

# Multiplication et division de fractions

## A) Connaissances nécessaires

### a) Propriétés des opérations

i) *Dans une multiplication, y compris de plusieurs nombres, pour multiplier ( ou diviser ) un produit par un nombre, il suffit de multiplier ( ou diviser ) un des facteurs du produit par ce nombre.*

$3 \times 10 \times 7$  est 2 fois plus grand que  $3 \times 5 \times 7$  ou  $3 \times 5 \times 7$  est 2 fois plus petit que  $3 \times 10 \times 7$   
 $3 \times 10 \times 7$  est le produit de  $3 \times 5 \times 7$  par 2 ou  $3 \times 5 \times 7$  est le quotient de  $3 \times 10 \times 7$  par 2

ii) *Si, dans une division, l'on multiplie le diviseur par un nombre, le quotient est divisé par ce nombre.  
Si, dans une division, l'on divise le diviseur par un nombre, le quotient est multiplié par ce nombre.*

Une fois la propriété expliquée, il est important de l'automatiser sous forme de calcul mental: « Sachant que  $14 : 25 = 0,56$ , combien vaut  $14 : 2,5$  ou  $14 : 250$  ? » ou « Sachant que  $364 : 14 = 26$  (écrit au tableau), combien vaut  $364 : 7$  ou  $364 : 28$  ? »

### B) Propriétés des fractions

#### **i) Le plus important**

.En s'appuyant en particulier sur le fait que  $\frac{3}{4}$  de G est équivalent à  $\frac{3}{4} \times G$  ( *infra*  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{5}{7}$  est équivalent à  $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$  ),

l'élève doit manipuler et comprendre\* **parfaitement** l'équivalence, **équivalence démontrée notamment par des manipulations**, entre les trois manières de comprendre  $\frac{a}{b} \times G$  (G étant une grandeur ou un nombre) c'est-à-dire

$$1) (G : b) \times a \quad 2) (a \times G) : b \quad 3) (a : b) \times G$$

\* c'est-à-dire pas seulement calculer bien que ce soit bien sûr indispensable.

ii) *Pour multiplier une fraction par un nombre, on peut,*

- soit multiplier le numérateur par ce nombre ( on prend 3 fois plus de parts sans en changer la taille):

$$3 \times \frac{7}{12} = \frac{3 \times 7}{12} = \frac{21}{12}$$

- soit -si c'est possible- diviser le dénominateur par ce nombre (on prend le même nombre de parts mais 3 fois plus grandes) :

$$3 \times \frac{7}{12} = \frac{7}{12:3} = \frac{7}{4}$$

iii) *Pour diviser une fraction par un nombre, on peut,*

- soit multiplier le dénominateur par ce nombre (on prend le même nombre de parts mais 3 fois plus petites)

$$\frac{12}{5} : 3 = \frac{12}{3 \times 5} = \frac{12}{15}$$

- soit -si c'est possible- diviser le numérateur par ce nombre (on prend 3 fois moins de parts sans en changer la taille) :

$$\frac{12}{5} : 3 = \frac{12:3}{5} = \frac{4}{5}$$

**B) Multiplication de fractions** Exemple: Calculer les  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{7}$  ou  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$

**1<sup>ère</sup> méthode** (A partir des propriétés des fractions et de la multiplication )

Comme  $\frac{3}{4}$  est 4 fois plus petit que 3,  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$  est 4 fois plus petit que  $3 \times \frac{2}{7}$ .

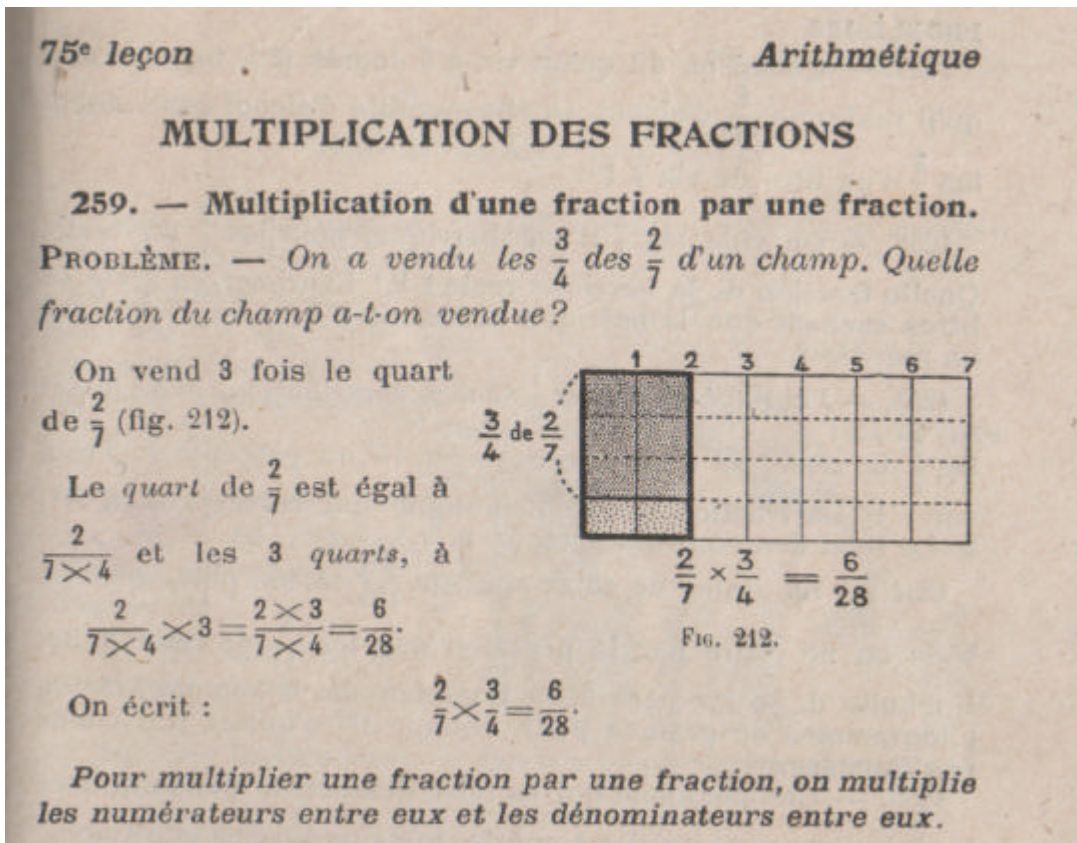
On sait calculer  $3 \times \frac{2}{7}$ ,  $3 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7}$ . , Donc  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 4}$  : 4.

Donc  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 4} : 4 = \frac{3 \times 2}{7 \times 4} \left( \frac{6}{28} \right)$

**2<sup>ème</sup> méthode** ( Graphique )

$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{2}{7} = \frac{8}{28}$								
$\frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{28}$								
$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28}$								

**3<sup>ème</sup> méthode** (Utilisation de l'aire du rectangle)



Royer et Court Arithmétique Armand colin 1927

<p><i>Le produit de deux fractions est une fraction dont</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- le numérateur est le produit des numérateurs des fractions de départ</li> <li>- le dénominateur est le produit des dénominateurs des fractions de départ</li> </ul>	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
---	--

### C ) Division de fractions

Exemple: Calculer  $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$

1<sup>ère</sup> méthode (A partir des propriétés des fractions et de la division )

Comme  $\frac{3}{4}$  est 4 fois plus petit que 4,  $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$  est 4 fois plus grand que  $\frac{5}{8} : 3$ .

Mais  $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8 \times 3}$ , donc  $\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8 \times 3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{8 \times 3} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3}$

2<sup>ème</sup> méthode

81<sup>e</sup> leçon Arithmétique

**DIVISION DES FRACTIONS  
ET DES NOMBRES FRACTIONNAIRES**

**271. — Division d'une fraction par une fraction. —**  
**PROBLÈME.** —  $\frac{3}{4}$  de mètre de ruban ont coûté  $\frac{5}{8}$  de franc  
Quel est le prix de 1<sup>m</sup> de ruban?

Ce problème est analogue au suivant : 3<sup>m</sup> de drap valent 150<sup>f</sup>; quel est le prix de 1<sup>m</sup> de drap? Le prix de 1<sup>m</sup> de drap est de 150<sup>f</sup> : 3. Le résultat s'obtient par une simple division. Il en est de même avec les fractions.

Le prix de 1<sup>m</sup> de ruban est de  $\frac{5}{8}$  de franc :  $\frac{3}{4}$

Si 3 quarts de mètre valent  $\frac{5}{8}$  de franc,

1 quart de mètre vaudra 3 fois moins ou :  $\frac{5}{8 \times 3}$  de franc.

Et 1<sup>m</sup> ou 4 quarts de mètre vaudront 4 fois plus que 1 quart de mètre ou :

$$\frac{5}{8 \times 3} \text{ de franc} \times 4 = \frac{5 \times 4}{8 \times 3} \text{ de franc.}$$

Ce qui correspond au produit :  $\frac{5}{8} \times \frac{4}{3}$ .

On a donc :  $\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{8 \times 3}$

*Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

3<sup>ème</sup> méthode ( Utilisation de la réduction au même dénominateur )

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} : \frac{4 \times 7}{4 \times 5}$$

mais comme le quotient ne change pas si on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par le même nombre, ici 4x5,

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 5} : \frac{4 \times 7}{4 \times 5} = (3 \times 5) : (4 \times 7) = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

Un inconvénient de cette introduction mal enseignée est que les élèves se croient obligés de réduire au même dénominateur pour effectuer une division<sup>1</sup> et donc, finalement, pour toutes les opérations.

M 04/03/06

## Annexe

Une présentation correspondant plus au niveau sixième : sur la base de la connaissance intuitive accumulée précédemment, elle permet de définir de manière plus abstraite la division des fractions. C'est ainsi que l'on pourra *ensuite* aborder la notion d'inverse d'un nombre qui, présentée *ex-abrupto*, n'a aucun sens pour les élèves.

Tiré de : Anna et Elie Cartan, *Arithmétique, Classe de 6<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup>* Armand Colin, 1935.

### IV . - Division des fractions

Lorsque nous avons étudié la division des nombres entiers nous avons vu que, le plus souvent, il n'existait pas de quotient exact de ceux nombres ; on se contentait, dans ce cas de retrouver un quotient approché.

Nous allons montrer que l'introduction des fractions permet de trouver le quotient exact de deux nombres, quels que soient ces nombres.

**160. - Définition générale.** - *Le quotient de deux nombres, entiers ou fractionnaires, est un troisième nombre dont le produit par le deuxième soit égal au premier.*

Le premier nombre s'appelle le *dividende* ; le deuxième est le *diviseur*.

**161. - Division d'un nombre, entier ou fractionnaire, par une fraction.** Nous allons justifier la règle suivante.

**162. - RÈGLE :** *Pour diviser un nombre par une fraction, on multiplie le dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit à diviser  $\frac{3}{4}$  par  $\frac{5}{11}$ . D'après la définition, il s'agit de trouver un nombre entier ou fractionnaire, qui, multiplié par  $\frac{5}{11}$  donne pour produit  $\frac{3}{4}$ . Je dis que le résultat est la fraction :  $\frac{3}{4} \times 11/5 = \frac{3 \times 11}{4 \times 5}$

En effet, si on multiplie la fraction  $\frac{3 \times 11}{4 \times 5}$  par le diviseur  $\frac{5}{11}$ , on obtient :

$$\frac{3 \times 11}{4 \times 5} \times \frac{5}{11} = \frac{3 \times 11 \times 5}{4 \times 5 \times 11} = \frac{3}{4}$$

car on peut simplifier la fraction obtenue, en divisant ses deux termes par  $11 \times 5$ . Or,  $\frac{3}{4}$  est le dividende.

Donc, la règle est exacte.

**163.- Remarque.-** La division da fractions permet de résoudre, tout comme la division exacte des nombres entiers, des problèmes concrets analogues à celui-ci.

Problème . Les  $\frac{3}{4}$  de 1 mètre d'étoffe coûtent  $\frac{17}{5}$  de franc; Quel est le prix du mètre ?

Il suffit de diviser  $\frac{17}{5}$  par  $\frac{3}{4}$  parce que, si l'on connaissait le prix du mètre d'étoffe, en multipliant ce prix par  $\frac{3}{4}$ , on trouverait  $\frac{17}{5}$ ; le résultat est donc un nombre tel que son produit par  $\frac{3}{4}$  est égal à  $\frac{17}{5}$ . Ce nombre est, par définition, le quotient de  $\frac{17}{5}$  par  $\frac{3}{4}$ .

---

<sup>1</sup> **Attention** : dans ce cas, il faut donc prendre garde à ce que l'élève ne confonde pas cette démonstration avec une règle de calcul (« Maître, il faudra refaire tout ça à chaque fois ? »); c'est un peu le même problème que l'introduction de la division comme soustraction répétée, qui est probablement la meilleure, qui ne doit pas être confondue avec l'algorithme de la division. Cette réaction « Maître, il faudra refaire tout ça à chaque fois ? », qui est loin d'être idiote, est maintenant caractéristique de l'écrasante majorité des élèves de sixième à qui, dans le meilleur des cas, on a donné des formules sans jamais les justifier par des démonstrations ( et aussi de pas mal d'élèves de cinquième et de quatrième ...)