui sait compter. Cela implique que dans l'enseignement, ce qui importe c'est le comptage, la distinction entre nombre abstrait et nombre concret s'appuyant sur le savoir compter.

Un regard historique montre combien l'histoire de l'arithmétique reste plus complexe que l'histoire de la géométrie, laquelle se prête mieux à la dialectique du concret et de l'abstrait, même si cette distinction ne se réduit pas à la définition de D'Alembert (cf. ci-dessous).

Les Grecs étaient conscients de ce problème, il n'est que de voir la différence entre le point de vue géométrique développé dans les livres arithmétiques d'Euclide et le point de vue numérique des arithméticiens comme Nicomaque de Gérase ou Théon de Smyrne. Je ne parle pas ici de la classique différence entre l'arithmétique considérée comme science des nombres, au sens aristotélicien du mot science, et la logistique liée à la pratique du calcul, je parle de la différence de traitement, entre le point de vue géométrique d'une science déductive des nombres telle qu'on la trouve dans les livres arithmétiques d'Euclide et les travaux des arithméticiens déjà cités, Diophante représentant une tentative de synthèse des deux points de vue.

Cela dit, on ne saurait séparer dans l'apprentissage les notions de nombre concret et de nombre abstrait, le "nombre de " et le "nombre", ces deux notions étant réunies *via* le comptage.

---

[2]Pour éviter tout malentendu, précisons que cette distinction grammaticale est indépendante de la distinction "concret – abstrait".

[3]Précisons ici que le savoir-compter ne se réduit pas à la récitation de la comptine, il consiste en la mise en relation entre la comptine et les objets que l'on compte.

[4]Lorsque l'on parle de l'apprentissage du calcul, il ne faut pas oublier la première machine à calculer que constitue la main. Compter sur ces doigts est une étape essentielle, on peut ensuite passer au boulier ou aux bûchettes.

Nombres cardinaux et nombres ordinaux

La définition des nombres *via* le comptage mêle les deux notions de nombre cardinal et nombre ordinal. Se pose ainsi la question de la distinction de ces deux notions. Il ne saurait ici être question de chercher cette distinction ni dans l'histoire de la notion de nombre depuis les temps préhistoriques ni dans le développement de l'enfant. Dans le premier cas on ne sait pas grand'chose sinon les interprétations d'encoches, dans le second cas, on sait que l'apprentissage du comptage mêle les deux notions et que leur distinction relève de l'apprentissage[5].

La question est donc moins de définir une origine, qui serait naturelle, de cette distinction que de définir comment cette distinction se met en place au cours de l'apprentissage. Le comptage suppose une mise en ordre, tout au plus peut-on apprendre, empiriquement, que si on change l'ordre des objets que l'on compte, on obtient le même nombre d'éléments. On pourrait parler ici d'invariance du nombre, non que celui qui apprend à compter ait conscience de la notion d'invariant, mais c'est une façon commode de présenter l'un des points importants de l'apprentissage du comptage. C'est d'ailleurs cette invariance qui permet de comprendre la commutativité de l'addition, l'échange des deux termes d'une addition n'étant qu'un changement d'ordre. On peut le voir empiriquement en comptant sur ces doigts.

Si on revient à la question de l'abstrait et du concret, on voit encore que celle-ci est seconde. On ne construit pas un abstrait par une opération d'abstraction du concret (que serait ce concret ?) pas plus qu'on ne concrétise un objet idéal. Plutôt que de chercher une distinction *a priori*, on pourrait plutôt, à la façon gonséthienne, parler de synthèse dialectique entre l'appréhension d'une situation donnée et la façon dont on l'exprime[6]. On peut ensuite, à titre de commodité de langage, présenter la situation donnée comme concrète et son expression langagière comme une abstraction ; une telle façon de faire conduit à considérer le langage comme la première forme d'abstraction.

L'abstrait et le concret dans les sciences de la nature

Une première façon d'aborder la question de l'abstraction dans les sciences de la nature est celle de la classification. On la trouve chez Aristote avec les notions de genre et d'espèce. On peut considérer que cette notion a été formalisée par les mathématiciens avec la notion de relation d'équivalence. On peut alors poser la question : est-ce que la notion de relation d'équivalence épuise la notion d'abstraction. Nous verrons que non.

la classification de Linné

Premier exemple de classification que nous aborderons, la classification des animaux et des végétaux, classification qui constitue un modèle d'abstraction, modèle peut-être trop simple dans la mesure où on distingue aisément l'animal comme individu et l'espèce comme représentant un ensemble d'animaux qui se ressemblent, ainsi l'individu "lion" et l'espèce "lion", encore que la notion d'espèce ne se réduit pas à une simple reconnaissance empirique de ce qui serait un "même", un déjà-là, comme le montre l'espèce "chien" qui contient des animaux aussi différents que le dogue et le chihuahua.

---

[5]Rappelons que l'apprentissage du comptage relève autant de l'arithmétique élémentaire que de la grammaire sans oublier les questions de vocabulaire.

[6]Sur la notion de synthèse dialectique nous renvoyons à l'ouvrage de Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace* (6 volumes), Editions du Griffon, Neuchâtel 1945-1955. Pour une présentation de cette notion nous renvoyons à l'article de Houria Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth" in *La Figure et l'Espace*, Actes du colloque de la Commission Inter-IREM Epistémologie (Lyon 1991), IREM de Lyon

La classification des animaux et des végétaux montre aussi une échelle montante d'abstraction avec l'espèce, la famille, le genre, l'ordre, la classe et l'embranchement et en sens inverse avec les divisions de l'espèce en sous-espèces et en races. Dans le cadre de la classification de Linné, on peut alors distinguer entre l'animal concret, l'individu, et les différents objets abstraits définies pour les besoins de la classification. Mais il ne faut pas oublier que la définition de ces objets abstraits s'appuie sur des principes de classification. Ainsi l'ordre des mammifères est défini par le principe suivant : un mammifère est un animal dont la femelle allaite ses petits. C'est ce principe qui permet de classer les baleines ou les dauphins dans l'ordre des mammifères. Mais on sait aussi que ce principe doit être précisé comme le montre la question de l'ornithorynque.
Mais qu'en est-il dans les différentes sciences de la nature ?

la chaleur

Je citerai d'abord la chaleur. Si le terme "concret" renvoie à la connaissance par les sens, on peut considérer que les termes "chaud' et "froid" relèvent du concret en ce qu'ils sont définis par leur effet sur la peau. Pourtant une expérience simple que l'on trouve dans certains ouvrages de physique élémentaire montrent que ces termes posent problème : on considère trois récipients, le premier rempli d'eau froide, le second rempli d'eau chaude et le troisième rempli d'eau tiède. Une personne met sa main gauche dans le premier récipient et sa main droite dans le second récipient, puis elle retire ses mains et les met toutes les deux dans le troisième récipient. La main gauche aura une sensation de chaud et la main droite une sensation de froid bien qu'elles plongent dans la même eau. On apprend ainsi, en physique élémentaire, les limites de la connaissance sensorielle. On sait que pour connaître le degré de chaleur d'un corps on a inventé un concept, la température, et on a inventé des appareils à mesurer ce concept, les thermomètres. Mais comment définit-on ce concept qui devrait préciser ce qui est chaud et ce qui est froid. Loin d'être antérieur à l'appareil qui le mesure, ce concept est défini par la construction de l'appareil : on met dans un tube du mercure dont on sait qu'il se dilate sous l'action de la chaleur, puis la colonne de mercure reposant sur l'une des extrémités du tube, on marque la position de la hauteur de la colonne de mercure lorsque le tube est plongé dans de l'eau en train de se congeler et la position de la hauteur de la colonne de mercure lorsque le tube est plongé dans l'eau en ébullition. Enfin on divise le tube en cent parties égales entre les deux marques ainsi obtenues. On appelle degré l'intervalle entre deux divisions consécutives, on note 0 la première marque, 100 la dernière marque, ce qui permet de numéroter les marques intermédiaires de 0 à 100. Le thermomètre étant plongé dans un milieu, on appelle température de ce milieu le numéro correspondant à la hauteur de la colonne de mercure. On peut ensuite prolonger au-delà de l'intervalle [0,100]. Ainsi pour préciser une connaissance sensorielle, on a fabriqué un concept et un appareil à mesurer ce concept, et c'est la mesure de ce concept qui nous fait connaître le degré de chaleur d'un milieu. La notion "concrète" de chaleur ressentie par la peau disparaît ainsi derrière une notion "abstraite" définie de façon arbitraire mais opératoire. On peut parler ici de notion abstraite dans la mesure où le concept de température et sa mesure sont issus d'un processus assez complexe ; il faut alors ajouter que c'est ce processus qui permet de mieux connaître un effet sensoriel difficile à saisir. On peut alors dire que, sans l'abstraction que constitue la construction de la notion de température, la notion "concrète" de chaleur reste vague, autrement dit c'est l'abstrait qui permet de connaître le concret. La démarche apparaît ici inverse de celle de la classification de Linné.

la mécanique

Si on passe à la mécanique, on peut poser la question :
De quoi l'équation

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$$

est-elle l'abstraction ?
On peut commencer par regarder la signification de chacun des éléments de cette équation.
Commençons par la masse *m* dont la signification semble aisée. Pour Newton, la masse est la quantité de matière qui compose un corps, ce qui a l'avantage de dire de quoi on parle[7]. Est-ce concret ? en un certain sens oui si on considère que la matière est chose concrète, ce qui pose d'autres problèmes que nous n'aborderons pas ici.
La force ***f*** est plus difficile à appréhender, elle renvoie à la cause du mouvement, définition que D'Alembert refusait, préférant éviter de parler de cause, notion considérée comme métaphysique[8]. Si on veut être concret, on peut parler de poussée ou d'effort, mais cela ne fait que repousser la question.
Quant à l'accélération ***a***, c'est une notion complexe qui représente la variation de la vitesse, laquelle est elle-même une notion complexe qui représente la variation de la position d'un corps en fonction du temps. Si on sait ce que veut dire "aller vite", la notion mécanique de vitesse est difficile et loin d'être concrète. En fait, c'est le calcul différentiel qui permet de définir vitesse et accélération et qui permet d'écrire l'équation fondamentale de la mécanique. Pour préciser tout cela il faudrait définir la vitesse moyenne et passer à la limite. Nous renvoyons aux ouvrages classiques de mécanique.
On peut donc considérer que l'équation fondamentale de la mécanique se situe en dehors de la question abstrait – concret. D'une part elle s'appuie sur des objets que l'on peut considérer comme abstraits au sens qu'ils ne relèvent pas de l'empirisme, d'autre part si ces objets abstraits sont issus d'un processus d'abstraction, celui-ci ne s'inscrit pas dans la définition de D'Alembert.
S'il faut parler d'abstraction, c'est moins cette équation qui importe que la notion de temps, mais cela pose un autre problème. Si la mécanique peut être définie comme la science du mouvement, l'étude du mouvement exige la définition d'un temps idéal, celui que Newton définit ainsi :

"Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equally without relation to anything external..."[9]

Peut-on considérer ce temps comme une abstraction, mais alors abstraction de quoi ? de la notion intuitive de durée ou de la notion plus élaborée du devenir des philosophes grecs. Cela demande d'aller regarder de près ce qui s'est passé lors de la Révolution Scientifique du XVIIème siècle.
Il faut tenir compte d'un autre élément lorsqu'on enseigne. Les élèves baignent dans ce temps abstrait qu'ils connaissent à travers les montres et les horloges. On appréhende aujourd'hui la notion de temps en apprenant à lire l'heure, autrement dit la connaissance du temps abstrait n'est précédée par aucune connaissance d'un temps qui serait concret, tout au plus peut-on parler de la mise en relation d'un sentiment de durée et du temps abstrait donné par les horloges.. C'est même ce temps abstrait qui peut être considéré comme concret par l'élève puisqu'il le connaît. On arrive ainsi à la meilleure définition du concret, le concret, c'est que

---

7 On peut renvoyer à la définition de choses des philosophes de Port Royal, cf. Arnauld et Nicole, *La logique ou l'art de penser*.
8 D'Alembert, *Traité de Dynamique*.
9 Isaac Newton, *Principia* , p.6.

qu'on connaît, ce dont on a l'usage. En contrepoint, l'abstrait c'est ce qu'on ne connaît pas, et par extension, ce qu'on ne comprend pas. On retrouve ainsi le langage usuel.

la géométrie

Enfin nous aborderons la géométrie élémentaire rappelant que celle-ci est une science physique comme l'explique Clifford[10]. Si on considère que la géométrie est l'étude des corps solides du point de vue de la forme et de la grandeur, la première question qui se pose est celle de reconnaître si deux corps solides ont même forme et même grandeur, ce qui se montre empiriquement en superposant les corps. On dit alors que les corps sont égaux. C'est cela qui fonde le principe de l'égalité par superposition tel qu'Euclide l'énonce dans ses *Eléments* et que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

Deux corps que l'on peut superposer sont égaux.

Mais si la vérification de la superposition de deux plaques planes est facile, il est plus difficile de superposer deux cubes en bois dont les côtés sont égaux ou deux sphères en bois de même diamètre. Cela conduit à rechercher des critères de superposition qui permettent de dire, sans avoir besoin de le vérifier empiriquement que deux corps sont égaux. C'est le rôle des classiques cas d'égalité des triangles qui apparaissent ainsi comme fondateurs de la géométrie rationnelle[11]. On peut alors, par le seul raisonnement déductif, montrer les diverses propriétés des corps solides.
Ici l'abstraction ne se réduit pas à la seule définition de D'Alembert. Si la question du même (même forme et même grandeur) renvoie à la définition de D'Alembert, la recherche de critères rationnels, c'est-à-dire reposant sur le seul discours, contribue à la mise en place du processus d'abstraction. Contrairement à l'idée platonicienne qui affirme qu'en géométrie on travaille sur des objets idéaux, c'est parce qu'on raisonne sur des objets issus de la connaissance empirique que ceux-ci prennent le statut d'objets idéaux. L'abstraction se construit ici *via* le raisonnement. On peut alors "oublier" l'origine empirique de la géométrie élémentaire pour la présenter comme une science purement rationnelle. C'est ce caractère de pure rationalité qui a fait de la géométrie élémentaire le modèle emblématique de toute science susceptible d'un développement hypothético-déductif, en particulier la physique. Mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler.
Revenant à l'enseignement, on voit alors le rôle que joue le raisonnement dans l'enseignement des mathématiques. Evidemment il ne s'agit pas de donner d'emblée des démonstrations à la mode euclidienne ou hilbertienne mais de montrer, dès que c'est possible, y compris à l'école élémentaire, des modes de raisonnements qui conduisent à la découverte de nouvelles propriétés[12].
La question de l'abstraction dans l'enseignement est donc multiple et se définit en fonction des contenus enseignés.

En guise de conclusion

Nous n'avons abordé ici la notion d'abstraction qu'à travers les sciences et l'enseignement des sciences. Il faudrait regarder du côté des lettres et des enseignements littéraires pour comprendre comment se joue la multiplicité des formes d'abstraction. Si on peut présenter les

---

[10]William K. Clifford, *the commun sense of the exact sciences*, p. 43. Sur le caractère physique de la géométrie nous renvoyons à notre article "La géométrie élémentaire, une science physique ?".
[11]Rudolf Bkouche, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles".
[12]Rudolf Bkouche, "Du raisonnement à la démonstration".

objets littéraires, un poème, un roman ou un essai par exemple, de quoi ces objets sont-ils l'abstraction si on peut considérer de tels objets comme des abstractions ? On est bien loin ici de la définition de D'Alembert.

On pourrait multiplier les exemples, que ce soit en philosophie ou dans ce qu'on appelle aujourd'hui les sciences de l'homme. Ce n'est pas ici le lieu d'aborder ces questions. Nous nous contenterons de rappeler un fait de vocabulaire.

Jusque dans les années cinquante on considérait, dans l'enseignement secondaire, que les classes terminales scientifiques (mathématiques élémentaires, sciences expérimentales, mathématiques et technique) étaient réservées aux esprits tournés vers le concret alors que les amateurs d'abstraction s'orientaient vers la classe de philosophie. Ainsi les disciplines scientifiques étant considérée comme concrètes par opposition aux disciplines littéraires ouvertes vers la spéculation intellectuelle ? Il a fallu la réforme dite des mathématiques modernes pour considérer, dans l'enseignement, que les mathématiques sont une discipline abstraite, comme si les mathématiques étaient devenues abstraites avec la révolution formaliste. Tout cela pour rappeler combien la distinction "abstrait – concret" peut devenir un piège langagier.

Bibliographie

Jean Le Rond D'ALEMBERT, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), "Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française", Fayard, Paris 1986.

Antoine ARNAULD et Pierre NICOLE, *La Logique ou l'Art de Penser* (1662, cinquième édition 1683), Introduction de Louis Marin, "Champs", Flamarion, Paris 1970.

Rudolf BKOUCHE, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles", *Bulletin de l'APMEP* n°430, septembre-octobre 2000, p. 613-629.

Rudolf BKOUCHE, "La démonstration : du réalisme au formalisme", in *La Démonstration, Mathématiques et Philosophie*, coordonnée par Michèle Villetard-Tainmont, IREM de Lille, avril 2003, p. 55-83.

William K. CLIFFORD, *The common sense of the exact sciences*, (posthume 1885) Dover, New York 1955.

Isaac NEWTON, *Principia*, Motte's translation revised by Cajori (2 volumes), University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1934/1962.

P.F. STRAWSON, *Analyse et Métaphysique* (une série de leçons données au Collège de France), "Problèmes et Controverses", Vrin, Paris 1985.