Les Mathématiques et la réalité :
Essai sur la méthode axiomatique
Ferdinand Gonseth 1936

Réédition: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris,1974.
Extraits : Pages 75-93

CHAPITRE IV : LE DOUBLE VISAGE DE L'ABSTRAIT

24. La schématisation géométrique. - Le chapitre précédent avait pour but d'énoncer quelques constatations simples sur l'intuition de l'espace et sur les autres formes de l'intuition immédiate. Nous allons maintenant franchir le « seuil d'abstraction » qui fait passer de la notion intuitive d'espace à l'espace abstrait de la géométrie. Les représentations spatiales vont prendre l'aspect de figures exactes. A la connaissance intuitive des lois de l'étendue viendra se superposer la conception d'une suite de théorèmes. Cette transmutation va-t-elle complètement détruire ce qu'on pourrait appeler la c< substance des notions intuitives », c'est-à-dire tout cet indescriptible amalgame de souvenirs, d'intentions et de sensations qui font apparaître les images intuitives presque corporelles lorsqu'on les oppose aux abstractions auxquelles elles donnent naissance ? Ou bien le « géométrique » n'est-il pas encore complètement dépouillé et purgé des caractères qui opposent un concret à un abstrait ?

Cette question va faire l'objet principal de ce chapitre. Nous allons nous demander : Quels sont les caractères propres au « géométrique » ? Comme nous nous demandions au chapitre précédent : Quels sont les caractères propres à l'intuitif ? C'est en quelque sorte les traces de l'intuitif que nous allons poursuivre à travers le processus d'abstraction, jusque dans le géométrique.

Cette volonté de concevoir le géométrique dans son intégrité et dans la totalité de sa signification ne sera pas complètement déçue. Elle nous dévoilera le double rôle de tout abstrait : ce que nous nommons le double visage de l'abstrait.

Pour ne pas rester dans les généralités, demandons-nous pour commencer d'où viennent les notions géométriques les plus simples, telles qu'on les introduit dans les premiers éléments. Chacun peut retrouver dans ses souvenirs la façon dont elles lui furent suggérées.

Le maître propose à l'élève certaines « réalisations physiques » : le faîte d'un toit, l'arête d'une règle à dessiner, ou encore la trajectoire d'un rayon lumineux, la ligne de visée ; et il lui demande d'y apercevoir la notion à définir. II exige de savoir distinguer dans chacun de ces exemples concrets une chose idéale qu'ils ont en commun : *la droite géométrique*.

De même il lui demande d'imaginer un objet de plus en plus petit, plus petit encore que tout objet qu'il aurait déjà imaginé, pour conduire son esprit à la notion de lieu précis : de *point géométrique.*

Il lui demande encore d'apercevoir dans les objets proposés les premières propriétés des êtres abstraits qu'il vient d'imaginer : qu'une droite est déterminée par deux points, etc.

En un mot, il exige de l'élève un acte de véritable création mentale, dont il faut se garder de diminuer l'importance. Remarquons bien que ce passage de la notion intuitive : la *ligne de visée*, à la notion idéale : la *droite*, est quelque chose de tout à fait indescriptible. Une fois qu'on l'a conçu, il peut être évoqué. Mais notre pouvoir d'explication s'arrête là. Il y a là un fait d'une essence tout à fait *sui generis.*

II n'est pas question de dire que la droite *est* dans le faîte du toit ou dans la ligne de visée : on sait fort bien qu'il n'y a pas de trajectoire parfaitement droite. On sait que le monde physique n'offre pas de réalisation parfaite. Nous l'avons déjà dit : il suffit d'exiger que les approximations dépassent une certaine décimale pour que les *caractères de la réalisation* s'évanouissent dans l'indéterminé ! Si ce sont les réalisations physiques qui
nous ont suggéré les notions de droite, de point, etc., il faut reconnaître due c'est par le fait d'une connaissance incomplète de la réalité, *par un heureux malentendu*. On rend en partie compte de ces circonstances e:n disant que la droite est une image schématique de la réalité. Dans un schéma, la réalité ne se trouve pas représentée dans tous ses détails. Seuls certains traits sont conservé, et certains rapports

évoqués. Un schéma n'est en aucune façon une représentation fidèle en un sens absolu : il n'est compréhensible que si on en possède la clef explicative. Tous ces caractères se retrouvent dans le parallélisme existant entre la notion de droite et ses réalisations. C'est pourquoi nous appellerons « *schématisation axiomatique* » le processus mental dont les notions géométriques sont l'aboutissement. Axiomatique, parce que les premiers rapports qu'on aperçoit entre les éléments de ce schéma sont les axiomes de la géométrie.

25. Les modèles géométriques de même structure logique. - Et maintenant la question essentielle qui se pose est la suivante : La notion abstraite de droite géométrique n'a-t-elle rien gardé de ses origines intuitives ?

On peut faire à ce propos quelques expériences de pensée aussi simples qu'instructives. La première est, basée sur l'existence de différents modèles d'une seule et même géométrie, de la géométrie élémentaire, par exemple. On obtient un « modèle » extrêmement simple de la géométrie euclidienne en procédant de la façon suivante :

On choisit un point fixe 0 et l'on appelle « droite » tout cercle passant par ce point. La « distance » entre deux points de cette nouvelle droite sera définie par l'expression :

$$A\,B - \mathrm{cotg}\,(BO : 2) - \mathrm{cotg}\,(AO : 2)$$

Deux cercles passant par 0 se rencontrent en général encore en un point A et y forment (au sens ordinaire) un angle α. Or ces deux cercles doivent être baptisés « droites » : par définition, α sera encore l'« angle » de celles-ci.

Et ainsi de suite... On fait subir une transposition, une traduction analogue à toutes les notions nécessaires à l'édification de la géométrie plane. Il est inutile d'en donner le « dictionnaire » complet : ce qu'il importe de savoir, c'est que, sous ce nouvel aspect - on est tenté de dire sous ce déguisement - on retrouve réalisés sans exception tous les théorèmes de la géométrie euclidienne.

Bien plus généralement, si l'on fait subir à l'espace géométrique une déformation arbitraire, déformation qui s'exercera sur tous les plans, toutes les droites, toutes les sphères, tous les cercles, etc., pourvu que les notions de distance, d'angle, de parallélisme, etc., y subissent une altération correspondante, la géométrie conserve une validité inaltérée.

Y a-t-il des raisons de préférer l'un de ces modèles aux autres ? En quoi diffèrent-ils et qu'ont-ils en commun ? Qu'est-ce qui fait leur individualité et pourquoi est-il possible de les identifier ?
Plus, peut-être, que ce qui fait leur individualité, il est facile de découvrir ce que ces modèles ont en commun : leur structure logique. Voici. comment on procède :

On envisage les notions fondamentales, la droite, le point, etc., sous un aspect encore plus dépouillé. D'images fondées dans l'intuition spatiale, elles doivent tomber (ou monter !) au rang de choses logiques, c'est-à-dire de choses dont seules les relations logiques avec d'autres objets de même nature doivent être retenues. Cette dégradation des images géométriques représente une étape essentielle de l'axiomatisation de la géométrie. On commence par énumérer les classes d'éléments qui doivent intervenir. On énonce ensuite, sous forme d'axiomes, les relations logiques qui doivent être posées entre ces éléments fondamentaux.

On dira par exemple : Nous posons l'existence de deux classes d'éléments ; une première classe dont tes éléments seront désignés par des lettres majuscules : A, B, C,... et une seconde classe dont les éléments seront. désignés par des lettres minuscules : a, b, c...

On pourra, *si l'on veut*, nommer *droites* les éléments de la première catégorie ; *points* ceux de la seconde.

Les propriétés qui doivent être attribuées à ces éléments sont. toutes fixées par des axiomes tels que les suivants :

Axiome 1. Deux éléments A et a de l'une et l'autre catégorie sont, ou ne sont pas, dans une certaine relation logique **I** (A, a) que nous appellerons la *relation d'incidence*.

On pourra, si l'on veut, pour exprimer que cette relation est satisfaite, dire indifféremment que la droite A passe par le point a, que la droite A contient le point a, que le point a est sur la droite A, etc. Mais ce sont façons de parler. En particulier, il ne faut leur attribuer aucun sens intuitif.

Passons à l'axiome suivant :

Axiome 2. On peut toujours trouver un A et un seul qui soit avec deux a différents (a_l et a_2) dans la double relation d'incidence :

I (A, a_l) & **I** (A, a_2)

(Cet axiome s'énonce aussi de la façon suivante : Il y a une droite et une seule qui passe par deux points ; ou encore : Deux points déterminent une droite.)

A cet instant, on remarquera que les axiomes 1 et 2 balayent déjà un certain champ logique. Lorsqu'on examine en effet s'il peut arriver que deux A différents soient dans la relation **I** avec un même a, on voit qu'il ne reste plus que deux possibilités : ou bien il y a un seul a avec ces propriétés, ou bien il n'y en a pas.

(En langage ordinaire : Deux droites se coupent en un seul point ou ne se coupent pas.)

On voit dès ici se dessiner une véritable projection des notions géométriques sur d'autres notions d'une espèce tout à fait différente ; s'établir un parallélisme entre deux schémas intellectuels situés dans des plans d'abstraction superposés. L'introduction de la seule relation **I** ne suffit d'ailleurs pas. On continuera par exemple, de la façon suivante :

Axiome 3. De trois individus x, y, z de la seconde classe, on peut toujours dire :

ou bien qu'ils vérifient une relation **O** (x, y, z)

ou bien qu'ils vérifient la relation opposée non**O** (x, y, z)

ou bien qu'ils sont tous trois en relation **I** avec un même A

(c'est-à-dire en langage ordinaire : Trois points différents déterminent une orientation positive ou bien une orientation négative s'ils ne sont pas en ligne droite.)

Et l'on continuerait de la sorte (Pour une description plus approfondie de cette axiomatisation on pourra consulter, p. ex. : F. Gonseth, *Les Fondements des mathématiques*), jusqu'à ce que les axiomes énoncés forment une base assez large. Ceci fait, les conséquences doivent être déroulées par les seuls moyens de la déduction logico-mathématique. Nous appellerons G le schéma des relations logiques qui vient ainsi prendre la place des propriétés et des théorèmes qui font l'objet de la géométrie ordinaire. C'est ce schéma qui est commun à tous les modèles de notre géométrie tous ces modèles en sont des réalisations dans le « domaine du géométrique ».

26. La logique abstrait du géométrique. - I1 y a, entre ce que nous venons de dire du passage aux relations logiques et ce que nous disions il y a un instant du passage aux notions géométriques, une analogie évidente. Nous demandions tout à l'heure, avec le maître, qu'on veuille bien apercevoir une même notion idéale, la droite, dans des images intuitives différentes, et maintenant nous demandons que l'on aperçoive une même relation logique dans des relations géométriques différentes. I1 faut à nouveau faire abstraction de certaines divergences pour distinguer, pour concevoir une identité idéale, d'un genre plus abstrait encore. On devine où nous en voulons venir : l'introduction des relations logiques n'est pas autre chose qu'une nouvelle schématisation axiomatique. Pour passer du géométrique au logique, il faut franchir un nouveau seuil d'axiomatisation. Tout à l'heure, le géométrique était un abstrait par rapport à l'intuitif. Maintenant c'est un concret par rapport au logique. Abstraction il y a un instant, c'est maintenant une réalisation d'un abstrait plus subtil. Le schéma G - comme nous l'avons déjà dit - ne fait qu'expliciter la structure logique commune à tous les modèles considérés. Par rapport à ce schéma, ces modèles ont perdu toute individualité : cela signifie que, si nous pouvions perdre le souvenir des représentations intuitives que la logique ne veut plus connaître, nous serions nous-mêmes dans l'incapacité de les distinguer l'un de l'autre. Cela signifie donc aussi qu'il y a quelque chose qui se perd du fait de l'axiomatisation en termes de logique « pure » . La notion de droite se dépouille du halo sensible » que ses réalisations dans la nature nous suggéraient : la notion de point n'est plus liée à l'idée de l'endroit parfaitement précis et déterminé, à la notion «ici » ; la notion de mouvement est dégagée de l'idée d'étendue, etc. En un mot : Si l'on projette les concepts géométriques sur le plan de la logique, le sens qu'ils ont pris ou qu'ils pourront encore prendre dans la description des réalités dites objectives ne leur est plus inhérent. Ce sens ne peut leur être réintégré que par le fait de telle ou telle réalisation. A première vue, on ne peut guère apercevoir l'étendue et la profondeur du « monde mental » qui est ainsi voué à l'anéantissement. Les considérations que voici nous en fourniront une idée plus complète.

Revenons au schéma G : Les points, les droites, etc., y sont donc contenus comme des êtres sans forme, dont l'existence s'épuise à être différents ou de même nature et à servir de point d'attache à un certain nombre de relations logiques. Ce schéma est abstrait de tous les modèles de la géométrie euclidienne : c'est d'ailleurs par des exemples de ce genre que la notion même « d'abstraction » prend sa signification.

D'autre part, on peut chercher à rendre la structure de G sensible en s'en faisant une nouvelle image plus ou moins matérielle. La différence des deux classes fondamentales est marquée par l'opposition des majuscules aux minuscules. Les relations différentes sont désignées par des symboles différents. La différence du rôle de certains éléments s'y traduit par un ordre déterminé qui leur est assigné, etc.

On pourrait aller encore plus loin : représenter un certain nombre d'éléments par les lettres

A_1 A_2 A_3 A_4

a_1 a_2 a_3 a_4

indiquer une relation **I** réalisée par exemple pour A_1 et a_2 et peut-être aussi pour A_1 et a_3, par des traits pleins tracés entre A_1 et a_2, ou A_1 et a_3;

Marquer la relation **O** entre a_1 ,a_2 et a_3 par exemple par un trait pointillé touchant ces trois lettres, et ainsi de suite.

Tout cet attirail de symboles et de lignes représente une réintégration, du moins partielle, dans une réalisation sensible. L'esprit à la fois s'y repose et s'en abstrait. L'idéal ne se détache jamais entièrement d'un concret propre à le soutenir.

27. Le double aspect du géométrique. - L'édifice de la géométrie euclidienne comprend, à côté des concepts primitifs et des axiomes, un nombre illimité de concepts dérivés (l'angle, la distance, le cercle, la conique, etc.) et de conséquences logiques (les théorèmes). Les axiomes et les concepts primitifs n'ont d'ailleurs aucune signification privilégiée : on en donne la preuve en reconstruisant le même édifice sur un autre fondement, c'est-à-dire en élevant certains concepts dérivés et certaines conséquences au rang de concepts primitifs et d'axiomes. Or il est maintenant un fait important qu'il, nous faut retenir : c'est que l'édifice géométrique euclidien peut aussi servir de modèle aux géométries non-euclidiennes. Autrement dit, il suffit d'un dictionnaire convenablement choisi pour que toute vérité euclidienne, la traduction une fois faite, présente un visage non-euclidien. Dans le seul but de fixer les idées, nous allons décrire en quelques mots comment les choses se présentent, par exemple pour le modèle de Poincaré de la géométrie hyperbolique. Nous plaçons dans deux colonnes parallèles, à gauche un certain nombre de termes euclidiens, et à droite, en regard, les nouveaux. noms que nous nous proposons de leur assigner.

Demi-plan euclidien	Plan hyperbolique
Point de ce plan	Point de ce plan
Cercle orthogonal à la droite frontière	Droite de ce plan
Angle (euclidien) de deux de ces cercles, etc.…	Angle (non-euclidien) de deux de ces droites, etc.

Ce dictionnaire une fois établi, il se présentera donc que tout énoncé euclidien donnera naissance à un énoncé qu'on pourrait d'ailleurs aussi obtenir directement en édifiant la géométrie hyperbolique à partir des axiomes qui lui conviennent particulièrement.

Inversement on peut démontrer qu'une géométrie non-euclidiennes quelconque fournit aussi, par un démarquage convenable des notions employées, un modèle de la géométrie euclidienne. Ces faits peuvent maintenant être présentés de la façon que voici : Supposons construits le schéma de relation G appartenant à la géométrie euclidienne et le schéma G' appartenant à une géométrie non-euclidienne quelconque. Si l'on ne retient des relations inscrites dans ces schémas que leurs caractères logiques, en faisant abstraction des noms qu'on leur donne occasionnellement (en rapport avec certaines images intuitives) les schémas G et G' sont identiques. Les géométries non-euclidiennes elles aussi, au même titre que les différents modèles euclidiens, sont des réalisations de ce schéma unique.

Si, comme nous l'avons supposé déjà une fois, nous nous trouvions en face du schéma G en ayant perdu tout souvenir de ses réalisations, non seulement nous ne saurions plus choisir entre les différents modèles euclidiens, mais il nous serait également impossible de distinguer l'euclidien du non-euclidien. En un mot, le schéma G ne contient plus rien qui détermine le retour vers ses réalisations. Si, par exemple, nous n'avions plus aucune connaissance des caractères propres à un espace, il n'y a rien dans G qui puisse nous le suggérer. Le chemin du retour ne s'ouvrira devant nous que si l'on vient nous dire : Cette notion-ci sera la droite et ces relations-là seront ses propriétés. Mais les raisons de ce choix nous sont fournies par notre connaissance antérieure de ce qu'il faut exiger pour qu'une construction intellectuelle puisse être regardée comme une géométrie. En bref : la notion même d'édifice géométrique est complètement étrangère au schéma des relations.

On voit qu'en franchissant le seuil d'abstraction qui sépare le logique du géométrique, les notions géométriques ont perdu une partie de ce qu'on pourrait appeler leur substance : tout ce qui est forme, tout ce qui rappelle leur signification dans le monde des phénomènes directement perçus par nos sens. En un mot, ce sont justement les caractères qu'on s'accorde à nommer spécifiquement géométriques qui ne trouvent pas accès dans le domaine du logique.

Ayant ainsi constaté ce que les différents modèles ont en commun. nous pouvons revenir à la question : En quoi. consiste leur individualité ? C'est justement dans ce que la seconde axiomatisation a fait disparaître qu'il faut aller la chercher : Cette individualité consiste avant tout dans le souvenir des réalisations où les notions ont été primitivement aperçues.

Au début du chapitre, nous nous étions posé la question : D'où nous vient la notion de droite, telle que la géométrie nous la propose ? Nous avions déjà constaté que le monde physique n'en offre que des réalisations imparfaites, et que par conséquent ce n'est pas le fait a d'être réalisée », au sens ordinaire de ce mot, qui nous fournit la garantie de « l'existence mathématique » de cette notion. Par une réaction assez naturelle, l'esprit éprouve la tentation de se porter immédiatement aussi loin que possible dans la direction opposée, et de dire : « C'est donc une affaire de pure logique. » Or, nous constatons maintenant qu'il n'en est rien non plus : la logique pure ne connaît pas la droite, ne connaît ni le point ni l'espace : L'origine du géométrique n'est pas en pays de Logique pure.

L'idée du géométrique a sa source dans l'intuitif. Mais sa sphère d'existence spécifique est comprise entre la première axiomatisation qui lui faisait un visage abstrait face au côté intuitif de notre connaissance et la seconde qui en fait un concret face au côté « purement » logique. En deçà, et au delà, elle n'existe pas encore ou n'existe plus. C'est dans ce double rôle que s'épuise l'existence géométrique, dans ce double visage que se révèle son vrai caractère.

Il nous paraît utile d'insister sur cette constatation à un double point de vue : tout d'abord en n'envisageant que le côté mathématique de la chose ; ensuite en la plaçant dans un cadre plus général.

28. La réalisation par la géométrie analytique. Le fait que le géométrique s'arrête à la frontière du logique a induit quelques mathématiciens à refuser une existence autonome à la géométrie. Ils n'acceptent de l'envisager que sous son apparence analytique, comme ensemble de formules algébriques que l'introduction d'un système de coordonnées permet de traduire ensuite. en langage géométrique. Or, il est clair que la géométrie dite analytique fournit elle aussi une réalisation du schéma G. Mettons encore une fois les notions correspondantes en regard l'une de l'autre :

Elément A	Droite	Coordonnées x,y
Elément a	Point	Coordonnées u, v
Relation **I** (A, a)	Relation d'incidence	Equation $ux + vy - 1 = 0$
Relation **O** (a_1 ,a_2, a_3)	Orientation positive	Déterminant $D > O$
etc.	etc.	etc.

Dans la troisième colonne, les relations logiques sont réalisées par des relations arithmétiques, au sein du continu des nombres réels. Ce caractère de réalisation apparaît aussi en ceci : Si l'on passe de l'arithmétique au logique, les concepts subissent une « désincarnation » tout à fait semblable à celle que nous avons observée dans le cas de la géométrie : La logique pure ne retient pas les caractères de « plus grand » ou de « plus petit » qui sont spécifiquement attachés à la notion de grandeur arithmétique. Les notions d'équation, de déterminant, etc., ne sont elles-mêmes que des formes sous lesquelles les relations logiques peuvent se présenter, et ne trouvent pas comme telles accès dans le domaine du logique pur.

A ce rôle des nombres face au logique, on peut, ici aussi opposer le rôle qu'ils jouent face à l'intuitif. Le continu arithmétique trouve une réalisation dans la notion de longueur quelconque, tandis que le système des nombres entiers trouve une réalisation dans le dénombrement des catégories finies d'objets.

29. L'essence du géométrique. - En résumé, nous affirmons l'existence de certains caractères qui appartiennent en propre au géométrique et lui confèrent son existence autonome. Nous avons cherché à les suggérer par l'analyse qui précède, mais en fait le langage n'arrive pas à les saisir vraiment. D'une part, il sont encore engagés dans nos vues intuitives, liés à toute notre activité sensorielle et musculaire. C'est par les racines qu'ils plongent de ce côté que leur vient l'essentiel de leur signification, signification que soutiennent encore le faisceau des intentions dont s'accompagne tout effort de connaître.

Envisagées spécialement sous cet angle, les notions géométriques sont des images idéales appuyées sur le réel objectif, des .représentations schématiques dent le sens n'est intelligible qu'en tenant compte de la réalité qu'elles visent. II n'y a pas de notion de droite sans la connaissance préliminaire de certaines réalisations plus ou moins grossières, telles que l'arête d'une règle ou le trait qu'elle permet de tracer, il n'y a pas de notion de point sans l'intention de désigner un endroit précis, pas de notion d'espace sans l'image intégrale inscrite dans nos formes d'intuition.

D'autre part, ces notions ne prennent leur aspect. rationnel que du fait de l'axiomatisation, c'est-à-dire de l'acte mental qui aboutit. à la création du *schéma abstrait*.

Ce n'est que par action et réaction de ces deux tendances de la faculté de connaître et de comprendre, à la fois par association et dissociation de ces deux orientations antagonistes que prend naissance la notion complète de la géométrie : deux visages où l'on peut distinguer tour à tour des traits semblables sous des expressions dissemblables ou une même expression sous des traits différents.

30. L'évolution des concepts géométriques. - Nous clôrons maintenant ce chapitre par quelques remarques d'ordre général:

Si l'on arrête ses regards sur les moyens mis en œuvre dans l'analyse du géométrique à laquelle nous venons de procéder, on ne peut qu'être frappé de la continuité vraiment grandiose de l'effort dont ils témoignent. Les résultats de cet effort s'étagent dans notre esprit comme les couches géologiques dans un terrain : il y a ceux de la période pythagoricienne liés à la mystique des nombres, ceux de la période platonicienne et euclidienne où la géométrie prend figure de science rationnelle de l'espace, ceux de la période qui précède et prépare la découverte des géométries non-euclidiennes, où la notion de l'axiome commence à se détacher de l'idée de vérité nécessaire dont dépendrait la forme même du monde, ceux des créateurs des nouvelles géométries, dont la signification ne s'affirma que peu à peu, ceux enfin de la période moderne avec la nouvelle étape de l'axiomatisation sur laquelle nous avons spécialement insisté, celle de la réduction au logique. Malgré l'apparente simplicité des faits que nous avons invoqués, c'est ce champ immense de pensée qui les soutient et qui les anime. C'est en ayant sous les yeux la vision de cette progression trois fois millénaire, qui s'est parfois ralentie, mais qui jamais ne s'est démentie et n'a jamais rien renié de son acquis que l'on a le droit d'affirmer : Il n'y a pas actuellement d'autre domaine de la pensée qui fournisse les moyens d'une analyse semblable, qui dispose de termes aussi clairement formulés et aussi nettement déterminés.

D'ailleurs, quelque intérêt que puisse présenter pour un mathématicien une réintégration du géométrique dans son autonomie, et une appréciation renouvelée de la rigueur des considérations dites intuitives, ce n'est pas dans cette direction que nous apercevons le gain véritable de notre analyse. Celle-ci a pour nous la valeur d'un exemple-type. Dans les rapports du géométrique à l'intuitif et au logique nous apercevons l'image même des rapports du concret et de l'abstrait, image qui se reflète dans chacune des faces que nous présente le processus de la superposition des schémas dans la construction progressive de la réalité. Fixons-en maintenant quelques traits avec cet horizon élargi.

Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu ne varietur. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés : une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions : « droit devant soi » ou « sans incliner ni à droite ni à gauche ». Le second avatar peut être placé sous le signe de la géométrie grecque, tandis que le troisième est celui de la relation logique. Il n'est pas vrai que le dernier remplace les précédents et les détruise. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance.

Au contraire; même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept droite continue à vivre parallèlement de ses existences entes antérieures. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes.

31. L'axiomatisation n'est ni explicitement ni implicitement une définition. - On voit, par cet exemple combien la constitution d'un abstrait peut être une chose complexe. Remarquons en particulier combien s'éloigne la possibilité d'une définition verbale qui en atteigne et contienne l'essentiel. A la réflexion, la notion même de définition verbale apparaît engagée dans l'attitude précritique.

Comment puis-je arriver, pour reprendre notre même exemple, à définir une droite dans la plénitude de sa signification ? On s'arrête assez volontiers à l'idée que les axiomes de la géométrie d'Euclide fournissent, dans leur ensemble, une définition implicite de toutes les notions géométriques. Mais ceci ne peut certainement pas concerner la première étape de l'axiomatisation, l'étape ouverte par Euclide et qui ne cherche pas à dépasser la sphère du géométrique. Nous savons. en effet, qu'il existe plusieurs a modèles » satisfaisant tous également à tout le système des axiomes. Ce qui est droite dans l'un est, peut-être cercle dans l'autre : les axiomes ne suffisent donc pas à eux seuls pour conférer une individualité parfaite à chacune de ces deux notions. D'autre part, il n'est pas douteux que d'une certaine façon nous réalisons cette individualité, et que nous avons le moyen de distinguer entre les différents modèles. Le fondement de cette individualisation se trouve donc. dans « l'idée même » de la droite et du cercle, c'est-à-dire dans nos représentations intuitives, dans la sphère qui précède l'axiomatisation.

- Si nous persistons à vouloir définir la droite par les axiomes, c'est tout au plus comme relation logique que nous avons quelque chance d'y parvenir. Mais alors la définition ne saisit plus rien de ce qui est en elle image et représentation idéalisées : la droite clans la plénitude de son sens échappe à l'étreinte des seuls axiomes.

L'acte de définir étant ainsi reporté sur le terrain logique. il suffit de prolonger un peu la ligne pour s'apercevoir que les choses ne s'y présentent pas sous un jour beaucoup plus favorable. La seconde étape de l'axiomatisation débute, en effet, par la déclaration : « Les éléments dont il va s'agir ne doivent avoir de propriétés que celles; uniquement, qui vont être énumérées dans les axiomes et les définitions. » - Or, il faut en faire la remarque immédiatement, il ne peut y avoir ici encore de définition véritable due si les notions à définir sont individualisées par là même. Comment est-il possible de s'en assurer pour les A. les a, la relation **I**, etc. ? Nous ne pourrons en juger que sur la foi d'une analyse du logique semblable à celle, qui procède, du géométrique. Cette dernière vient de nous démontrer que l'on ne saurait faire fond sur le sentiment vague et global d'une compréhension immédiate. En d'autres termes, nous nous retrouvons, en principe, dans la même position que tout à l'heure. Comme l'axiomatisation en termes de géométrie n'a pas suffi à conférer l'individualité parfaite aux notions géométriques, il n'y a pas de raison de penser que la chose soit devenue possible en termes de logique. L'individualité de ceux-ci. se fonde sur leur rôle en géométrie. La possibilité d'une étude plus approfondie est. liée à la possibilité d'une nouvelle étape dans l'axiomatisation... Rien ne nous assure que jamais il devienne possible de conclure.

Ainsi la notion de définition va s'évanouir dans l'indéterminé lorsqu'on veut lui conférer une signification indépendante du processus par lequel les notions vont se constituant. C'est au fond ce processus seul qui nous fournit une définition, à travers l'intuitif et le géométrique. La seule possibilité de la réaliser consiste en une véritable création individuelle, pour laquelle les mots fournissent des points de repère qu'il faut savoir interpréter, des points d'appui qu'il faut savoir utiliser. Il est à peine nécessaire de remarquer que ce n'est pas là ce que, d'abord, on croyait dire par la formule : Définition implicite par les axiomes.

- Il se confirme donc encore une fois que l'abstrait ne peut pas revendiquer une existence autonome : ceci suffit pour écarter l'idée selon laquelle les axiomes représentent des conventions posées librement par l'esprit.

Enfin, l'exemple du géométrique montre clairement. que, par la constitution d'un schéma axiomatique, il se crée à la fois un abstrait et un concret relatif à ce dernier. Dès qu'on a franchi la première étape de l'axiomatisation, les êtres géométriques sont des abstraits vis-à-vis le l'intuitif. Celui-ci en reçoit comme l'empreinte opposée et se trouve repoussé vers le concret. Le même phénomène se reproduit une fois le second seuil franchi : c'est maintenant le géométrique qui joue le rôle d'objet vis-à-vis du logique. II y a là comme l'avers et le revers d'une seule opération. Lorsqu'on parle de schématisation, on ne voit, souvent que la face tournée vers l'abstrait. L'image complète ne comprend pas seulement la superposition du schéma aux objets à soumettre à la schématisation, mais aussi l'empreinte du schéma sur ces derniers : ceux-ci objectivent le schéma, en fournissent - selon l'expression que nous avons employée- une *réalisation*.

L'esprit d'abstraction ne se repose d'ailleurs jamais. Notre faculté de connaître épouse, pour connaître, la forme des schémas. Mais elle parvient à les connaître eux-mêmes, et cherche à exprimer cette connaissance clans le cadre de nouveaux schémas.