Les Mathématiques et la réalité :
Essai sur la méthode axiomatique
Ferdinand Gonseth 1936

Réédition: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris,1974.
Extraits : Pages 127-139

CHAPITRE VI :LA NATURE DU NOMBRE ENTIER

40. Indications préliminaires renouvelées.

Nous avons vu les notions géométriques évoluer depuis les images mentales et schématiques de certaines réalité du monde physique, de ce que nous voulons aussi nommer le *monde naturel*, jusqu'aux notions abstraites et dépouillées de la logique. II nous faut maintenant noua efforcer d'aborder au plan du logique sur un plus large front, sur un front aussi large que possible. L'analyse de la notion de nombre entier va maintenant nous fournir l'occasion de traverser en profondeur le domaine spécifiquement arithmétique ; plus tard les notions d'objet, de propriété, de classe, etc., les notions « tous », « chacun », etc., nous entraîneront à travers la logique traditionnelle dans la même pérégrination de l'intuitif vers le logique pur.

Mais qu'il soit encore une fois bien entendu qu'en évoquant l'idée du « logique pur » dans les phrases précédentes, nous ne lui accordons aucunement un sens prédéterminé, une existence préformée. Les mots « le plan du logique »ou « la logique pure » n'ont pas de signification d'ores et déjà complètement acquise et fixée : la signification leur vient justement par l'emploi que nous en faisons. En d'autres termes, le processus de l'axiomatisation ne se définit pas en fonction de la notion prédonnée du logique; sa signification ne vient pas s'accrocher à l'essence déjà parfaite de cette dernière. C'est au contraire le processus d'abstraction qui définit, en la suggérant, en l'évoquant, en la créant, l'essence du logique pur, essence imparfaitement déterminée et encore en état de devenir.

41. L'intuition du nombre.

On peut distinguer dans l'évolution du concept de nombre entier au moins trois époques assez distinctes : la première précède toute tentative consciente de systématisation; la deuxième l'époque spécifiquement arithmétique - se caractérise par une formulation explicite de *la théorie des nombres entiers* ; la troisième seulement aborde au plan du « logique ». Le passage d'une époque à l'autre s'accompagne d'une transformation profonde de l'essence même du nombre. (L'emploi du mot « essence » appellerait naturellement des remarques analogues à celles qui précèdent, concernant l'idée du logique pur!)

Examinons tout d'abord comment le nombre se présente dans la première époque, *dans l'époque intuitive*.

La notion de nombre se fonde sur une faculté de notre être mental : celle d'enregistrer la répétition d'une impression sensorielle, d'une action ou même d'une intention, en un mot d'enregistrer la répétition d'un moment de conscience. La faon la plus abstraite de concevoir un moment de conscience de ce genre correspond peut-être à la notion de *bi-unicilé*, notion sur laquelle Brouwer fonde l'intuition des nombres, et qu'on pourrait apercevoir « réalisée » dans l'instant fugitif où une impression fait place à son souvenir. Cet enregistrement, d'ailleurs, est loin d'être un phénomène mental simple ; loin de ressembler à ce qu'on pourrait appeler un phénomène mental élémentaire. Chez l'homme adulte et chez l'enfant, à partir d'un certain âge, le cadre plus ou mois identique à lui-même et prêt à conserver la trace de la répétition, la cire mentale où le burin de la conscience trace les marques que la mémoire protégera, c'est la *forme intuitive du temps*. (Nous nous sommes déjà expliqué en détail sur notre conception des formes intuitive Et nous ne croyons pas nécessaire d'y revenir ici.)

Cet enregistrement, encore une fois, n'est pas un phénomène simple. On y distingue au moins deux moments complémentaires l'un de l'autre et même, en un certain sens, contradictoires. D'une part, pour être comptées, les «choses » qui parviennent successivement à notre conscience doivent être reconnues comme étant, d'une façon ou d'une autre, de la même nature. Ce seront peut-être, en allant vers une identité progressive : « Trois sensations » ou « trois sons » ou « trois sons de cloche » ou « trois sons de la même cloche » , etc. Ou bien en allant vers une identité décroissante : « Deux cahier bleus », « deux cahiers », « deux objets », etc. L'énumération s'accompagne donc - et probablement de façon indissolublement conjointe - d'une typification, d'une répartition en classes et sous-classes, de telle façon que deux éléments de la même classe puissent être inscrits dans la mémoire comme équivalents.

D'autre part, l'inscription dans la mémoire se fait par l'intermédiaire d'une série d'images ou d'impressions (sonores, visuelles, tactiles, etc.) qui doivent pouvoir être reconnues individuellement, et qui, par conséquent, doivent pouvoir être aperçues comme toutes différentes les unes des autres. Ces images peuvent être fournies par les doigts de la main, par des objets occupant des endroits différents, ou par les mots un, deux, trois, etc., ou par les signes 1, 2, 3, etc., ou par telle autre suite de symboles que l'on voudra. En un mot, pour être comptés, les objets doivent être considérés à la fois comme identiques et comme différents!

Ces remarques montrent bien que, dans l'énumération effective, la forme *temps* n'intervient pas isolément ; les autres formes, et surtout la forme espace, y coopèrent de la faon la plus efficace. Ceci deviendra encore plus évident dans un instant lorsque nous parlerons de la genèse de la notion de nombre chez l'enfant.

II y a d'ailleurs encore une remarque essentielle à présenter: C'est qu'on ne sait compter un certain nombre d'objets que si l'on sait aussi les placer dans un certain ordre de succession, où chaque objet n'intervienne qu'une fois. Et que cet ordre doit être porté par l'esprit dans la catégorie à énumérer. Vous vous en convaincrez, par exemple, par l'expérience suivante : Formez avec cinq pions identiques une file bien régulière, et demandez à un petit enfant de les compter en les touchant. Cet enfant, admettons-le, saura déjà répéter la suite des nombres de un à cinq sans se tromper. Cela ne l'empêchera pas de toucher les pions au hasard, sans s'apercevoir de l'ordre déjà préparé qu'il aurait dû respecter et sans se souvenir des pions qu'il aura déjà une fois touchés. En un mot, il ne sait pas encore ce que c'est qu'un ordre de succession, qu'un ordre linéaire. Il est curieux de constater que la mémoire a déjà enregistré cet ordre avant que l'esprit l'ait conçu.

Ce qui précède se rapporte surtout aux nombres ordinaux ; mais il est clair que les nombres cardinaux se prêtent aussi à des considérations du même genre. Il y a un fait d'expérience qui conduit au delà du cadre de la numérotation pure et simple : c'est qu'ayant à compter, c'est-à-dire à numéroter un groupe d'objets, je puis à mon gré changer l'ordre et la position de ces objets : je n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat final. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : *leur nombre*. Et il y a un véritable mouvement de la pensée à dire, par exemple, que certains objets sont au nombre de six, parce qu'ils peuvent être numérotés de un à six.

On pourrait dire aussi que la notion de nombre cardinal est fondée sur la possibilité d'établir entre les nombres ordinaux et les objets d'une catégorie finie une correspondance parfaitement univoque et qui se conserve à travers tous les dérangements des objets envisagés. Cette possibilité *contient un fait d'expérience irréductible*. D'ailleurs, il faut aussi observer que l'on ne nomme « *objets* » que des « choses » qui présentent la propriété dont il vient d'être question, de telle sorte que les notions d'objet et de nombre apparaissent liées dans l'intuitif.

42. Le sens primitif du nombre.

L'observation du développement de la notion de nombre chez l'enfant confirme pleinement tout ce que nous venons de dire. Ce qui frappe tout d'abord, c'est combien elle est tardive, et combien elle a peine à se dégager de ses supports intuitifs. Le nombre « trois », par exemple, reste associé à la sensation du pouce, de l'index et du majeur tendus dans la position démonstrative que l'on sait; à l'acte de prononcer l'un après l'autre les mots : un, deux, trois ; au souvenir d'un groupe familier de trois objets ; et plus tard au son du mot trois, à l'image visuelle des signes 3 ou III, etc. Ce n'est que peu à peu que l'esprit en abstrait l'idée du nombre pur, en laissant tomber dans l'oubli tout ce qui ne relève pas de sa fonction énumérative. Qui pourrait d'ailleurs affirmer que la notion abstraite continuerait à subsister, si le support constant du concret venait à lui manquer ?

Il est encore plus instructif de remonter plus haut encore dans le développement des facultés mentales de l'enfant, jusqu'avant le moment où la notion de *deux* paraît s'être distinctement précisée. I1 semble bien que la conception de l'unité en opposition avec la pluralité accompagne et couronne l'effort d'abstraction qui mène à la conception de l'unité de l'objet à travers la multiplicité de ses aspects et des impressions qui s'y rapportent. D'autre part, pour que l'objet puisse être identifié avec lui-même dans ses déplacements, ou malgré les déplacements de l'enfant qui l'observe, il faut qu'il puisse être localisé par rapport à ce dernier. Il faut donc que l'enfant possède déjà les premiers éléments de son groupe expérimental de déplacements.

En résumé, il semble bien qu'on puisse distinguer dans le développement de l'enfant un stade très primitif où ni l'opposition avant-après, ni la notion de l'objet, ni la notion de l'unité et de la pluralité, ni la notion de l'espace ne se sont encore dégagées de leur limbes. En liaison intime les unes avec les autres, dans une genèse assez lente, elles se dégagent et se constituent, donnant naissance en même temps aux notions d'objet, d'unité et de pluralité ; aux formes intuitives du temps et de l'espace ; à l'idée de l’ordre de succession temporel et de la configuration spatiale.

On voit combien la genèse d'une numération est un phénomène mental complexe ! Et combien nous sommes loin de la sèche et superficielle définition que voici: *Les nombres se déduisent tous de l'unité, par l'opération qui fait passer de tout nombre au nombre qui le suit immédiatement.*

Et d'ailleurs, une définition de ce genre définit au rebours du bon sens le plus simple par le plus compliqué car pour concevoir le passage de 1 à 2, et celui de 5 à 6 comme la répétition d'une seule et même opération, il faut avoir atteint un niveau d'abstraction dont l'enfant reste encore bien éloigné au moment où il vient d'avoir appris à se servir des six premiers nombres.

En définitive, le nombre apparaît au stade intuitif comme un caractère porté par l'esprit dans un ensemble très complexe d'impressions plus ou moins nettement perçues, résultant de l'action de l'objet sur le sujet et de l'emprise du sujet sur l'objet. Ce caractère est unificateur et schématisant, et merveilleusement approprié aux fins de l'action. Il est comparable à toute autre *qualité sensible*, telle que grand, jaune, ou pesant. Un groupe d'objets a la *qualité « trois »*, par exemple, comme l'un d'eux a peut-être la *qualité « rouge »* ou la propriété « d'être transparent ».

En un mot: *Le nombre, dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, est une qualité physique des groupes d'objets.*

43. La numération.

Pour poser les fondement d'une numération, il faut posséder une suite d'objets ou signes invariables, suite qui devra posséder les trois propriétés empiriquement nécessaires que voici :

a) Ces signes doivent pouvoir être distingués individuellement; en d'autres termes, ils doivent être tous différents ;

b) Il faut pouvoir les évoquer dans un ordre invariable ;

c) Il doit toujours être possible d'imaginer encore un nouveau signe, et de l'adjoindre à la suite des signes déjà choisis.

Ces postulats ne sont naturellement pas remplis d'eux-mêmes : il faut imaginer une méthode constructive qui engendre la suite des signes. En l'absence de cette méthode, l'affirmation :

« Après tout nombre, il y a un nombre qui le suit immédiatement », n'a pas de sens bien déterminé (Le nombre des grains de table d'Archimède!). On peut apercevoir une méthode de ce genre dans les suites que voici

	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII
ou	4	10	11	100	101	110	111	1.000	1.001
ou encore	I	2	3	4	5	6	7	8	9

Mais en l'absence de la description du procédé par lequel la suite peut être prolongée, de la clef du système, l'idée que la suite des nombres est infinie perd sa principale assise. En un mot :

L'idée générale de *système de numération* est un des fondements de l'idée abstraite de la *suite indéfiniment croissante de nombres entiers.*

Vue sous cet angle, celle-ci n'est pas un concept primitif : c'est une synthèse de notions plus proches de l'intuitif, moins facilement analysables, telles que «objet », avant », « après », « de nouveau », etc.

Quant aux règles et aux opérations de l'arithmétique, elles forment « une méthode dont le principe est d'ordre éminemment psychologique » (Helmholtz : Zahlen und Messen Wissenschattliche Abhandlungen, p. 359). Nous dirions plus volontiers : une méthode éminemment adéquate aux fins humaines. Elle a pour objet de connaître, pour s'en servir, la propriété des objets compliqués qui s'appelle le nombre. (Les premiers rudiments de l'enseignement de l'arithmétique ont un caractère nettement expérimental, ce qui est aussi la condition indispensable du succès !)

En un sens déjà plus élevé, elle a également pour objet de rechercher les combinaisons de signes ou de symboles par lesquelles s'expriment les propriétés - au sens empirique - de la numération. Voici, par exemple, la description de l'addition :

Imaginons deux exemplaires de la suite des signe numériques. Superposons aux signes du premier qui viennent après le signe a les signes du second, de 1 jusqu'à b. Le nombre du premier exemplaire sur lequel on s'arrête est alors a + b.

La formule suivante :

$$a + (b+ 1) = a + b + 1$$

exprime alors un fait d'expérience, connu jusqu'au sentiment de l'évidence ! (Cette formule apparaîtra dans un instant comme axiome fondamental.)

Et l'on pourrait de même interpréter les autres formules de l'arithmétique, de façon plus ou moins immédiate, comme de simples constatations dans lesquelles l'idée de vérité n'intervient pas de façon explicite.

44. Les axiomes de la suite des entiers.

On passe au stade arithmétique par une abstraction portant surtout sur la notion d'objet. Ainsi le nombre cinq, par exemple, est un caractère qui appartient, que nous savons attribuer, à tous les groupes de cinq objets. Dans cette phrase, l'explication du concept cinq à l'aide des mots « cinq objets » ne représente pas du tout un cercle vicieux ! Au contraire, le double emploi du mot cinq marque le passage de la représentation intuitive au concept abstrait. Ce n'est que si l'on prétendait faire de cette « description suggérante »une définition fournissant la construction logique du concept cinq, qu'il faudrait lui opposer les plus expresses réserves.

Le concept de nombre une fois dégagé, on peut lui imprimer le sceau de l'axiomatisation. IL ne faut pas chercher avoir dans cette première axiomatisation une tentative de créer de toutes pièces les bases de l'arithmétique. Au contraire, il faut admettre qu'un certain nombre de notions fondamentales sont claires par elles-mêmes et données avec toute la précision désirable. Les axiomes sont alors des énoncés dont le but est d'évoquer et de suggérer certaines opérations mentales par lesquelles nous mettons les concepts fondamentaux en relations les uns avec les autres. Ils forment un système complet si les opérations évoquées suffisent pour reconstruire à elles seules tout l'édifice arithmétique. Celui-ci est, *dès lors*, une construction mentale rationnelle et, axiomatiquement fondée. A cet endroit - et bien que ce soit une répétition - nous insistons encore sur le fait que, dans la phrase qui précède, le mot rationnel n'intervient pas avec une signification déjà parfaite, et constituée par avance. Ce qui précède, tout au contraire, lui confère une partie de son sens, le sens maximal et optimal n'étant jamais définitivement acquis.

Voici comment peut se présenter la schématisation axiomatique : Exigeons tout d'abord que l'acte de compter (de numéroter) soit possible indéfiniment. Ceci s'exprime par les axiomes suivants :

Axiome 1 : A chaque nombre a succède un nombre a' différent de a.

Axiome 2 : Seul le nombre 1 ne succède à aucun nombre.

D'autre part, le passage d'un nombre au successif les engendre tous de proche en proche. D'où le troisième axiome

Axiome 3 : Tout nombre succède, directement ou par intermédiaire, au nombre 1.

Ces trois axiomes ne suffisent pas encore. Aussi bien que pour la suite des nombres entiers,
1 2 3 4 5... ils sont aussi vérifiés par la suite
1 2 3 4 2 3 4... formée à l'aide de quatre nombres seulement. On peut appeler *isomorphes* deux suites satisfaisant à ces trois axiomes et telles que, si l'on descend parallèlement dans l'une et dans l'autre de successif en successif, on ne puisse retomber dans l'une sur un nombre déjà connu sans que ce soit aussi le cas pour les nombres correspondants de l'autre suite. On peut alors énoncer encore l'axiome suivant, qui exprime le fait que l'acte de compter reste constamment identique à lui-même.

Axiome 4 : La suite des nombres qui de proche en proche succèdent à un nombre a quelconque est isomorphe à la suite prise à partir de 1.

On peut reconnaître (Ces mots étant pris au sens ordinaire de la déduction mathématique) que toute suite qui satisfait à ces quatre axiomes est isomorphe à la suite des entiers 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10...
Nous renonçons à énoncer les axiomes relatifs à l'addition et à la multiplication.

45. L'essence du numérique.

Cette axiomatisation s'accompagne d'une analyse de la notion de nombre qui n'est pas sans valeur: Mais il ne faut pas en exagérer la portée. Dans tous les cas, les axiomes ne sont aucunement des décrets librement et arbitrairement formulés, avec l'intention et le pouvoir de conférer l'existence aux entités que sont les nombres.

En particulier (qu'on veuille se souvenir à cette occasion de notre analyse du géométrique) il y a dans la notion de nombre tout un côté que les axiomes ne touchent pas : c'est justement celui qui, dans l'exercice de la pensée, nous importe le plus ; celui qui se rapporte à l'idée de grandeur et que, par analogie avec le côté spécifiquement géométrique des notions spatiales, nous pourrions nommer le côté *spécifiquement arithmétique ou numérique.*
Pour mettre ce point en évidence, on peut appliquer une méthode analogue à celle dont nous nous sommes servis dans la discussion des axiomes de la géométrie. 11 suffit de donner un autre modèle où les axiomes du nombre soient réalisés. En voici un exemple extrêmement simple :

Considérons la suite des nombres pairs : 2 4 6 8...

Elle satisfait évidemment aux quatre axiomes de tout à l'heure. Introduisons en outre une addition et une multiplication. Par définition nous conservons l'addition au sens ordinaire, mais nous introduisons un nouveau produit, égal à la moitié du produit ordinaire. Avec ces conventions, toutes les opérations arithmétiques effectuables dans la suite des entiers trouvent un équivalent dans la suite des entiers pairs et réciproquement.

La suite de tous les entiers et la suite des entiers pairs seulement, considérées sous un certain angle apparaissent donc comme identiques, bien que considérées sous un autre angle nous sachions parfaitement reconnaître en quoi elles diffèrent. Elles ont donc à la fois quelque chose de commun et quelque chose de distinct. On peut, si l'on veut, dire qu'elles ont une structure identique,- mais encore une fois, ce mot de structure n'apporte pas du dehors une signification toute faite ayant un pouvoir explicatif bien arrêté. II fait image - ce qui est d'ailleurs le caractère essentiel et distinctif d'une désignation bien choisie, celle-ci proposant une nouvelle réalisation plus ou moins adéquate pour les abstraits à désigner. Mais, quant au reste, la notion de structure prend précisément son sens par sa mise en relation avec des considérations analogues aux précédentes.

La mise en évidence de cette structure, sous les espèces d'une structure logique, forme justement l'objet de la seconde axiomatisation, celle qui aborde à ce que nous nommons le plan du logique. C'est à ce moment que se perdront les caractères qui nous permettent encore de distinguer entre les différents modèles arithmétiques de même structure. Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, on voit maintenant que dans l'évolution des concepts du concret vers l'abstrait, le nombre n'est ni immédiat, ni définitif. Face au côté intuitif de notre connaissance, face en particulier à la notion d'objet, le nombre est un abstrait. Comme tel, il fonde son sens dans le concret (relatif) de ses réalisations. D'autre part, le système des nombres entiers se présente à son tour comme réalisation pour un abstrait ultérieur: par conséquent les nombres revêtent encore une forme, possèdent encore une essence qui se manifeste clairement dans le fait qu'on en peut faire abstraction. C'est cette essence sui generis, qui se rattache intimement à l'action de compter et à la notion de grandeur, et que nous avons proposé de nommer spécifiquement numérique, qui s'élimine par la seconde axiomatisation.

En somme, et comme il fallait s'y attendre, nous voyons se dessiner un tableau semblable presque en tous points à celui que nous avons tracé au chapitre IV : La notion de nombre entier ne doit pas être envisagée comme appartenant de prime abord à la sphère du logique pur. I1 faut tout d'abord qu'elle se dépouille. d'une certaine « forme » d'origine intuitive - cette notion de forme entrant ici, comme dans l'expression « L'espace est une forme de notre intuition », en opposition avec la notion de structure.

46. La seconde axiomatisation de l'arithmétique.

Voici maintenant comment se présente la seconde étape dans le processus d'abstraction, qui doit permettre d'envisager les relations entre nombres comme des « relations purement logiques ». On commencera par déclarer :

Les nombres sont des éléments idéaux qu'il sera commode de désigner par les chiffres 1. 2, 3, 4... où par les lettres a, b, c... Nous les imaginons tout d'abord sans propriétés aucunes. Nous imaginons ensuite qu'on puisse établir entre eux certaines relations logiques et nous décrétons que ces relations doivent, à elles seules, conférer aux nombres toute leur existence mathématique. Ces relations sont

a) Celles qui seront maintenant explicitement énoncées et qu'il faut prendre, autant qu'il est possible, à la lettre;

b) Leurs conséquences logiques.

Les énoncés a) doivent former un système complet d'axiomes et de définitions. En voici quelques-uns

1. L'un de ces éléments sera désigné par le symbole 1 et appelé un.

2. A toute paire de nombres a et b, on peut faire correspondre un nombre déterminé c. On dira que ce dernier est la somme des deux premiers. Mais qu'il soit bien entendu que la relation de deux nombres à leur somme n'a, par elle-même, aucune propriété distinctive. Seules lui appartiendront les propriétés qui seront expressément formulées par la suite (et leurs conséquences logiques) à l'exclusion de toute autre ; et son existence idéale (mathématique) ne va pas au delà.

Nous pourrons écrire

$c = S(a, b)$, ou si l'on préfère

$c = a + b$.

Mais, encore une fois, qu'il soit entendu que ces formules n'ont par elles-mêmes aucune signification. Leur rôle est de soutenir et de fixer la pensée. (Elles proposent une réalisation auxiliaire, dont il faut savoir aussi faire abstraction.)

3. On dira du nombre S (a, 1), ou a +1, qu'il vient immédiatement après a (qu'il est le successif de a), par exemple mais c'est simplement façons de parler. On posera $S(1,1)=1+1=2$ (deux).

4. On ne peut avoir $a + 1 = 1$.

5. Tout nombre a (1 excepté) vient immédiatement après un nombre déterminé qu'on pourra désigner par a-1.

6. On doit avoir en outre : $a + (b+ 1) = a + b + 1$

Nous n'avons énuméré ces axiomes que dans le but de bien préciser l'esprit dans lequel il faut les comprendre. Pour le but que nous poursuivons, il n'est pas nécessaire d'étudier si les axiomes que nous venons d'énoncer sont en nombre tout juste suffisant, ou s'ils ne suffisent pas encore, ou si peut-être ils sont surabondants. La seule chose qui importe ici, c'est de savoir qu'à partir des relations qui précèdent, et au besoin complétées, et par les moyens de ce qu'on est convenu d'appeler la seule logique, on peut déduire toute l'arithmétique. Celle-ci se présente alors comme un certain ensemble de relations établies entre des éléments de nature indéterminée. A travers l'arithmétique, comme autrefois à travers la géométrie, nous aurions ainsi rejoint le plan du logique. Mais à mesure que se précise ainsi la notion du logique pur, d'autres difficultés surgissent, d'autres parties du tableau s'assombrissent.

47. L'axiomatisation de l'arithmétique n'est pas une définition.

Tout d'abord, nous voulons profiter de l'occasion qui s'offre ici pour faire reparaître le conflit entre la méthode qui justifie par la logique la vérité des constructions mathématiques, et celle qui aperçoit les abstractions mathématiques non pas comme données d'emblée dans leur perfection, mais comme des images évoluant de l'intuitif vers un abstrait en devenir. L'occasion, c'est ici le fait que nous avons trouvé bon de numéroter nos axiomes. Dans le temps même que nous prétendions dégager la notion de nombre de toute idée de grandeur et de numération, nous faisions un usage tout à fait apparent des nombres de 1 à 6, employés dans leur fonction énumérative. Si l'on cédait à son premier mouvement, on n'hésiterait pas à déclarer que cette faon de procéder comporte un cercle vicieux, et que si elle ne peut être évitée, elle met en péril toute la valeur de notre dernière axiomatisation. Mais cette conclusion serait hâtive et superficielle. Evidemment, nous aurions pu énoncer nos axiomes l'un après l'autre et sans numéro d'ordre. Mais il est de fait que, dans l'exercice, de la pensée, on ne saurait songer à se passer des nombres pris dans leur sens ordinaire. Ainsi par exemple, pour pouvoir parler de relation logique, il faut qu'il y ait deux éléments au moins à relier, la notion de somme met trois nombres en relation, et ainsi de suite. Il ne peut être question de nier que les axiomes précédents font un emploi plus ou moins voilé des «nombres arithmétiques ». La numérotation des axiomes a justement pour but de rendre ce fait tout à fait patent. Mais ceci bien admis et reconnu, il n'y a pas de raison de s'en alarmer.

En effet, si notre axiomatisation a pour objet de décrire un processus d'abstraction, de suggérer une schématisation et d'évoquer systématiquement les notions que l'esprit doit accueillir - ou de faire apercevoir les caractères que l'esprit doit éliminer, - la logique consiste alors simplement à parler une langue efficace, à employer les mots et à mettre en mouvements les associations d'idées qui conviennent au but à atteindre. I1 n'existe pas de règle de logique qui puisse mettre l'interdit sur une notion déjà acquise et bien en notre possession.

Reprenons par exemple notre

Axiome 1 : L'un de ces éléments sera désigné par le symbole 1 et appelé un.

I1 est clair que le mot « un » n'y prend pas les deux fois la même signification. Rien ne nous empêcherait de marquer la différence en disant la seconde fois un-logique, tandis que la première fois son emploi ne dépasse guère la sphère de l'intuitif immédiat. Rien non plus ne s'oppose à ce que les deux sens subsistent l'un à côté de l'autre. Pourquoi le premier formé ne servirait-il pas à évoquer le second ?

C'est le moment de répéter à propos du nombre ce que nous disions de la droite : le concept de nombre n'est pas donné une fois pour toutes avec un sens ne varietur Nous l'avons vu se présenter sous des formes de plus en plus abstraites, mais sans que la plus évoluée puisse refouler complètement les formes antérieures (l'intuitive et l'arithmétique). Elle n'existe au contraire que portée par celles-ci. L'activité clans la sphère abstraite s'accompagne d'une activité en quelque sorte parallèle dans les sphères antérieures, sans que jamais l'abstrait puisse se détacher complètement de ses réalisations et prendre une signification parfaitement autonome.

Evidemment les choses changent d'aspect du tout au tout si l'on prétend fournir par l'axiomatisation une véritable définition implicite de ce qui fait l'essence des nombres. Il n'est plus légitime de faire appel aux réalisations antérieures ; mais si leur emploi n'est plus justifié, tout le système d'axiomatisation s'effondre et l'axiomatisation manque son but.

48. Analogies.

L'essence du nombre n'est donc pas un « objet éternel » invariable et prédéterminé : elle varie selon le degré d'abstraction auquel on s'arrête. Nous voyons ainsi pleinement confirmées les conclusions auxquelles l'analyse du géométrique nous avait déjà conduits : Les axiomes ne suffisent pas pour fournir à eux seuls une définition complète des notions sur lesquelles ils légifèrent -ni explicitement, ni implicitement. Les axiomes qui font intervenir les notions de structure et de relation logiques ne font pas exception, car ces notions ne nous sont pas plus innées que les notions de droite ou de nombre ; elles doivent elles aussi être abstraites d'un certain ensemble de données plus ou moins concrètes ; elles doivent être conçues et ne sont que des schématisations dont l'essence n'a rien d'absolu.

Dire donc que l' « On peut circonscrire le domaine des mathématiques à l'étude des relations de structure », c'est revenir à l'idée que la forme pure existe en dehors et au delà de ses réalisations ; c'est supposer que les structures sont des « objets éternels » ; c'est admettre que leur connaissance nous est directement accessible... en un mot c'est *revenir pleinement au point de vue de Parfait*.

D'ailleurs, l'idée même de la définition purement verbale explicite ou implicite apparaît fortement engagée dans l'attitude précritique. Si l'étude de l'axiomatisation de l'arithmétique nous le fait mieux sentir encore que celle de l'axiomatisation de la géométrie, c'est que l'appui que le langage courant prend sur les représentations spatiales n'est pas très apparent. Le problème de la signification des constructions géométriques et celui de la fonction du langage n'apparaissent pas du premier coup comme intimement liés. On ne sent pas encore la nécessité impérieuse d'analyser les mots mêmes dont on se sert, et l'on accepte comme un fait en soi l'efficacité du verbe définissant.

Tout autre est la position du langage vis-à-vis du concept de nombre entier. Ce dernier, directement ou indirectement, intervient partout où il y a expression d'un fait. Analyser sa signification, rechercher ses racines intuitives, insister sur les faits d'expérience irréductibles qu'il schématise, et estimer son efficacité dans la formation de notre connaissance, c'est poser déjà - en principe - tout le problème de l'adéquation du langage à la réalité.

L'analogie de l'analyse qui précède avec celle du géométrique devient encore plus frappante si l'on examine quel est le rôle de la notion de vérité dans les constructions de l'arithmétique. Tout d'abord, il est clair que ce qui pourrait constituer la vérité des relations entre les nombres devrait être commun à tous les schémas de même structure logique. C'est donc encore une fois sur le terrain du « logique pur » que pourra se trancher définitivement le problème de la vérité. Pour nous y préparer, il nous faudra encore, selon le programme que nous avons déjà une fois esquissé, traverser encore une partie de la logique traditionnelle, en marchant de l'intuitif vers l'abstrait.

Mais dès ici, nous pouvons constater que rien n'exige que l'idéal d'une vérité absolue soit au bout de notre effort. Cet idéal s'est trouvé, en arithmétique aussi, réalisé de faon efficace, mais pourtant imparfaite. L'idée de vérité n'est intervenue encore une fois que sous la forme du non-contradictoire. Et la notion de conséquence avant d'appartenir à la sphère du logique pur, se réalise dans le concret relatif du numérique. Pour le faire voir, il suffirait de reprendre, épisode après épisode, le dialogue de nos trois personnages sur l'idée de vérité. Mais nous croyons pouvoir nous en dispenser.

En un mot : La nature du nombre n'est pas une et immuable. Les abstractions successives marquent les étapes de son devenir.