Précisons nos divergences
Réponse sur un point à Roland Charnay et à la commission Joutard
Complément sur le calcul mental
Partie III

1953 – *René Taton* résume quelques siècles d'expérience

La distinction faite par divers traités de pédagogie entre calcul mental, calcul écrit exécuté de mémoire et calcul oral, ne nous semble pas fondamentale. Le calcul écrit exécuté de mémoire n'est qu'une forme de calcul mental à la technique mal adaptée ; les opérations mentales ont en effet leurs méthodes propres et ne doivent pas être calquées sur le calcul écrit.

In **René Taton, Le calcul mental[1], Que sais-je ? n° 605, 1953.**
Chap. V C) La pédagogie du calcul mental, p. 127.

1981 – Enfin *Ermel* vint

A la distinction « calcul écrit », « calcul mental », nous en préférons une autre, beaucoup plus nette et fondamentale : « calcul automatique » et « calcul pensé »

In **ERMEL[2] Cycle Moyen, Tome 1, Sermap-Hatier, 1981.**
Chapitre 2. Calcul mental, p.97.

Plan

***

Calcul mental ?

J'avais dit dans ferry_calc1 : "*D'autre part, j'essaierai de dire quelques mots sur le calcul mental*." Je n'ai pas eu le temps de rédiger complètement avant la réunion du 11 Octobre. Lors de celle-ci, alors que je demandais aux représentants de la commission Joutard quelle était la règle fondamentale du calcul mental, ceux-ci n'ont pas répondu et lorsque j'ai précisé que c'était le fait de calculer de gauche à droite (contrairement au calcul posé), ils ont répondu que ce n'était pas vrai. Voici donc une occasion supplémentaire de préciser nos divergences.

A) Expérience personnelle

J'ai constaté un assez fort changement dans les dix /quinze dernières années, celles qui correspondent à la remise en avant officielle du calcul mental que l'on avait quasiment abandonné dans les années 70 et elle se traduit par une baisse générale des capacités des élèves dans cet exercice. Si l'on pose des additions de nombres à deux chiffres (45 + 63) ou des multiplications d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre (7×43

[1] Vous trouverez des extraits significatifs du texte de René Taton (noté [TAT])à :
http://michel.delord.free.fr/taton.pdf

[2] Roland Charnay faisait partie des responsables de la rédaction d'ERMEL.
Vous pouvez consulter le début du chapitre sur le calcul mental (noté [ECM]) à :
http://michel.delord.free.fr/ermel-cm.pdf

par exemple) , il y a encore un nombre de réponses justes en baisse mais pas inexistant mais par contre quasiment aucun élève ne sait plus faire des calculs du type 573 + 659 ou 7× 688 alors qu'avant les années 90 un nombre non négligeable, de l'ordre de 15% d'une classe – 4/6 élèves - y arrivait à son entrée en sixième. L'explication , j'ai eu du mal avant de comprendre, est assez simple. Jusqu'à ce que l'on mette pas l'accent sur le calcul mental il y avait deux possibilités : soit, cas le plus rare, les enseignants du primaire enseignaient la vieille méthode (opérations par la gauche) , soit il n'y avait pas d'entraînement au calcul mental et les élèves refaisaient de tête l'opération posée mais sans que cela soit devenu une routine. La nouveauté est double. D'une part, les anciens instituteurs ont progressivement disparu et ces dernières années, j'ai au maximum , un ou deux élèves de sixième qui savent qu'il faut commencer par a gauche. D'autre part, un certain nombre d'élèves pas tous, font maintenant du calcul mental en primaire mais on leur apprend à commencer par la droite : je dois donc d'abord leur désapprendre les mécanismes qu'ils ont appris pour leur en apprendre d'autres . Ceci ressemble d'ailleurs beaucoup à la situation de la division car il faut aussi que j'exhibe des situations dans lesquelles la méthode par la gauche est plus performante que celle qu'ils ont appris. Comme pour la division, on ne les a pas placés devant des calculs qui permettent de faire la différence et je dois d'abord surmonter le "*Mon maître ne nous disait pas de faire comme ça*" .

B) Deux méthodes générales pour le calcul mental

Calcul mental : la question est posée oralement – ou écrite - et la seule écriture autorisée pour l'élève est l'écriture du résultat à moins que la réponse ne soit orale. En fait, calculer "de tête" , c'est justement ne pas utiliser du tout le crayon[3].

a) Méthode de calcul mental : on commence par la gauche, c'est-à-dire les unités de plus haut rang

b) Méthode par la droite : on calcule de tête en calquant les calculs sur l'opération posée, c'est-à-dire en commençant par la droite. Cette méthode n'a pas à être enseignée car si on n'indique pas l'autre méthode que l'élève ne peut pas inventer, c'est ce qu'il fait spontanément lorsqu'on le place dans une situation où il ne peut pas écrire.

Un exemple pour l'addition[4] : 746 + 879

Méthode par la gauche :

Calculs (et travail mental)	Nombres en mémoire (outre sept cent quarante six, huit cent soixante-dix neuf)
Sept cents et huit cents, mille cinq cents	Mille cinq cents
Quarante et soixante dix , cent dix	Mille cinq cents, cent dix
Mille cinq cents et cent dix, mille six cents dix	Mille six cents dix
Neuf et six, quinze	Mille six cents dix, quinze
Mille six cents dix et quinze, **mille six cent vingt-cinq** ou **1625**	

Méthode par la droite :

Calculs (et travail mental)	Nombres en mémoire (outre sept cent quarante six, huit cent soixante-dix neuf)
9+6 = 15	5 comme unité, retenue 1
4+7 = 11	5 comme unité, retenue 1, 1 comme dizaine,1 comme centaine
11+1 = 12	5 comme unité, 2 comme dizaine, 1 retenue comme centaine
7+8=15	5 comme unité, 2 comme dizaine, 1 retenue comme centaine, 15 centaines
15+1=16	5 comme unité, 2 comme dizaine, 16 centaines
5 unités, 2 dizaines, 16 centaines , **1625**	

On peut observer l'ergonomie de l'utilisation de la mémoire de la méthode par la gauche pour laquelle

[3] Bien sûr, je ne fais pas ici un cours de calcul mental. Dans le cas d'un cours, on doit commencer en écrivant au tableau l'énoncé de l'opération (ici 746 +879) ce qui permet , dans un premier temps, de soulager la mémoire de l'élève.

[4] Pour un exemple sur la multiplication qui est encore plus instructif, voir annexes I

1) Il n'y a pas de retenue

2) Il y a une facilité pour se rappeler les nombres de départ pour laquelle seule la mémoire auditive joue, alors que , dans la méthode par la droite, l'élève doit garder la mémoire visuelle de l'opération papier/crayon

2) Quelle que soit la grandeur des nombres, il n'y a, au maximum, que deux nombres en mémoire, ce nombre n'augmentant pas en fonction du nombre de chiffres du multiplicande.

4) Bien sûr, la différence de performance des algorithmes est beaucoup plus difficilement décelable si l'on se contente de *petits nombres* . Prenons comme exemple 48 + 24

1) L'algorithme classique et général est le suivant :
Quarante et vingt, soixante
Huit et quatre, douze.
Soixante et douze, soixante-douze[5].

2) Le transposition mentale de l'opération posée donne :
8 et 4, 12. Je pose 2 et je retiens 1.
4 e+ 2 = 6. 6+1 = 7.
72.

Si l'on reprend le dernier exemple donné, il y a , bien sûr, bien d'autres stratégies .Par exemple :

a) Addition d'un nombre avec les unités de l'autre : 48 + 4 = 52; 52 + 20 = 72
b) Utilisation du complément à 10 avec décomposition choisie des unités d'un des nombres
i) 48 +2 = 50 ; 50 + 20 = 70; 70 + 2 = 72
ou
ii) 24 + 6 = 30 ; 30+40=70; 70+2=72
c) Utilisation des compléments à 5
i) 45 + 25 = 70 ; 3-1 = 2 ; 70+2=72
ou
ii) 45+20 = 65; 3 + 4 = 7; 65+7=72
….
Mais la question n'est pas l'inexistence d'autres stratégies mais

1) l'existence d'autres stratégies ne doit pas servir à nier le fait qu'il y ait un algorithme général qui doit être enseigné : il me semble que les élèves devraient maîtriser au minimum , à la fin du primaire , cet algorithme général – voir ce qu'en dit René Taton dans le paragraphe suivant - pour l'addition et la soustraction des nombres de trois chiffres et la multiplication d'un nombre à trois chiffres par un nombre à un chiffre.

2) il y a effectivement une part personnelle dans le choix que fait un élève parmi les cinq autres stratégies que je cite pour calculer 48+24 et il faudrait être un âne bâté complet pour prétendre définir, pour chaque possibilité d'addition de deux nombres à deux chiffres (c'est-à-dire 50 000 cas) quelle est la meilleure

[5] Ici , on peut remarquer que la dénomination française de 70 par soixante-dix au lieu de septante, qui est un obstacle aux débuts de l'apprentissage de la numération, devient un avantage en calcul mental car soixante et douze font naturellement soixante-douze. On a d'ailleurs apparemment oublié les IO de 1945, reprenant celles de 1923 :

> *"Les noms de nombre présentent, comme l'on sait, des anomalies; il peut être avantageux d'employer d'abord les noms qui seraient logiques :*
> *dix-un au lieu de onze;*
> *dix-deux au lieu de douze;*
> *….*
> *dix-six au lieu de seize;*
> *De même utiliser septante, octante et nonante au lieu de soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix. Des leçons complémentaires de vocabulaire feront ensuite correspondre à ces noms théoriques les noms de notre français courant."*

In L. Leterrier, *Programmes, instructions, répartitions mensuelles et hebdomadaires*, Hachette, Edit. 1956; p.251.

stratégie d'autant plus que cela dépend aussi de leurs penchants et facilités personnelles[6]. Mais cette part personnelle de choix n'est une liberté qu'à condition de posséder parfaitement et mécaniquement les sous stratégies que sont, pour le a) , les tables d'addition, et les compléments à 10 et 5 pour le b) et le c).

C) René Taton et la méthode par la gauche

Ces observations sur les avantages du traitement "par la gauche" ne sont pas toutes à fait nouvelles et voilà ce qu'en dit René Taton en 1953 :

> "L'addition par calcul mental diffère assez peu du procédé classique par voie écrite, car ce dernier recourt pour une bonne part à des opérations mentales. Il consiste en effet à écrire les nombres à additionner de telle sorte que les unités de même nom se trouvent alignées en colonnes, puis à additionner colonne par colonne en commençant par la droite et en tenant compte des reports. Tout le déroulement de cette opération est mental, à ceci près que chaque chiffre du résultat est écrit aussitôt qu'il est obtenu : l'addition par colonnes se fait de tête en utilisant la table d'addition et enregistrant les reports de mémoire.
>
> Comment transformer ce mécanisme opératoire en un procédé de pur calcul mental ? Tandis que pour d'autres opérations, on admet la possibilité d'inscrire au début les données du problème et celle d'écrire les chiffres du résultat à mesure qu'on les obtient, ici, on ne peut accepter ces facilités sans retomber sur le procédé écrit. Aussi, ne considérerons-nous qu'une addition est faite mentalement que si l'on s'est interdit d'écrire les termes de la somme à effectuer dès qu'on les énonce.
>
> Dans cette éventualité, la mémoire est appelée à jouer un rôle essentiel dans tout le déroulement de l'opération, l'effort à fournir dépendant à la fois du nombre de termes de la somme et du nombre de chiffres de chacun d'eux. Mais cet effort peut être considérablement réduit si l'on effectue l'addition progressivement, terme par terme, sans attendre que tous ceux-ci soient énoncés. Le mécanisme d'ensemble se ramène donc à une succession d'additions de deux nombres : en même temps que l'effort à fournir se trouve considérablement allégé, le résultat final peut être donné beaucoup plus rapidement.
>
> Pour effectuer mentalement l'addition de deux nombres énoncés seulement sous forme orale, il faut remarquer que, puisque ces nombres sont donnés - et que le résultat doit être énoncé - de la façon courante, c'est-à-dire en allant des unités d'ordre supérieur vers les unités d'ordre inférieur, le calculateur mental aura intérêt à opérer dans cet ordre, et non pas dans l'ordre inverse, adopté pour le calcul écrit." [TAT, p. 13 et 14]

Pour la soustraction (une méthode dont apparemment la commission Joutard ne soupçonne même pas l'existence) :

> "Opération inverse de l'addition, la soustraction consiste, étant donnés deux nombres a et b, à chercher un troisième nombre c qui, ajouté au second, donne le premier (en arithmétique on suppose évidemment a>b, mais les règles de calcul sur les nombres algébriques permettent aisément de généraliser le procédé que nous décrirons).
>
> La méthode classique de calcul écrit revient â opérer colonne par colonne, comme pour l'addition, c'est-à-dire à utiliser la propriété associative de l'opération, en opérant sur les unités successives d'ordre croissant. Le problème des reports se résout, corme on le sait, en extrayant, s'il est nécessaire, une unité de la colonne placée immédiatement à gauche de celle sur laquelle on opère.
>
> Nous supposerons, comme pour l'addition, que les données sont énoncées oralement sans pouvoir être écrites, ce qui nécessite un effort de mémoire équivalent à celui que nous avons signalé. La marche de l'opération mentale diffère profondément du mécanisme classique et se rattache étroitement à un procédé introduit en calcul mécanique par Blaise Pascal : la méthode des compléments, qui consiste à remplacer la soustraction par un calcul de complément suivi d'une addition

---

[6] Je peux dire par expérience que lorsque j'enseigne la multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre – je n'enseigne donc pas seulement l'algorithme général -, je donne comme conseil général d'utiliser l'addition lorsque le nombre à deux chiffres se termine par 1,2,3 ou 4 et la soustraction lorsqu'il se termine par 6,7,8 ou 9. C'est à dire que

7× 41 se calcule en disant 7×40 = 280 ; 7× 1 = 7 ; 280+7 = 287

7 × 48 se calcule en disant 7× 50 = 350 ; 7×2 = 14 ; 350 – 14 = 336, au lieu de 7×40 = 280 ; 7×8 = 56 ; 280 + 56 = 336, ce qui revient à privilégier la taille du nombre par rapport aux différences de difficultés entre l'addition et la soustraction.

Et j'ai pu constater , en laissant la liberté à l'élève de choisir une des deux méthodes , que certains qui, pour des raisons diverses, ont des difficultés avec la soustraction, font des erreurs systématiques s'ils emploient la soustraction , alors qu'ils ne font pas de fautes s'ils emploient l'addition, y compris dans le cas de 7×49 où ils utilisent 280+63 au lieu de 350-7.

10^n étant la plus petite puissance de 10 qui soit supérieure au nombre b à soustraire, nous appellerons complément du nombre b, la différence $c = 10^n - b$. Ceci étant posé, le principe de cette transformation est le suivant

$$a - b = a + 10^n - b - 10^n = a + (10^n - b) - 10^n = a + c - 10^n$$

On voit immédiatement que le complément c du nombre b est un nombre formé d'autant de chiffres que b, chacun de ses chiffres étant le complément à 9 du chiffre correspondant de b, sauf le dernier à droite qui est le complément à 10 du chiffre homologue. Les lecteurs familiarisés avec le calcul logarithmique sont habitués à employer couramment de tels compléments qui leur permettent de ramener toute soustraction de logarithmes à une addition.

Soit à soustraire 729 de 3 412. Le complément de 729 s'obtient chiffre par chiffre à partir de la gauche deux, sept, un: 271

La somme de 3 412 et de 271 s'obtient par la méthode précédemment décrite : elle est égale à 3 683. Il ne reste plus qu'à soustraire de ce résultat intermédiaire le nombre 10^n soit ici 1 000 : le résultat final est donc 2 683." [TAT, p. 16 à 18]

Pour la multiplication, en tenant compte du fait que le but de René Taton est d'expliciter les méthodes qui permettent de calculer mentalement dans des cas où les deux facteurs ont au moins deux chiffres :

"Quel que soit le procédé utilisé, la multiplication de deux entiers revient à additionner les produits partiels des diverses unités qui les composent.

Par exemple : $324 \times 75 = (300 + 20 + 4) \times (70 + 5) = 300\times70 + 300\times5 + 20\times70 + 20\times5 + 4\times70 + 4\times5$.

Le procédé classique de multiplication écrite groupe, dans un premier produit partiel, les produits de 5 par 300, 20 et 4 et, dans un second produit partiel, les produits de 70 par ces mêmes nombres; il ne reste plus qu'à additionner les produits partiels ainsi obtenus.

On peut très bien concevoir une multiplication mentale réalisée sur ce même schéma, mais, pour la raison précédemment signalée, il est alors préférable d'inverser l'ordre des produits partiels, calculant d'abord le produit de 70 par 324 et en lui ajoutant le produit de 5 par ce même nombre, Afin de pouvoir opérer ainsi, il suffit de savoir multiplier mentalement un entier quelconque par un nombre de un chiffre.

Soit par exemple à multiplier *trois cent vingt-quatre* par *sept*.

Le produit de trois cents par sept est égal à vingt et une centaines, soit *deux mille cent*.

Le produit de vingt par sept est égal à quatorze dizaines, ce qui fait un total provisoire de *deux mille deux cent quarante*. Le produit de quatre par sept est égal à vingt-huit, ce qui donne un produit définitif de deux mille deux cent soixante-huit.

La méthode suivie a été celle du calcul écrit, à ceci près que, les opérations étant faites dans l'ordre inverse, les reports ont nécessité des retours en arrière et des rectifications."[TAT, p. 19 et 20]

D) ERMEL 81

"Calcul écrit ou mental ? Automatique ou pensé?[ECM, P.97]

A la distinction « calcul écrit », « calcul mental », nous en préférons une autre, beaucoup plus nette et fondamentale : « calcul automatique » et « calcul pensé ». En effet le calcul mental se distingue mal du calcul écrit, lorsque le calculateur fait simplement l'effort de mémoire de « poser l'opération dans sa tête ». De même, pour effectuer «mentalement » un calcul il peut parfois être utile de noter quelques résultats intermédiaires, l'essentiel du travail restant mental.

Ce qui caractérise le calcul automatique (ou mécanique) c'est l'emploi systématique, quels que soient les nombres, pour une opération donnée, d'un algorithme unique : emploi d'une technique écrite, d'un matériel (boulier, règle à calcul, réglettes de Neper, machine à calculer, table de logarithmes...), ou d'une règle de calcul mental.

C'est la génération parfaite, qui peut fane espérer rapidité, fiabilité, disponibilité d'esprit, économie dans la mémorisation des procédés, puisqu'on va même le plus souvent jusqu'à (oubli de la justification des dits procédés. L'inconvénient majeur est qu'en cas d'utilisation trop peu fréquente de ce type d'outil le risque est grand de se retrouver totalement désarmé; c'est ce qui se produisait avec certains algorithmes comme la division, ou l'extraction de racines carrées, que la plus grande part des adultes ont souvent oubliés."

Lorsque Ermel écrit :

"A la distinction « calcul écrit », « calcul mental », nous en préférons une autre, beaucoup plus nette et fondamentale : « calcul automatique » et « calcul pensé ». En effet le calcul mental se distingue mal du calcul écrit, lorsque le calculateur fait simplement l'effort de mémoire de « poser l'opération dans sa tête »."

l'ensemble de la problématique est posée : on peut effectivement dire que la distinction calcul écrit / calcul mental n'est pas fondamentale lorsque l'on a réduit le calcul mental à *faire simplement l'effort de mémoire de « poser l'opération dans sa tête »*, car à partir de ce moment , il n'y a plus de calcul mental et l'on peut donc prouver par là même que l'opposition calcul mental/ calcul écrit n'est pas pertinente et que toute autre l'est (*automatique* / *pensé* par exemple). Le fin de la démonstration est tout aussi claire :

> A ce titre le calcul mental pensé est le domaine privilégié où l'on se doit de laisser les élèves assumer leur individualité, tout en utilisant le groupe pour donner à chacun l'occasion d'adhérer à des solutions proposées par d'autres. En effet, contrairement au calcul écrit, où les algorithmes culturels ont une telle vigueur qu'il est très difficile de ne pas y amener les élèves, en calcul mental il est de plus en plus admis que chacun puisse compter «comme il lui plaît» [ECM, III. Finalités et Buts des activités de calcul mental, page. 100]

Pourquoi Ermel choisit-il le calcul mental comme "*le domaine privilégié où l'on se doit de laisser les élèves assumer leur individualité, tout en utilisant le groupe pour donner à chacun l'occasion d'adhérer à des solutions proposées par d'autres"* ?

La réponse est claire : "*contrairement au calcul écrit, où les algorithmes culturels ont une telle vigueur qu'il est très difficile de ne pas y amener les élèves, en calcul mental il est de plus en plus admis que chacun puisse compter «comme il lui plaît»* " .

Nous voulons bien croire que, le domaine du calcul mental étant peu connu, il était plus facile de faire croire qu'il n'y a pas de règles à connaître pour effectuer les calculs, formule avantageusement présenté sous le signe de la liberté de l'élève qui peut *compter «comme il lui plaît»*. Nous avons vu plus haut, sur l'exemple de l'addition, que la condition pour que l'élève calcule *comme il lui plaît* est qu'il ait acquis un certain nombres de mécanismes qui n'ont rien de personnel et dont il ne peut concevoir la nécessité complète au moment où il les apprend : les tables d'addition et les compléments à 5 et 10 doivent être appris en CP avant qu'il soit possible de lui demander de calculer mentalement 48 + 24.

Cette présentation du calcul mental n'a donc pas pour but d'apprendre aux enfants le calcul mental mais simplement de faire passer l'idée, dans un domaine où il y a moins de résistance que celui du calcul écrit, qu'il n'y a pas d'algorithmes à enseigner, ceux-ci étants, comme le dit le rapport de l'AMS , *un moyen uniforme de résoudre une classe entière de problèmes*. Il suffit d'ailleurs de lire le texte complet de la présentation du calcul mental d'ERMEL[7] pour voir que les arguments employés sont exactement de même nature que ceux qui justifient la non-nécessité d'apprendre la division à la main. Et ils sont de même nature que ceux qui ont justifié qu'il n'était pas nécessaire de donner une *définition* de la multiplication. Le monde est tellement changeant …

Et la commission Joutard peut même se targuer de résultats mirobolants[8] puisque, pour l'évaluation sixième 2002, la DPD a choisi des calculs mentaux qui permettent de dissimuler l'échec : encore les *petits nombres* , comme pour la division, nombres sur lesquels il y a peu de différences entre l'algorithme classique et les *procédures personnelles* .

D'ailleurs voici les calculs posés à cette évaluation et les pourcentages de réussite :

Opérations	Pourcentages de réussite
Cent quatre-vingt-dix-huit plus dix	84,1
Cent vingt-trois plus deux dizaines	73,8
Trente-sept divisé par dix	56,0
Sept multiplié par dix mille.	87,9
Quatre cent cinq moins dix.	80,8

[7] http://michel.delord.free.fr/ermel-cm.pdf

[8] Du moins presque mirobolants puisque 44% d'échec pour 37: 10 n'est pas vraiment un résultat remarquable.

Vous trouverez en annexes

I) Exemples de multiplication en calcul mental : 7×743 et 47×68
II) Deux exemples de liaison du calcul mental avec l'algèbre et la géométrie
III – Extraits de *A propos de l'évaluation sixième 2004 : Quelques recettes bureaucratiques pour positiver l'échec … et couler les opposants* (Rajouté le 1er septembre 2005)

D'autre part, pour la vision des années 1880 du calcul mental, il n'est pas inutile de lire :

a) L'article *Calcul intuitif* de Ferdinand Buisson qui vise le tout début de l'apprentissage du calcul

http://michel.delord.free.fr/fb-calcintuit.pdf

b) L'article *Calcul* de Ferdinand Buisson qui précède *Calcul intuitif* dans le Dictionnaire pédagogique

http://michel.delord.free.fr/fb-calc.pdf

c) L'article *Calcul mental* de G. Bovier-Lapierre dans le Dictionnaire pédagogique

http://michel.delord.free.fr/dp-calcment.pdf

Bonne lecture

Michel Delord , le 16 Octobre 2003

Annexes

I) Exemples de multiplication en calcul mental : 7 × 743 et 47 × 68

Méthode par la gauche :

Calculs (et travail mental)	**Nombres en mémoire** (outre sept, sept cent quarante-trois)
Sept fois sept cents, quatre mille neuf cents	Quatre mille neuf cents
Sept fois quarante, deux cents quatre vingt	Quatre mille neuf cents, deux cents quatre vingt
Quatre mille neuf cents et deux cents quatre vingt, cinq mille cent quatre-vingt	Cinq mille cent quatre-vingt
Sept fois trois, vingt et un	Cinq mille cent quatre-vingt, vingt et un
Cinq mille cent quatre-vingt et vingt et un, **Cinq mille deux cent un ou 5201**	

Méthode par la droite :

Calculs (et travail mental)	**Nombres en mémoire** (outre sept, sept cent quarante-trois)
7× 3 = 21; je pose 1 et je retiens 2	1 (unités) , retenue 2
7×4 = 28 ;	1 (unités), retenue 2, 28 (dizaines)
28+2 =30	1 (unités) , 0 (dizaines), retenue 3
7×7 = 49	1 (unités) , 0 (dizaines), retenue 3, 49 (centaines)
49 +3 = 52	1 (unités) , 0 (dizaines), 52 (centaines)
5201	

La méthode par la droite devient très rapidement inutilisable lorsque le nombre de chiffres des facteurs augmente par contre on peut développer des méthodes de calcul mental – mais demandant un fort entraînement – pour calculer des multiplications comportant plus de deux chiffres par facteur[9].

Donnons l'exemple de la limite supérieure de ce qui est faisable en primaire / collège, c'est-à-dire la multiplication de deux nombres à deux chiffres. Soit , par exemple à calculer 47× 68.

$47\times68 = (40 + 7)\times(60+8)= 40\times60+40\times8+7\times60+7\times8$

Pour le calcul mental, on l'écrit sous la forme $40\times60+ (4\times8+7\times6)\times10+7\times8$, le calcul s'énonçant :

Quarante fois soixante, deux mille quatre cents.
Quatre fois huit plus sept fois six, soixante quatorze. Sept cent quarante.
Deux mille quatre cents et sept cent quarante, trois mille cent quarante.
Sept fois huit , cinquante six.
Trois mille cent quarante et cinquante six, ***trois mille cent quatre-vingt-seize***.

Il faut visuellement se rappeler de la disposition

4 7
6 8 et mémoriser : *produit des dizaines, produit en croix, produit des unités.*

Une bonne approche écrite, mais à ne pas faire avant que soit mis en place de manière sûre la multiplication, qui permet de justifier l'algorithme mental sans utiliser le produit de deux sommes est de faire effectuer la multiplication 47× 68 ainsi :

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 7 \\ & \times & 6 & 8 \\ \hline 3 & 1 & 9 & 6 \end{array}$$

8×7 = 56 . Je pose 6 et retiens 5
4×8+7×6 = 74. 4 + 5= 9. Je pose 9 et retiens 7.
6×4 = 24. 24+7 = 31

[9] Voir la partie consacrée à la multiplication dans :
http://michel.delord.free.fr/taton.pdf

II) Deux exemples de liaison du calcul mental avec l'algèbre et la géométrie

A) Multiplication auvergnate

a) Règle : (calcul sur les doigts)

1) Mettre ses mains la paume vers l'avant.

2) Pour chaque main, en commençant par le pouce qui représente 6 et en remontant, l'index représente 7, le majeur 8, l'annulaire 9, l'auriculaire 10.

3) Pour effectuer une multiplication, mettre les doigts correspondants aux nombres l'un en face de l'autre.
Pour multiplier 6 par 7, on met le pouce gauche (6) en face de l'index droit (7)

4) On compte les doigts qui se touchent et ceux qui sont au dessous: chacun compte pour 10
Pour 6 fois 7, on a donc 3 doigts ce qui fait 3 fois 10 = 30

5) On compte les autres doigts de chaque main et on multiplie les deux nombres obtenus
Pour 6 fois 7, il reste 4 doigts pour la main gauche et 3 doigts pour la main droite . 4 fois 3 égal 12.

6) Le résultat de la multiplication est égal à la somme du nombre trouvé au 4) et au 5).
Pour 6 fois 7, on trouve 30 + 12 = 42

b) Utilisation pédagogique

Apprentissage de la table de multiplication pour tous les couples supérieurs à 5. Suppose la connaissance des tables jusqu'à 5 fois 5. Utilisation de la main comme calculatrice non primitive.

c) Justification algébrique (niveau collège)

Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ représentent les nombres correspondants aux doigts de chaque main

$$(x - 5 + y - 5) \times 10 + (10 - x)(10 - y) = xy$$

Donc, si un être *humain* a $\boldsymbol{a}$ doigts à chaque main, il peut aussi utiliser ses mains comme calculatrice puisque

$$(x + y - 2a) \times 2a + (2a - x)(2a - y) = xy$$

B) Multiplication de deux nombres compris entre 10 et 20

a) Règle:

Pour trouver le produit de deux nombres compris entre 10 et 20,
on ajoute au premier nombre les unités du deuxième nombre ,
on écrit un zéro à la droite du total,
on ajoute à ce total le produit des unités des nombres proposés.

Pour 13 fois 18, on fait 13 + 8 = 21 auquel on ajoute un zéro : 210. 3 fois 8 égal 24 . Le résultat est donc 210 + 24 = 234.

b) Utilisation pédagogique

1) Dés que les élèves connaissent leurs table (CE) , un entraînement régulier à ce type de calcul mental permet (sans la justification) de connaître à terme par cœur les tables jusqu'à 20×20.

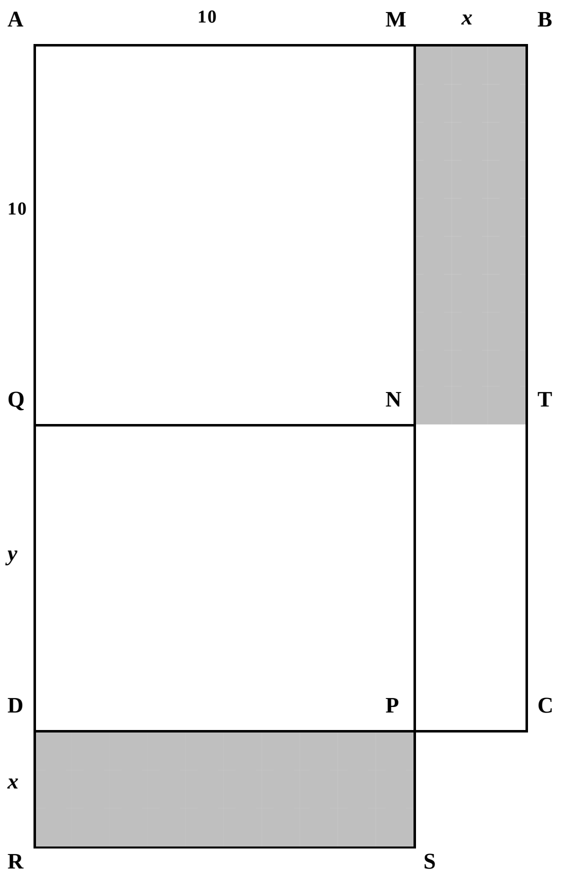
2) Une utilisation ultérieure est le calcul mental de la suite de deux augmentations en pourcentage : deux augmentations successives de 30% et 80% correspondent à un facteur $1{,}3\times1{,}8 = 2{,}34$. C'est-à-dire une augmentation globale de 134%.

c) Justification :

1) A partir de l'algorithme de la multiplication posée :

		1	8
	×	1	3
		3×1 + 2	4
	1	8× 1	
	1	8 + 3 + **2**	4
Nombre de dizaines :		18+3 = 21	
Nombre d'unités :		210	20+4 = 24

2) Géométrique



$1x\times1y$ représente l'aire du rectangle ABCD.

Mais l'aire de MBTN est égale à l'aire de DPSR. Donc l'aire de ABCD est la somme de l'aire de AMSR et de celle de NTCP.

Aire de AMSR : $(10 + x + y)\times10$
Aire de NTCP : xy

Aire de ABCD **:** $(10 + x + y)\times10 + xy$

3) Justification algébrique

Si les deux nombres sont $1x$ et $1y$
$1x \times 1y = (10 + x)(10 + y) =$
$10(10 + y) + x(10 + y) = 10(10 + y) + 10x + xy = (x + y + 10)\times10 + xy$

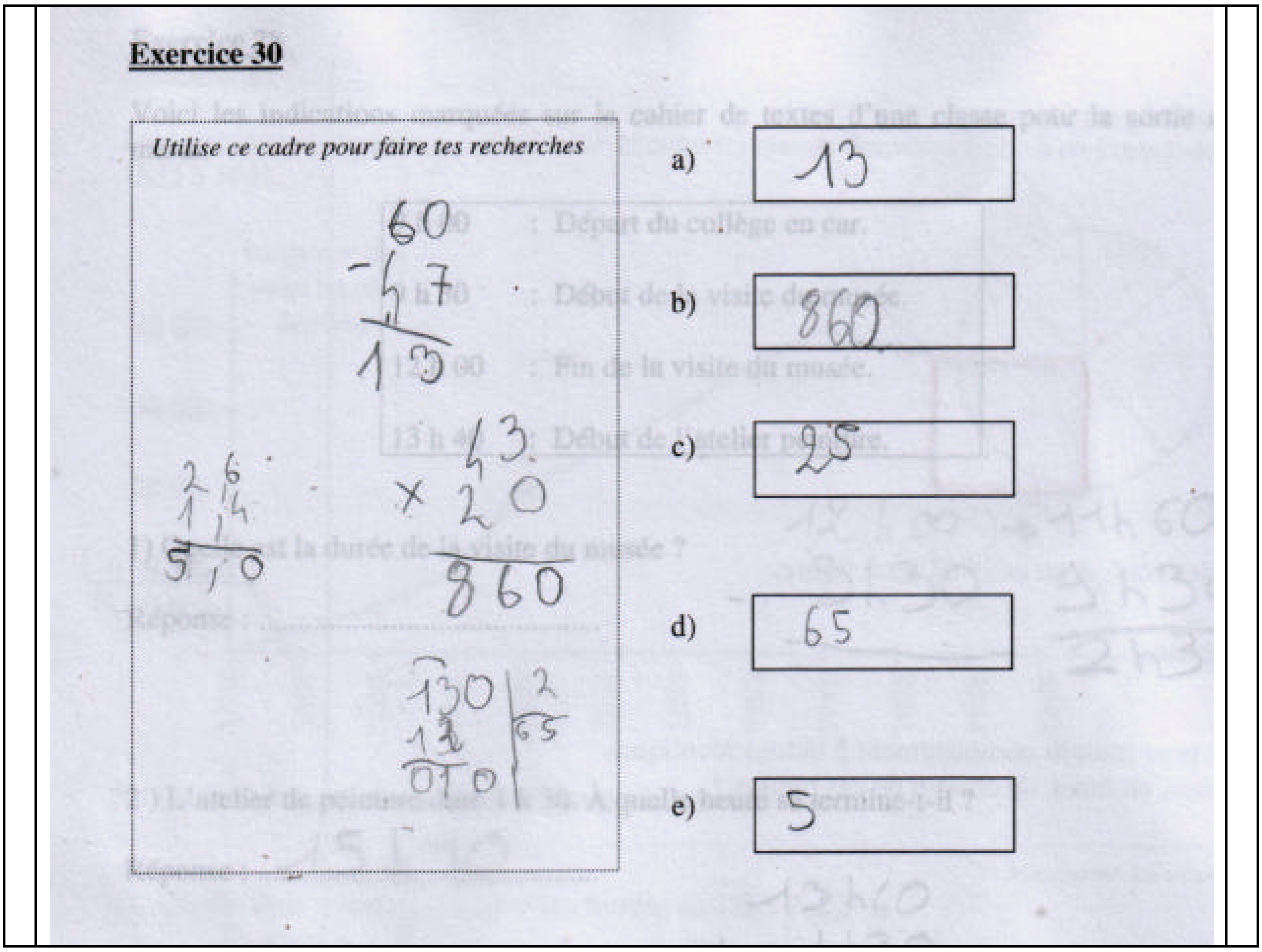
III – Extraits de *A propos de l'évaluation sixième 2004 : Quelques recettes bureaucratiques pour positiver l'échec … et couler les opposants*[10]

L'exercice 30 :

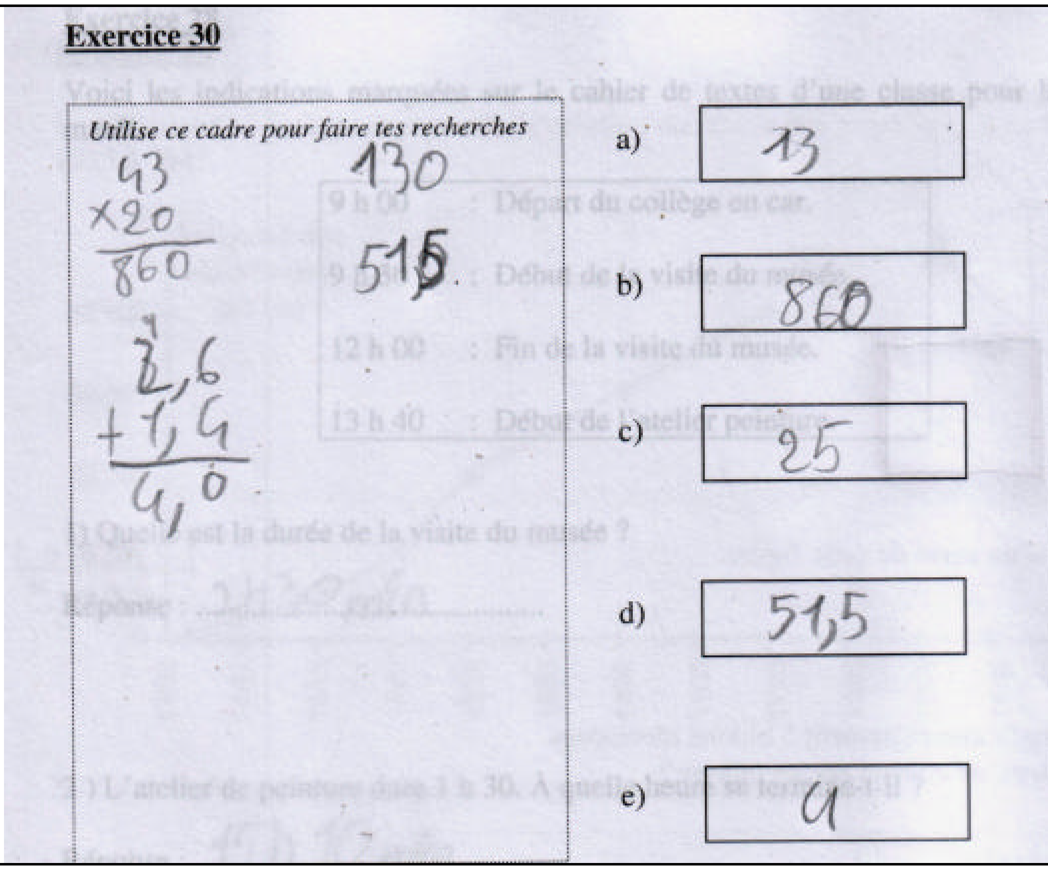
Le cahier du professeur donne des consignes très précises (*dignes d'une expérimentation scientifique ?*) pour présenter cet exercice :

> *Dire : « Ce premier exercice est un exercice de calcul mental. Il est composé de cinq calculs. Je vous lirai chaque calcul deux fois. Puis je vous laisserai 15 secondes pour répondre. Un cadre est prévu pour vos recherches. »*
> *a) Dire : « Dans la case a), écrivez le résultat de : combien faut-il ajouter à quarante-sept pour obtenir soixante ? » (bis)*
> *b) Dire : « Dans la case b), écrivez le résultat de quarante-trois multiplié par vingt. » (bis)*
> *c) Dire : « Dans la case c), écrivez le résultat de cent divisé par quatre. » (bis)*
> *d) Dire : « Dans la case d), écrivez le résultat de la moitié de cent-trente. » (bis)*
> *e) Dire : « Dans la case e), écrivez le résultat de deux virgule six plus un virgule quatre. »(bis)*

Les réponses justes sont donc 13, 860, 25, 65, 4. Tout semble normal sauf un petit détail : il s'agit de *calcul mental* et l'on prévoit un *cadre* dans lequel les élèves pourront écrire leurs *recherches*. Il faut être un spécialiste du volapuk de la didactique des mathématiques pour saisir tout le sel de la chose - j'y reviendrai - mais voyons ce que les élèves ont fait de ce cadre.



[10] Version complète à http://michel.delord.free.fr/promo.pdf



Exercice 30

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

43
×20
860

130

515

2,6
+1,4
4,0

a) 13

b) 860

c) 25

d) 51,5

e) 4

Les élèves ont donc posé les opérations : ce qui facilite bien … le calcul mental puisqu'il devient du calcul écrit, qui plus est sur des petits nombres particulièrement peu élevés; on peut donc considérer que le niveau en calcul mental des élèves va progresser, ce qui n'est pas un petit argument contre ceux qui affirment que le niveau baisse, ce qui est déjà un premier résultat positif pour les maîtres pédagogues qui ont la haute main sur les destinées de l'école. Mais ce n'est pas tout et pour comprendre un autre enjeu, il faut - et je m'en excuse- rentrer dans les détails du sabir didacticien.

En effet depuis les années 70/80, la pédagogie moderne a trouvé que l'opposition calcul mental/ écrit était dépassée et qu'il fallait introduire un nouveau concept qui est celui de "calcul réfléchi" qui mélange les deux. Un des résultats principaux de cette formidable découverte est que les élèves ne savent plus faire de calcul mental au sens strict et surtout qu'ils font le calcul mental comme du calcul écrit, c'est-à-dire en commençant par le calcul par les chiffres de droite puisque la règle générale du calcul mental *on commence toujours à calculer par la gauche* n'est plus enseignée. Ils sentent donc extrêmement mauvais en calcul mental, ce qui est d'ailleurs vrai mais inévitable : que le lecteur essaye de calculer mentalement 754×7 en commençant par la droite et par la gauche et il verra l'énorme difficulté à commencer par la droite.

Quoi qu'il en soit, il existe donc deux types d'instituteurs en France suivant la méthode selon laquelle ils apprennent le calcul mental aux élèves (qui, rappelons le, est un objectif central de l'enseignement des mathématiques, proclamé par ceux-la même qui ne savent pas que l'on commence par la gauche)
- ceux qui apprennent le vrai calcul mental, c'est-à-dire celui dans lequel on n'écrit que le résultat (des ringards, donc)
- ceux qui apprennent le calcul réfléchi conforme au dogme des nouveaux programmes

Nous sommes donc à même de comprendre à peu prés la signification de l'exercice 30 consacré au "calcul mental avec un cadre pour écrire".

Les élèves des professeurs des écoles de la deuxième catégorie auront d'excellents résultats puisqu'ils sont habitués poser les opérations du calcul mental et qu'on les y invite. Quant à ceux qui font le calcul mental mentalement, ils auront de mauvais résultats.

Et l'on pourra prouver une fois de plus que la nouvelle pédagogie qui sévit depuis 30 ans est meilleure.