Résumé sur la notation « *de la multiplication de base* »

[Complément à la partie II « Petits documents sur l'écriture des opérations » de http://michel.delord.free.fr/mult2005.pdf (Août 2005)]

C'est-à-dire celle qui correspond à la réponse au problème « *Quel est le prix de 5 kg de pommes à 3€ par kg ?* »

Ce que défend SLECC est explicitement, dans le texte de SLECC de 2004 repris pour la DESCO, et en opposition avec ce qui se dit depuis 35 ans, le principe suivant :

> *« **Bases du calcul sur les grandeurs et de l'analyse dimensionnelle** (donnant notamment une semi-méthode de résolution des problèmes et de vérification de cohérence de la solution.) »*

c'est-à-dire que ce principe ne défends pas une notation particulière de la multiplication[1] mais défends tous les types d'enseignement qui respectent ce principe.

Cette position sert aussi à contrer la position défendue par l'APMEP et que l'on va retrouver très bientôt dans les IUFM comme application des documents d'accompagnement des programmes sur les grandeurs, position qui réduit cette question à une question d'écriture (« *Faut-il écrire les unités dans les opérations ?* » Article de Rémi Duvert), ce qui est, parmi les mille et une façons de ne pas instruire les enseignants (qui, ainsi, ne peuvent ainsi pas instruire les enfants), une nouvelle manière de ne pas réfléchir en réduisant tout à des formules. La meilleure façon de montrer qu'il ne s'agit pas d'une question d'écriture et de réduction à une seule forme d'écriture, *même si l'écriture est bien une matérialisation de la pensée*, est de montrer qu'il y a plusieurs écritures qui sont valides, y compris celle que j'ai eu comme élève, sans écriture des unités dans les opérations, mais qui faisait faire impérativement un raisonnement dimensionnel (qui ressemble un peu à celle recommandée par Tannery). Ceci dit, chacune de ces écritures correspond à une logique disciplinaire qui n'est que partiellement donnée ici.

A) Mathématiques modernes *(id est depuis 1970)*

Pas de définition de la multiplication en termes de grandeurs, pas de distinction multiplicande / multiplicateur, mais surtout **pas de raisonnement dimensionnel**

Rédaction de la solution (au mieux):

Prix payé : 15€ 5 × 3 = 15 ou 3× 5 = 15	ou	Prix payé : 5 × 3 = 15 ou 3× 5 = 15 Le prix à payer est 15 €.	ou	Prix payé, en €* : 5 × 3 = 15 ou 3× 5 = 15

* Ce qui est remarquable ici est que quasiment la même écriture que Tannery *infra* corresponde à un enseignement complètement différent.

B) Les écritures proposées de 1880 à 1970

Plusieurs notations coexistent qui toutes respectent le principe défendu par SLECC

> *- enseignent les bases du calcul sur les grandeurs et de l'analyse dimensionnelle*
> *- font notamment la différence entre multiplicande (nombre répété) et multiplicateur (nombre qui se répète), le produit représentant une grandeur du même type que le multiplicande(même si l'unité n'est pas écrite)*

c'est-à-dire que, pour toutes les notations suivantes, c'est le même raisonnement de vérification qui est fait qui est en gros le suivant :*

[1] Quelle que soit l'opinion de chacun : la mienne étant une préférence pour l'introduction de l'écriture 5€ × 3 = 15€ au moins à partir du CE, (avec, comme formation théorique / disciplinaire *pour les enseignants*, la justification logique des « autres multiplications »donnée dans le texte d'août 2005), mais ceci est en quelque sorte annexe par rapport à l'objet de ce texte qui est de faire un inventaire des notations possibles.

On demande un prix. Les deux nombres de départ représentent un prix et un poids, c'est-à-dire des grandeurs qui ne sont pas de même nature, on ne peut donc ni les additionner ni les soustraire. La multiplication avec le prix unitaire comme multiplicande et le nombre de kg comme multiplicande donne bien un prix.

** Hors du fait, dans ce cas pris comme illustration, que cet exercice tombe dans le cadre de la relation « Prix unitaire × nombre d'unités = Prix total »*

*
* *

Ceci dit, voici un résumé des principales notations employées de 1880 à 1970 (il y a d'autres variantes mais j'ai repris seulement les principales), principales notations présentées sans leurs justifications et sans les placer dans le cadre de progressions.

a) Notation sans utilisation des unités :

Exemple 1 : Notation du multiplicande en première place : 3 fois 5 se note 5 × 3 , 3 multiplié par 5 se note 3 × 5

Rédaction de la solution :

Prix payé : 15€
5 × 3 = 15
Le prix à payer est 15 €.

Exemple 2 : Notation recommandée par Jules Tannery

Pour le problème :

> Un pré rectangulaire de 100 mètres de long sur 45 mètres de large a produit 240 kilogrammes de foin par are. On demande quelle est la valeur de la récolte de ce pré, sachant que le foin vaut 7 fr. 50 le quintal?

A la solution

> *Surface du pré : 160 m. × 45 m. = 7.200 mètres carrés ou 72 ares.*
> *La production en foin est de 240 kgr. × 72 = 17. 280 kilogrammes ou 172 quintaux 8.*
> *La valeur de la récolte est de 7 fr. 50 × 172,8 = 1.296 fr.*

il préfère

Dimensions du pré rectangulaire, en mètres	*160 × 45*
Surface du pré en mètres carré	*160 × 45 = 7.200*
Production moyenne de foin, en kilogrammes, par are	*240*
Production moyenne de foin, en kilogrammes, par mètre carré	*2,4*
Production totale de foin, en kilogrammes	*2,4 × 7.200 = 17.280*
Prix du quintal de foin, en francs	*7,50*
Prix du kilogramme	*0,075*
Valeur de la récolte, en francs.	*0,075 × 17.280= 1.296*

pour les raisons données dans les pages 18 à 22 de *L'enseignement de l'arithmétique* dans *Science et philosophie. Cf.* http://michel.delord.free.fr/tan-sp.pdf

b) Notation 1€ ×…

« *Je cherche des € dans une multiplication, donc je commence par écrire 1€ ×…* »

Rédaction de la solution :

Prix payé :
1€ ×5 × 3 = 15€

c) Notation 5€ × 3

Attention, faute valable aussi pour la notation a) : dans ce cas, dire «*Je cherche des €, donc je commence par des € …* » avant d'avoir expliqué pourquoi on choisit une multiplication est l'apprentissage d'un raisonnement faux..

Rédaction de la solution :
Prix payé :
5€ × 3 = 15€

d) Notation *5€/kg × 3 kg* (introduite à partir de la notation *c)* comme je l'ai fait dans le texte cité)

Rédaction de la solution :
Prix payé :
5€/kg × 3 kg= 15€

e) Position d'Elie Cartan en 1935
En rouge, crise cardiaque à l'APMEP. En bleu, ce qui me semble un raisonnement fondamental.

> « ***59— Remarque sur la multiplication des nombres concrets.*** — Dans les problèmes, les nombres qui interviennent sont presque toujours des, nombres concrets. Quelle est la signification du produit ? Très souvent, le multiplicateur doit être considéré comme un nombre abstrait, et le produit représente, soit des objets de même nature, soit des grandeurs de la même espèce que le multiplicande.
> **EXEMPLES :** *Un cahier coûte* 35 *centimes. Combien coûtent 7 cahiers ?*
> La réponse est : 35 × 7 = 245 centimes.
> *Un tisserand met 54 minutes pour tisser* 1 *mètre de toile. Quel temps mettra-t-il pour tisser 6 mètres de cette toile ?*
> La réponse est : 54min × 6 = 324 minutes.
> Dans ces deux exemples, les multiplicateurs 7 et 6 perdent leur signification concrète et indiquent les nombres de fois qu'il faut répéter les multiplicandes 35 et 54. Le premier produit 245 exprime, de même que le multiplicande, une somme évaluée en centimes ; le deuxième produit 324 exprime, ainsi que le multiplicande, une durée évaluée en minutes.
> Il est des cas où la signification concrète du produit **dépend** de celle des deux facteurs. Nous y reviendrons plus **loin. »**

f) Notation recommandée par les IO de 1945 (Voir *infra* pour la notation *g)* qui en est dérivée)

Quand les élèves notent une multiplication, dans leur solution, il leur est utile de rappeler la signification concrète de chaque nombre. Par exemple, ils pourront écrire

(f par kg)		*(kg)*	
75	×	*5*	*= 375 francs ;*
(f par heure)		*(heure)*	
25	×	*42*	*= 1050 francs ;*

Le signe × comme le signe + et le signe – n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs.

g) Notation *5€ par kg × 3 kg* ou ***5€ le kg × 3 kg*** (Conception défendue, comme application des IO de 45, dans le livre « Enseignement de l'arithmétique » dirigé par Albert Chatelet)

Rédaction de la solution :

Prix payé :
5€ par kg × 3 kg= 15€

Pour les arguments en faveur de cette notation, voir les textes récemment publiés à partir du travail de Virginie Cadec[2] et en particulier le Chapitre « *Remarques sur l'enseignement de la multiplication et de la division* »[3] dont une partie est en annexe.

06/04/06
MD

Annexe

Remarque : les notations f) et g), celle des IO de 45 et celle proposée par Chatelet signifient la disparition de la notation c). En ce cas , il est utile de comparer ce qui est en bleu dans la citation supra de E. Cartan et ce qui est en bleu dans la citation infra.

Extraits de « *Remarques sur l'enseignement de la multiplication et de la division* »

[…]

II. NOTATION DE LA MULTIPLICATION

1 - NOTATION CONCRÈTE

A la notation des Instructions de 1945 :

le kg *kg*
90 F × *7,5* =

nous avons préféré l'écriture plus hardie et plus aisée aussi à placer dans un cahier d'écolier et d'ailleurs conforme à la circulaire de 1952) :

90 F le kg × 7,5 kg = 675 F.

Par comparaison avec la notation traditionnelle, nous voyons que la formule proposée donne
1 - Aux deux facteurs leur signification concrète, et non au multiplicande seulement.
2 - Au multiplicande le sens d'une valeur à l'unité qu'il possède dans tous les cas.

Exemples :

7,8 kg par dm^3 × 1,4 dm^3 =
144 plumes par boîte × 6 boîtes =
125 F de l'heure × 210 heures =
750 F par m^2 x 435 m^2 =

Remarquons dès à présent que les quelques exemples ci-dessus permettent de deviner immédiatement les données et la question qui conduisent à chaque opération. La multiplication indiquée a donc un sens complet et précis, si bien qu'elle peut être proposée à l'élève qui devra trouver non seulement le produit - concret, - mais aussi l'énoncé du petit problème qu'il vient de résoudre. (Voir le *Calcul en Classe de fin d'études*, III, IO.)

2 - AVANTAGES DE LA NOTATION

a) On sait que les enfants - exception faite des mieux doués - répugnent à l'effort d'imagination qu'il faut faire pour se représenter concrètement les données d'un problème. Ils raisonnent sur des nombres abstraits qui n'ont

[2] http://michel.delord.free.fr/chatelet/chatelet-arithm.html
[3] http://michel.delord.free.fr/chatelet/chat-multdiv.pdf

pas le pouvoir de stimuler ou de diriger la recherche et ne résistent en aucune façon aux opérations absurdes. Obliger un enfant à écrire :

$$28 \text{ F le m}^3 \times 58 \text{ m}^3 =$$

c'est l'obliger à penser que c'est parce que le m^3 de gaz coûte 28 F et qu'on en a consommé 58 m^3 que la dépense sera...

b) L'inversion de l'ordre des facteurs, trop souvent tolérée sous prétexte qu'elle ne modifie pas la valeur numérique du produit, constitue une erreur de raisonnement; plus exactement, elle révèle que l'opération a été posée sans réflexion, sans retour aux éléments concrets du problème, l'intuition née d'une longue pratique intervenant à peu près seule.
Nous pouvons affirmer que cette habitude défectueuse se corrige en quelques semaines chez tous les élèves par l'emploi d'une notation explicite.

c) Il s'établit entre les unités des facteurs et du produit une correspondance qui devient sensible à l'énoncé, même mental, de la multiplication :

$$28 \text{ F le m}^3 \times 56 \text{ m}^3 = 1568 \text{ F}.$$

L'erreur qui consiste, par exemple, à multiplier le prix du quintal par le poids en tonnes, ou la vitesse à l'heure par un temps exprimé en minutes, devient apparente et choque l'élève :

$$2\,200 \text{ F le quintal} \times 3{,}7 \text{ tonnes} =$$

$$14 \text{ km/h} \times 35 \text{ mn} =$$

Ce genre de faute disparaît complètement et très vite.

[…]

4 - OBJECTIONS ET RÉPONSES

La multiplication - dira-t-on - est une addition de plusieurs nombres égaux; l'un de ces nombres est concret, c'est le multiplicande. Le nombre des termes de cette addition est représenté par le multiplicateur. Celui-ci ne saurait porter une indication d'unité, il est nécessairement abstrait. Soit, et c'est là l'argument qui conduit à la forme traditionnelle :

$$90 \text{ F} \times 7 =$$

Mais :

a) Dans la pratique, personne, même les plus petits de nos élèves, n'ont recours à cette définition. Il n'y a pas d'étage intermédiaire entre les données - par exemple prix du kg et poids - et la multiplication qui donne le prix total. Chacun pense immédiatement :

le prix total est égal au prix du kg × par le nombre de kg.

C'est précisément ce que dit la notation proposée. […]