Précisons nos divergences
Réponse sur un point à Roland Charnay et à la commission Joutard
Partie II

> We would like to emphasize that the standard algorithms of arithmetic are more than just “ways to get the answer”—that is, they have theoretical as well as practical significance.
> *Reports of AMS Association Resource Group*
> *Notices of the AMS, Vol.45, N° 2, Feb. 1998*

Précisons nos divergences

Si l'on prend la question de l'apprentissage des algorithmes des opérations, on s'aperçoit par exemple que ni la commission Joutard ni la CREM ne prennent position sur la nécessité de leur apprentissage ou d'une manière suffisamment floue, sans expliciter ce que veut dire connaître cet algorithme, pour que leur position puisse être interprétée dans diverses directions.

Je vais donc essayer de définir précisément ce que j'entends par là.

Les algorithmes des opérations arithmétiques

Entendons nous d'abord sur ce que nous entendons par algorithme des opérations et tout d'abord sur ce qu'est un algorithme.

Algorithme

> The most important thing is that algorithms exist; there are uniform ways of solving an entire class of problems.
> It is important to understand that in learning an algorithm you are confronting the essence of the phenomenon with which the algorithm deals, since it is guaranteed to accomplish its aim. Also, that, once learned, the algorithm gives you automatic mastery over the topic.
> Thirdly, there is the demystification of machines: your calculator and your computer perform algorithms—in fact, that is all they do. Limitations on the algorithms limit the processes they can handle.
> Again, it is important to distinguish between an algorithm and what it accomplishes
>
> *Reports of AMS AR G Op. cit.*

Un algorithme est une suite de directives qui permet, strictement appliqué à la résolution d'un problème ,

i) d'en trouver la solution

ii) dans tous les cas possibles, sans exception,

iii) pour la classe de problèmes pour laquelle il est défini. Il s'agit en quelque sorte d'une recette infaillible et les recettes de cuisine sont d'ailleurs des algorithmes qui permettent d'arriver, en les suivant scrupuleusement, au résultat prévu.

iv) En mathématiques, la véracité de l'algorithme se démontre

v) La démonstration une fois établie, que celui qui utilise l'algorithme connaisse la démonstration ou ne la connaisse pas, si l'application de l'algorithme ne donne pas le résultat escompté, c'est soit que l'on ne l'a pas suivi, soit qu'on l'a appliqué à un problème qui ne fait pas partie de la classe pour laquelle il a été prévu.

vi) Ces deux dernières vérifications sont réalisables par une personne, l'utilisateur de l'algorithme, qui n'est pas obligatoirement capable d'apporter la preuve de sa véracité.

Ceci admis, lorsque l'on a un problème à résoudre, il est possible de disposer de plusieurs algorithmes pour arriver au même résultat. La question se pose donc de savoir quel est celui qui est le plus performant dans une situation donnée . Par exemple , pour calculer le carré d'une somme de deux nombres, on démontre mathématiquement l'équivalence des résultats des deux algorithmes

Algorithme 1

1) Ajouter les deux nombres
2) Calculer la carré de la somme obtenue

Algorithme 2

1) Calculer le carré du premier nombre
2) Calculer le carré du deuxième nombre
3) Calculer le double du produit des deux nombres
4) Ajouter les résultats obtenus

Ces deux algorithmes permettent d'arriver au résultat exact dans tous les cas prévus mais
- pour calculer $(0,5 + 0,5)^2$, le premier algorithme est plus rapide
- pour calculer $(40+1)^2$ en calcul mental , le deuxième est plus approprié
La démonstration de la validité de l'algorithme est normalement faite au niveau quatrième.

Enseignement des algorithmes des opérations

Je me contenterai d'aborder la question des algorithmes des quatre opérations sur les entiers et les décimaux et de poser quelques questions publiques à ce sujet.

Une double question se pose :

- 1) Faut-il enseigner la démonstration mathématique de la validité de ces algorithmes ? A quel niveau ?
- 2) Faut-il que les élèves maîtrisent ces algorithmes ? si oui, a quel niveau ?

- 1) Faut-il enseigner la démonstration mathématique de la validité de ces algorithmes ? A quel niveau ?

Les diverses commissions de programmes sont muettes sur le sujet.

A mon sens, cet enseignement doit faire partie de la scolarité du lycée comme élément de la culture mathématique car il s'agit d'un domaine que l'élève peut maîtriser pratiquement et sur lequel on peut lui faire comprendre donc la nécessité de la démonstration mathématique . De toutes façons , cela doit faire partie de la culture nécessaire de tout enseignant, quelle que soit sa matière, ce qui suppose aussi que ce soit enseigné au lycée dans toutes les sections. De toutes façons, la compréhension de la démonstration de la validité de ces algorithmes suppose leur maîtrise en tant qu'utilisateur. Et elle ne se pose même si l'on ce qui nous amène au point suivant.

- 2) Faut-il que les élèves maîtrisent ces algorithmes ? Si oui, a quel niveau ?

Que signifie maîtriser ces algorithmes? Simplement que les élèves doivent savoir faire les opérations sur les entiers et les décimaux, ce qui signifie qu'ils doivent savoir le faire dans tous les cas et quel que soit la taille des nombres envisagés. Comme il ne s'agit pas de faire faire une division euclidienne d'un nombre à trente chiffres par un nombre à 10 chiffres pour s'en assurer , il faut examiner

- quel doit être la méthode d'enseignement et la taille minimum des nombres utilisés pour pouvoir se permettre de dire que l'élève en a compris le principe. Ceci est à mon sens le début de sa capacité à l'abstraction mathématique car comme le dit Tony Gardiner : "*Large numbers may look concrete, but too calculate efficiently one has to treat them abstractly*"[1]

[1] Tony Gardiner, *Recurring themes in school mathematics*, UK Mathematics Foundation, 1992, page 7.

- la nature de ce qui est recommandé actuellement et qui ne permet pas à mon sens de dire que l'élève en a compris l'algorithme , et qui permet au contraire de dire qu'il ne l'a pas compris.

La position de la commission Joutard :

Le calcul posé

Le travail sur les techniques usuelles (calcul posé) doit faire l'objet d'un recentrage. Pour l'addition, la soustraction et la multiplication, leur usage dans des cas simples (en particulier résultat à deux, trois ou quatre chiffres) doit être assuré. Cependant une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées, ce qui conduit à retarder un peu leur mise en place (par rapport à ce qui est fait habituellement) : à fin du cycle 2 pour la technique de l'addition et au cycle 3 pour celles de la soustraction et de la multiplication. Pour la division, on se limitera à des calculs posés simples à la fin du cycle 3 (du type 432 divisé par 7 ou 432 divisé par 35), calculés en gardant la trace des soustractions effectuées et en ayant la possibilité de poser des produits annexes. Il est essentiel que, bien avant que les techniques écrites usuelles ne soient mises en place, les élèves soient invités à produire des résultats en élaborant et en utilisant des procédures personnelles, non standard (mentalement ou en s'aidant d'un écrit).[2]

Les cas de l'addition, soustraction, multiplication

Sans trahir , je le pense , les positions de la commission Joutard on peut dire qu'elle défend l'idée qu'il suffit , en primaire que les seuls résultats "assurés" doivent correspondre pour l'addition , la soustraction, la multiplication a des opérations dont le résultat a , au maximum, quatre chiffres. Voyons en les conséquences.

Nous passerons sur le cas de l'addition et de la soustraction car , même si la commission Joutard ne s'est manifestement pas posé la question, le fait de savoir additionner ou soustraire des nombres avec un résultat à quatre chiffres permet de saisir le principe de leurs algorithmes :on peut le constater expérimentalement, même sui les élèves ne connaissent pas leurs tables, je n'ai vu jusqu'à présent aucun élève qui sait faire une addition de deux nombres a trois chiffres et qui , face à une addition de deux nombres a six chiffres dit : "Monsieur, je ne sa1s pas les faire" . On verra que la situation est complètement différente pour la division.

Le cas de la multiplication devient plus intéressant car si les résultats d'une multiplication n'ont que 4 chiffres, un des nombres peut avoir deux chiffres et comme le point de passage difficile dans l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication est la multiplication par un nombre à deux chiffres, qui correspond à l'introduction du décalage , cette limitation ne gène pas , a priori, l'apprentissage du principe de l'algorithme de la multiplication des entiers.

Ceci pose cependant le problème de l'apprentissage de la multiplication par un nombre à trois chiffres pour s'assurer de la compréhension du principe de l'algorithme.

Dans ce qui probablement un des meilleurs livres des dernières années "Knowing and Teaching Elementary Mathematics [3], *Tr.Wang* remarque , après avoir expliqué que le point crucial est l'apprentissage de la multiplication par un nombre à deux chiffres : " *Pour vous dire la vérité , je n'enseigne pas à mes élèves la multiplication par un nombre à trois chiffres. Je les laisse plutôt l'apprendre par eux-mêmes…. Une fois qu'ils ont une claire idée du concept et une pratique suffisante , ils deviennent efficients dans la pratique de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Je suis vraiment sûr qu'à ce moment-là, ils sont capables d'apprendre par eux-mêmes la multiplication par un nombre quelconque de chiffres*"

---

[2] Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle des approfondissements (cycle 3), CNDP, Paris, Fevrier 2002.pages 6 et 7.
http://www.cndp.fr/textes_officiels/ecole/math_Ecole_C3.pdf

[3] Liping Ma, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey and London, p. 46.

Donc, même si pour Tr. Wang, le nœud est bien la multiplication par un nombre à deux chiffres , il ne nie pas la nécessité d'apprendre la multiplication par un nombre à plus de deux chiffres mais au contraire donne sa réponse à la question " comment le faire ?. Cette option est d'ailleurs celle qui sous tendait tout manuel jusqu'au moment où on a commencé à dire qu'il suffisait d'apprendre les opérations sur les petits nombres (d'ailleurs sans aucune justification sur ce que veut dire petit ou grand). Il y figurait toujours trois leçons : multiplication par un nombre à un chiffre , deux chiffres , trois chiffres qui étaient considérées comme suffisant pour maîtriser l'algorithme.

Mais la position de la commission Joutard n'est pas celle-là, car si le résultat comporte 4 chiffres au maximum, cela signifie qu'il n'envisage pas la nécessité de l'apprentissage de la multiplication par un nombre à trois chiffres au primaire.. Et , comme au collège il n'y a aucune précision sur la nécessité d'apprendre complètement l'algorithme de la multiplication des entiers, a priori , on peut dire qu'il n'y a aucune volonté chez les rédacteurs de programmes que cet algorithme soit connu , sans l'affirmer clairement bien sur et en se réfugiant dans des formulations troubles.

Quoi qu'il en soit , il y a une question supplémentaire à poser à la commission Joutard et en particulier à R. Charnay qui a eu un rôle d'encouragement aux pratiques pédagogiques dominantes depuis 20 ans :

Comment se fait-il que nous ayons

- pour l'évaluation 2000
  - une réussite de 66,7% à 45 × 19
  - une réussite de 60,5% à 523 × 305
- pour l'évaluation 2001
  - une réussite de 53,8% à 64 × 39

alors que toute la critique récurrente depuis trente ans était de prétendre que, *avant*, on réduisait la compréhension des opérations à leur techniques,, c'est-à-dire que cela revenait à reconnaître que, au moins , on savait les faire ?

D'autre part, une question pédagogique à la commission Joutard : quel est l'objectif pédagogique visé sur l'apprentissage des opérations lorsqu'on détermine la nécessité de l'apprentissage de l'opération posée par le nombre de chiffres du résultat ?

Mais il y a une autre question qui se pose pour le collège puisque doit être introduite maintenant à ce niveau la multiplication des nombres décimaux . Même si l'on n'approuve pas ce retard , ce qui est mon cas, on peut essayer de voir les difficultés qu'imposent la pédagogie officielle. La principale est la suivante.

La principale difficulté de l'algorithme de la multiplication des décimaux est la compréhension du fait que l'on place la virgule au produit en en additionnant le nombre de décimales des facteurs du produit.

Si l'on ne dispose que des multiplications des entiers dont le produit comporte au maximum 4 chiffres, on ne peut donner, pour vérifier la règle, que des exemples du type 0,2 × 0,436 = 0,0872 à 0,83 × 0,35 =0,2905 pour donner le maximum d'extension à la règle permettant de prévoir le nombre de décimales du produit.

C'est-à-dire que la règle d'addition du nombre des décimales ne peut être appliquée qu'aux cas
0+1=1 ; 0+2=2 ; 0+3=3;0+4=4
1+1=2 ; 1+2=3 ; 1+3=4
2+2=4

Ce qui est nettement insuffisant et ne permet pas bien de distinguer la faute classique – que l'on retrouvera ensuite sur les produits de puissance – qui est le résultat $a^p \times a^q = a^{p\times q}$ au lieu de a^{p+q} car les élèves ne voient vraiment la différence que pour p et q supérieurs à (2,2) car , justement 2+2=2×2.

On peut donc dire, au minimum que la commission Joutard et les diverses commissions de programmes de primaire et ce collège ne visent pas l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication des décimaux , bien que, bien sûr , tout soit exprimé dans un langage totalement flou. Rien n'est dit de plus, dans les programmes de sixième, que :

Contenu	**Compétences exigibles**	**Commentaires**
2.1. Nombres entiers et décimaux: écriture et opérations.		On consolidera et on enrichira les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération et au sens des opérations en les mobilisant dans l'étude de situations rencontrées au collège. On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes.[4]
	Utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens. Multiplier et diviser un décimal par 10 ; 100 ; 1000 ou par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.	La multiplication et la division par une puissance de dix sont à relier à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités.
Techniques opératoires.	Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique.	La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de sixième, tant du point de vue du sens que de la technique.

Et, dans le commentaires :

"*C'est en 6e que le professeur doit désormais conduire l'apprentissage de la multiplication de deux décimaux qui était autrefois entrepris à l'école élémentaire. Il ne s'agit pas là de rechercher une virtuosité dans le domaine du calcul, mais de donner du sens à cette opération ainsi que des moyens de contrôle aux élèves pour le calcul avec les machines.*"

Rappelons , que , dans le cas de l'utilisation de machines , intervient , pour les nombres qui ont "trop de décimales " , la notation en virgule flottante qui n'est qu'au programme de quatrième.

Et, bien plus, rien n'est dit ni dans les programmes de cinquième ni dans les suivants sur la multiplications des décimaux . Ce qui est sous-entendu est que , par exemple 2,743×3,12 doit être calculé – si l'on ne se contente pas d'utiliser la machine- en utilisant $\frac{2743}{1000} \times \frac{312}{100} = \frac{855816}{100000} = 8{,}55816$.

Ceci peut sembler sympathique mais avait <u>une cohérence lorsque l'élève savait, d'une part calculer directement</u> 2,743×3,12 <u>comme multiplication de décimaux et qu'il était capable de suivre le raisonnement présent dans la suite d'égalités</u> $\frac{2743}{1000} \times \frac{312}{100} = \frac{855816}{100000} = 8{,}55816$ <u>pour comprendre les raisons qu'il faisait qu'il trouvait le même résultat.</u>

Où en sommes-nous maintenant :

- on ne s'est pas assuré que l'élève savait calculer à la main 2,743×3,12 puisque cette multiplication est hors des compétences requises pour la maîtrise de la multiplication des entiers (plus de 4 chiffres significatifs au produit) et on ne demande dans aucun programme qu'il sache l'effectuer

- la multiplication 2743×312 est hors programme du primaire et il n'y a aucune explicitation de la nécessité de sa maîtrise dans les programmes suivants (la seule indication est "d'éviter la virtuosité")

- même si l'élève sait *écrire* – ce qui est rarissime - $2{,}743 \times 3{,}12 = \frac{2743}{1000} \times \frac{312}{100} = \frac{855816}{100000} = 8{,}55816$, cette suite d'égalités est vide de sens, car , au lieu d'être la compréhension de l'équivalence de deux algorithmes ,

[4] Je passe sur la formulation "On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes" qui en fait signifie que la limitation des techniques empêche de faire un certain nombre de problèmes . Ainsi, le calcul du périmètre du cercle a disparu des programmes car π se refusait à être un entier. Au Japon , on a maintenu le périmètre du cercle mais π =3.

il s'agit, au mieux de donner comme seul algorithme celui qui obtient le résultat en passant par le calcul fractionnaire sans que la multiplication d'entiers qui y figure soit maîtrisée.

On peut donc conclure aisément que la commission Joutard ne souhaite ni que l'on apprenne l'algorithme de la multiplication des entiers ni celui de la multiplication des décimaux.

La division euclidienne

La position de la commission Joutard est la suivante :

"Pour la division, on se limitera à des calculs posés simples à la fin du cycle 3 (du type 432 divisé par 7 ou 432 divisé par 35), calculés en gardant la trace des soustractions effectuées et en ayant la possibilité de poser des produits annexes."

Remarques préliminaires

D'entrée de jeu , je peux dire que dans le meilleur des cas, c'est-à-dire pour les élèves que je reçois en sixième qui savent faire le type de division euclidienne recommandé par les programmes , c'est-à-dire d'un nombre à 4 chiffres par un nombre à deux chiffre, je me retrouve dans la situation suivante qui fait toute la différence avec l'addition, la soustraction :

- si je pose une division de dividende plus de 4 chiffres par un diviseur de deux chiffres , la première réaction est de dire "Je ne sais pas faire" mais, en insistant , un certain nombre arrive à la faire.

- si je pose une division par un diviseur à plus de deux chiffres , là le blocage est complet et on saisit très bien que ce qu'ils ont appris n'est pas extensible et donc qu'il n'ont pas compris l'algorithme de la division. Certains cependant tentent de faire la division par soustractions successives mais n'y arrivent pas car, pour une division du type 45634 par 347, il faut faire 131 soustractions. Je me sers d'ailleurs de cet exemple dans la suite du cours pour montrer que la méthode par soustractions successives est une méthode bien primitive et que la force des mathématiques est justement d'avoir inventé des méthodes beaucoup plus rapides et efficaces. Et, une fois sur deux , c'est une véritable découverte pour eux : "Monsieur, alors , on peut faire des divisions avec des nombres aussi grands qu'on veut ". Je réponds que oui mais qu'on ne va pas s'amuser à faire à la main des divisions d'un nombre à vingt chiffres par un nombre à huit chiffres . Mais, lorsque que j'ai le temps , car cette activité prend un temps fou, je propose de faire une division du type 2 687456 divisée par 12496, posée, avec tout le calcul, mais en utilisant la calculette pour faire les divisions partielles . A mon sens, ce devrait être le niveau requis pour prétendre que l'élève maîtrise la division euclidienne et la calculette. Et les élèves qui ont cette maîtrise n'ont aucune difficulté à faire, sans calculette, n'importe quelle division d'un nombre à 6 chiffres par un nombre à trois ou 4 chiffres . Ils font même des remarques extrêmement intéressantes qui montre la fausse problématique qui est induite dans leur esprit par les limitations du programme aux petits nombres : ils pensent d'abord que la longueur du processus dépend de la taille des nombres, ce qui les affole pour la difficulté de l'opération qu'ils pensent être incapables de faire. En fait ils pensent en gros que si D et d sont le dividende et le diviseur , la longueur du processus est proportionnelle à la somme des nombres des chiffres de d et D. Puis ils s'aperçoivent – mais pour cela il faut qu'ils aient fait eux-mêmes la division et donc qu'on leur ait appris à la faire - que 2 456 312 divisé par 985 253 est bien plus court et plus facile en un certain sens que 29 567 divisé par 47. C'est-à-dire qu'ils comprennent non pas de manière abstraite , mais sur l'opération elle-même effectuée sur des nombres écrits dans une base donnée, que la longueur du processus dépend du rapport des ordres de grandeurs du dividende et du diviseur.

Lorsque je dis , dans le meilleur des cas, cela signifie que

- j'ai quelques élèves qui savent faire toutes les divisions euclidiennes , mais , en ce cas tous me disent qu'ils l'ont appris hors de l'école, par leurs parents.
- très souvent, les élèves ne sont même pas au niveau du programme et, dans pas mal de cas , la division n'a été abordée qu'au dernier trimestre de CM2.

Plus précisément

Citons tout d'abord le programme de collège de sixième :

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
2.1. Nombres entiers et décimaux: écriture et opérations.		
Techniques opératoires.		
	Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres. Effectuer, dans des cas simples, la division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier.	La division est une opération en cours d'acquisition en début de collège. On la reliera aux problèmes d'encadrement d'un entier (ou d'un décimal) par des multiples d'un entier et on entraînera les élèves à donner aussi bien l'approximation entière d'un quotient par excès que par défaut. L'objectif principal est l'acquisition du sens de l'opération, au travers d'une pratique et de diverses utilisations. Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux.

Et celui de cinquième : il est particulièrement bref sur la division "*Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier*."

Je viens de citer *supra* des cas pratiques, sans explications, qui montrent que l'élève n'est pas capable d'étendre ce qui est enseigné à la généralité de la division euclidienne. Il s'agit donc d'expliquer pourquoi car on peut également penser que , si les recommandations pour le primaire ne demandent pas de dépasser une division de 4 chiffres par 2 chiffres, c'est que cela correspond à une difficulté qui est d'ailleurs dans ce cas majorée par la méthode recommandée. .

Tout d'abord , il est facile de démontrer que non seulement la commission Joutard mais toutes les commissions de programmes depuis de nombreuse s années ne s'intéressent absolument pas à la maîtrise générale de l'algorithme de la division euclidienne puisque non seulement les programmes de 2002 se limitent à une division 4 chiffres par 2 chiffres mais, à la lecture des programmes de collège, on peut s'apercevoir que ce n'est pas du tout un objectif actuel de l'enseignement puisque le programme de sixième se limite à "Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres.[5]" et qu'il n'en est plus question après.

La première difficulté dans l'apprentissage recommandé est que, dans la mesure où il existe plusieurs manières de trouver le résultat et que les directives ne montrent pas l'intérêt supérieur de l'algorithme classique l'élève n'est pas tenté d'apprendre à faire la division puisqu'il peut faire autrement. Et on le maintient dans une situation ou il ne peut pas faire cette différence puisqu'il n'a qu'a faire des divisions soit par soustractions successives, soit en posant les soustractions et en écrivant les produits partiels.

Voyons ce que cela signifie [6] :

Il est légitime poser un certain nombre de questions sur la limitation à un nombre à deux chiffres du diviseur et à quatre chiffres du dividende. On pourrait penser que la division d'un nombre à plus de deux chiffres s'effectue de la même manière que la division à deux chiffres : il n'en est rien surtout lorsque l'on suit les conseils

[5] Rappelons que l'objectif actuel de la sixième est celui du CE de 1887 jusqu'à la fin des années soixante.
[6] Pour une étude plus détaillée, voir http://michel.delord.free.fr/eval5.pdf
Et en particulier
B) Quelques remarques sur l'évolution des programmes:
[…]II) Allégement et régression (page 7)
C) Notre grand témoin : Roland Charnay *(Page 11)*

pédagogiques donnés dans les programmes qui ne sont d'ailleurs que le reflet du minimum de ce qui est fait en IUFM et dans de nombreuses classes primaires. En effet ceux-ci précisent qu'il y a la " *possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient".* Prenons un exemple pour voir ce que cela signifie, c'est-à-dire quelles sont les méthodes qui sont employées pour effectuer les divisions, méthodes que je vois gagner d'années en années un plus grand nombre de mes élèves de sixième et qui, justement, ne sont pas des méthodes générales qui s'étendent facilement pour l'apprentissage de toutes les divisions.

Prenons tout d'abord une division par un nombre à un chiffre en ne posant pas les soustractions mais en ayant la" *possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient"* .

3	4'	7	1	7	7	×	1	=	7		7	×	6	=	42
	6	7		495	7	×	2	=	14		7	×	7	=	49
		4	1		7	×	3	=	21		7	×	8	=	56
			6		7	×	4	=	28		7	×	9	=	63
					7	×	5	=	35						

Il est évident que, si l'élève ne connaît pas ses tables de multiplication par cœur, il ne peut se passer d'écrire, après les avoir calculés, tous les résultats de la table car il est obligé de consulter la liste de tous les multiples du diviseur pour connaître le chiffre qu'il doit écrire au quotient. S'il connaît ses tables, il est inutile d'en écrire les résultats dans ce cas (division par un nombre à un chiffre) et, tout au contraire, recommander cette pratique encourage l'ignorance des tables, ce qui devient un handicap majeur pour effectuer les autres multiplications et divisions. Donc, dans le cas des divisions par un nombre à un chiffre, ce conseil pédagogique est entièrement négatif.

Passons à la division par un nombre à deux chiffres dans le cas de "difficulté maximum" autorisé par les programmes, c'est-à-dire quand le dividende est un nombre à 4 chiffres et le diviseur un nombre à 2 chiffres, soit, par exemple, la division de 4311 par 44 :

4	3	1'	1	44	44	×	1	=	44	44	×	6	=	264
	3	5	1	97	44	×	2	=	88	44	×	7	=	308
		4	3		44	×	3	=	132	44	×	8	=	352
					44	×	4	=	176	44	×	9	=	396
					44	×	5	=	220					

On commence à deviner pourquoi la "*possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient"* devient très lourde puisqu'elle se transforme dans la pratique en " écrire d'abord tous les multiples du diviseur" ce qui oblige ici à écrire le résultat de 9 multiplications pour trouver seulement les 2 chiffres du quotient.

Rappelons la méthode "classique" qui évite le calcul l'ensemble des multiples du diviseur pour trouver la valeur des chiffres du quotient :

- on sépare 3 chiffres à gauche du dividende puisque 44 est supérieur à 43 puis
- on dit : "*En 431 combien de fois 44 ou en 43 combien de fois 4 ?*" : il y va 9 fois.
- on dit : "En 351 combien de fois 44 ou en 35 combien de fois 4" : il y va 8 fois. On fait l'essai. En fait, il n'y va que 7 fois.

Cette méthode donne en moyenne, à chaque fois, soit le chiffre du quotient, soit, s'il est trop "fort", le chiffre supérieur[7], c'est-à-dire qu'elle permet de trouver le bon chiffre du quotient en deux opérations.

Dans le cas qui nous intéresse; c'est-à-dire division d'un nombre à 4 chiffres par un nombre à 2 chiffres, la méthode imposant la pose des multiplications de tous les multiples du diviseur conduit, dans tous les cas, à poser 8 multiplications soit à calculer 16 produits partiels pris dans la table de multiplication (y compris pour l'exemple *infra*, 3991 par 44, où il suffit d'une multiplication).

[7] Dans le cas de la division de 9999 par 19, qui est un cas "extrême" , la réponse à la question " En 99, combien de fois 19 ou, en 9 combien de fois 1?" donne 9 alors que le chiffre du quotient recherché est 5 car 5 × 19 = 95. Mais , dans ce cas, c'est à dire où le deuxième chiffre du diviseur est "proche" de 9, on apprend très vite aux élèves a dire plutôt : " En 99 combien de fois 19 ou, en 9, combien de fois 2?". La réponse, 4, ne diffère dans ce cas que d'une unité de la réponse recherchée.

Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire division d'un nombre à 4 chiffres par un nombre à 2 chiffres, la méthode "classique", rend nécessaire le calcul d'un nombre de multiplications variant

- de UNE multiplication (c'est-à-dire 2 produits partiels) dans le cas de la division de 3991 par 44, par exemple, puisque on "devine" directement les deux chiffres du quotient 90 ("En 39, combien de fois 4 ? 9 fois" et, "En 31, combien de fois 44? 0 fois")

3	9	9'	1	44
	0	3	1	90
		3	1	

- jusqu'à 6 multiplications (c'est-à-dire 12 produits partiels) au maximum dans le cas où il faut poser 2 multiplications pour trouver chaque chiffre du quotient.

<u>On comprend donc que la méthode autorisée soit très lourde et pénible pour les divisions du programme mais elle devient très rapidement insupportable pour des divisions hors programme aussi simples que 39538 par 4393.</u>

En effet, la méthode classique et optimisée par plusieurs siècles d'utilisation sociale est la suivante :
On dit : " En 39538, combien de fois 4393 ou, en 39, combien de fois 4 ? Il y va 9 fois". On calcule UNE multiplication, sans la poser, c'est-à-dire 9× 4393 = 39537 (4 produits partiels) et la division est finie puisque le reste est 1.

3	9	5	3	8	4393
				1	9

La méthode des apprentis sorciers est la suivante et elle nécessite le calcul de 8 multiplications, c'est-à-dire de 32 produits partiels

3	9	5	3	8	4393		4393	×	1	=	4393;		4393	×	6	=	26358;
				1	9		4393	×	2	=	8786;		4393	×	7	=	30751;
							4393	×	3	=	13179;		4393	×	8	=	35144;
							4393	×	4	=	17572;		4393	×	9	=	39537;
							4393	×	5	=	21965;			×			

Je pourrais prendre d'autres exemples mais je pense que la conclusion est claire :

- En pratique, je reçois en sixième de plus en plus d'élèves qui, n'ayant pas appris à remplacer le dividende et le diviseur par des nombres d'ordre de grandeurs comparables pour trouver les chiffres du quotient[8], et pour qui , d'autre part, la méthode enseignée (calculer d'abord la table de multiplication du diviseur) est très lourde : ils sont donc effrayés devant une division qui dépasse les limites du programme d'autant plus qu'ils n'ont donc pas à leur disposition un outil qui s'étend facilement au cas de divisions où figurent des "grands" nombres. Dans un temps de cours qui est de plus limité par l'empiétement des divers projets, on est donc obligé de "casser" d'abord les méthodes apprises pour arriver à une maîtrise satisfaisante de la division. Mais en fait , comprendre pourquoi l'on peut dire "*En 39538, combien de fois 4393 ou, en 39, combien de fois 4 ?*" suppose non seulement de manier les opérations sur les ordres de grandeurs mais de connaître la règle qui dit : *si l'on multiplie ou divise le dividende et le diviseur par un même nombre* - ici 1000- *, le quotient ne change pas (et le reste est multiplié ou divisé par ce nombre),* règle qui n'est plus enseignée.

On peut donc dire que la " *possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient"* réussit d'une pierre plusieurs coups :

[8] Ce qui est un comble puisqu'un des objectifs officiels des programmes est de se concentrer sur le maniement des ordres de grandeurs : mais, une fois de plus, les modernes pédagogues ne voient pas qu'ils suppriment des parties du programme qui réalisaient … ce qu'ils recommandent.

- elle permet de ne pas savoir ses tables multiplication pour effectuer des divisions dans lesquelles le diviseur a un seul chiffre. Le non apprentissage des tables devenant à son tour un obstacle au fait de ne pas "poser des produits partiels" pour des divisions où le diviseur a plusieurs chiffres

- elle induit par elle-même une méthode qui ne permet pas de dépasser aisément et est même un obstacle à la maîtrise les divisions ayant plus de deux chiffres au diviseur et plus de quatre chiffres au dividende

- elle n'entraîne plus au maniement mental des ordres de grandeur

- n'ayant plus à expliciter la règle donnée *supra*, elle ne se contente pas de diminuer les capacités des élèves dans la maîtrise de la division des entiers mais elle interdit d'utiliser ce qui, dans la pratique de la division des entiers , était une préparation à la suite du cours :

> i) pour la division par un décimal : *si l'on multiplie ou divise le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change* pas est la règle qui permet de remplacer, en multipliant par 10 le dividende et le diviseur, la division 32,789 par 0,7 - que l'on ne sait pas faire - par celle de 327,89 par 7 car elles ont le même quotient. On pourrait même rajouter que c'est la deuxième partie de cette règle "*le reste est multiplié … par ce nombre*" qui permet de lire directement, dans la division, le reste décimal sans erreur sur la place de la virgule.
>
> ii) pour le calcul sur les fractions : c'est cette même règle qui permet d'introduire l'idée, en multipliant ou en divisant par 2 par exemple que 4/10 = 2/5= 8/20, c'est à dire d'introduire en particulier la simplification des fractions.

Si les programmes actuels refusent que les élèves sachent faire une division, à part dans des cas particuliers pour des "petits nombres", c'est donc essentiellement qu'ont été mis en place et recommandés précédemment dans le cursus des modes d'apprentissage qui ne permettent pas d'étendre les modes de calculs enseignés à la généralité de l'algorithme de la division, c'est à dire pour tous les nombres entiers. Et encore je ne me suis pas étendu aux modes d'apprentissages de l'addition, de la soustraction et de la multiplication (en calcul écrit et calcul mental) qui sont en fait des obstacles à l'apprentissage de la division elle-même. On comprend mieux maintenant les remarques figurant dans le dernier programme et les documents d'accompagnement de ces derniers (c'est moi qui souligne, M.D.) :

> - page 93 du B.O.E.N. : "*Les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur <u>des nombres d'usage courant</u>* [Encore une innovation conceptuelle; 39 538 n'est pas un "nombre d'usage courant" comme dividende et il le sera de moins en moins puisqu'il est interdit comme tel par le programme et que faire le contraire serait "*une recherche de virtuosité excessive*". M.D.], *en s'attachant à assurer une bonne compréhension des étapes du calcul. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une <u>recherche de virtuosité excessive</u>*."
>
> - page 26 du document d'accompagnement : *" Les compétences relatives aux techniques opératoires sont inséparables de la résolution de problèmes : l'élève doit acquérir une bonne aptitude à organiser ses calculs, <u>sans nécessairement toujours utiliser le procédé le plus court</u>."* Cette dernière remarque est un doux euphémisme puisque, dans le cas de la division, on lui a appris systématiquement les procédés les plus longs.

Petite remarque sur "le sens", les "solutions personnelles" et la division comme "soustraction répétée"

"*Il est essentiel que, bien avant que les techniques écrites usuelles ne soient mises en place, les élèves soient invités à produire des résultats en élaborant et en utilisant des procédures personnelles, non standard (mentalement ou en s'aidant d'un écrit*".

Que sont ces "procédures personnelles, non standard" ? Une réponse nous est donné dans la cas de la division par Roland Charnay[9] telles qu'elles apparaissent dans la conférence qu'il a faite en 1995 <u>sur la liaison école / sixième</u>[10]<u>:</u>

---

9 Sa position est de poids car il a été membre à la fois des commissions qui ont élaboré les programmes de 95/96 pour le primaire et le collège et de la commission Joutard qui est responsable des derniers programmes du primaire.

10 http://www.ac-creteil.fr/maths/puissances/N2/ecol-six.html

"*Le sens des opérations n'est pas complètement acquis, a noté Roland Charnay. Le cas de la division est pointé dans le programme de sixième. Il importe de poursuivre un travail sur le sens (situations de division qui peuvent être résolues par des procédures personnelles comme essais, soustractions réitérées, produits à trous, ..)*".

Il définit donc les procédures personnelles comme liées "*au sens de la division* " et en donne comme exemples "*essais, soustractions réitérées, produits à trous".*

Disons tout d'abord que l'idée de présenter la division comme une soustraction répétée n'est pas nouvelle puisque l'on peut lire dans le Dictionnaire pédagogique de Ferdinand Buisson (la partie soulignée l'est par nous):

> "La *division* n'est autre chose qu'une série de soustractions dans lesquelles le nombre à soustraire est toujours le même; on le fera aisément comprendre sur de petits nombres; par exemple 6 peut être soustrait 4 fois du nombre 24; le quotient de 24 par 6 est donc 4. Mais, en considérant le tableau ci-dessus, on voit que si l'on voulait partager 24 en 6 parties égales, chacune d'elles serait égale à 4 ; d'où une autre manière de considérer la division. On habituera les enfants à ces deux points de vue de la division, en les exerçant sur la table de multiplication précédemment apprise. On pourra alors aborder la division d'un nombre de trois chiffres par un nombre d'un seul, et celle d'un nombre de trois chiffres par un nombre de deux, en se fondant sur l'idée de partage, qui est la plus commode pour établir la règle de la division. On appliquera la division à quelques problèmes usuels. La preuve se fera en observant que, quelque soit le point de vue sous lequel on envisage l'opération, le produit du diviseur par le quotient doit toujours être égal au dividende, si l'opération se fait sans reste; et à ce produit augmenté du reste, s'il y en a un."[11]

Ceci n'est donc pas nouveau mais l'auteur Henri Sonnet écrit cela pour la partie Cours Elémentaire et précise bien les limitations de son utilisation, c'est-à-dire l'introduction de la division. Roland Charnay, lui, en parle pour la sixième et nous allons voir que cela introduit une forte différence.

On peut remarquer tout d'abord que le fait de faire une division par soustractions répétées peut difficilement être caractérisée de procédure personnelle car il y a en fait *très peu* de procédures vraiment personnelles[12] : il y a plutôt différentes manières de faire une division qui sont toutes assez vieilles car l'humanité a eu le temps d'optimiser ce procédé avant d'arriver à ses formes les plus efficientes.

Donc le fait de considérer la division comme une soustraction répétée pour l'introduction de cette notion n'est pas vraiment nouvelle, ce qui est nouveau est d'obtenir le quotient de la division de 4567 par 34 en effectuant 134 soustractions successives de 34 sur le modèle suivant dont je vous passe les 128 (i.e. 134 –6) étapes non reproduites :

4567-34 = 4533; il y va 1 fois
4533-34 = 4499; il y va 2 fois
4499-34 = 4465; il y va 3 fois
/
/
/
/

---

[11] In *Henri Sonnet*, Article *Arithmétique*, partie consacrée au *Cours Elementaire*,du *Dictionnaire Pédagogique*, Tome 1 de la première partie , 1887, pages 114 à 118.

[12] "We note that to use invented algorithms in teaching, as opposed to their private use by students, will require teachers to be quite expert about the alternative algorithms which are possible. We suspect that the range of algorithms that will arise and that survive a test of reasonable generality will not be huge, and it could be a beneficial research activity to investigate and classify these and incorporate the results into teachers manuals so that teachers could be prepared to discuss invented algorithms profitably as they arise."
In *Reports of AMS Association Resource Group*, 1998 , http://www.ams.org/notices/199802/comm-amsarg.pdf

113-34=79;	il y va 132 fois
79-34 = 45;	il y va 133 fois
45-4=11;	il y va 134 fois

11-34 impossible donc le quotient euclidien de 4567 par 34 est 134 et le reste est 11.

Folie, direz-vous, personne ne fait ça. Erreur. Il ya tout d'abord l'exemple des USA[13] mais aussi chez nous. En voici un exemple parmi d'autres que j'ai n'ai pas eu à chercher très loin puisqu'il vient d'un contrôle dans une de mes classes de sixième en Janvier 2003.

L'élève, de bon niveau, obtient 17,5 sur 20 au contrôle suivant de technique de la division (8 divisions dont la dernière est 1347 512 par 5837). Mais dans le cadre du problème *Convertir 232 412 secondes en jours, heures, minutes , secondes*, elle restitue spontanément ce qu'on lui a appris et qu'elle a manifestement pratiqué tres longuement au point que cela devienne un réflexe qui est capable de contrecarrer le contenu du cours que j'avais fait précédemment, cours dans lequel je donnais la marche à suivre "en faisant des divisions". Il serait intéressant d'étudier plus précisément ce *cas* comme l'on dit maintenant en reprenant effectivement un vocabulaire qui relève de la *pathologie.*

Je n'en releve que quelques traits: l'élève applique l'idée que diviser, c'est faire des soustractions successives. Au lieu de diviser 232 412 par 86 400 (nombres de secondes en un jour), elle soustrait deux fois 86 400 et trouve donc 2 jours et le reste, c'est à dire 59 612 secondes.

Puis elle tente de trouver le nombre d'heures restantes en soustrayant, à 59 612 secondes, autant de fois que possible 1 heure, c'est à dire 3600 secondes. Comme elle comprend ce qu'elle fait, elle s'aperçoit au bout de la sixième soustraction de 3600 que le processus entamé risque d'être assez long et décide qu'elle va soustraire à chaque fois 2 heures , c'est à dire 7200 secondes. Ce qui lui permet de trouver les 16 jours en n'effectuant que 11 soustractions (6 de 3600 et 5 de 7200) au lieu de 16, avec un reste exact de 2012 secondes. Instruite par son expérience, elle se dit manifestement que pour trouver le nombre de minutes comprises dans 2012 secondes, il vaut mieux ne pas faire des soustractions de 60 secondes ce qui risque d'être bien long, mais commencer directement en enlevant à chaque fois 4 minutes, c'est à dire 240 secondes. En fait , elle se trompe et utilise 480 secondes pour 4 minutes ce qui fait qu'au bout du compte, elle trouvera 232 412 secondes = 2 jours,16 heures,**17** minutes , 32secondes au lieu de 2 jours,16 heures, **33** minutes , 32 secondes.

Mais, à part cela, la démarche est entièrement logique et prouve même que l'élève ne l'applique pas mécaniquement et est capable de comprendre exactement ce qu'elle fait.

[13] *Does Two plus Two Still Equal Four? What Should Our Children Know about Math?* Monday, March 4, 2002 http://www.aei.org/past_event/conf020304.htm

III) Convertir 232 412 secondes en jours heures minutes secondes.

1j = 24h = 1440 min = 86400 s

1h = 60 min = 3600 s

1min = 60 s

232 412
− 86 400 = 1j
146 012
− 86 400 = 1j
059 612
− 3600 = 1h
56 012
− 3600 = 1h
52 412
− 3600 = 1h
48 812
− 3600 = 1h
45 212
− 3600 = 1h
41 612
− 3600 = 1h
38 012
3600×2=7200 − 7200 = 2h
30 812
− 7200 = 2h
23 612
− 7200 = 2h
16 412
− 7200 = 2h
09 212
− 7200 = 2h
02 012
240
60×4=480 − 480 = 4min
1532

2 j 1

16 h 1

1532
- 480 = 4 min

1052
- 480 = 4 min

0572
- 480 = 4 min

092
- 60 = 1 min

32 = 32 s

~~17~~ min

32 s

232 412 s en j, h, min, s = 2 j, 16 h, 17 min et 32 s

Ce qui n'apparaît pas à la vue de la partie reproduite de la copie est que l'élève sort ensuite du contrôle en pleurs parce qu'elle a passé un temps énorme pour trouver un résultat faux et qu'elle n'a pas eu le temps ensuite de faire correctement les autres épreuves du contrôle. De plus, elle s'auto-accuse de ne pas avoir appris sa leçon.

Ce qui signifie très exactement que non seulement les programmes du primaire - et du collège- limitent les connaissances des élèves mais les mettent dans des conditions qui ne leur permettent pas de voir ces limites. En limitant la division à des divisions sur des "petits nombres" effectuées par soustractions successives, un élève sensé doit se demander pourquoi on parle de divisions s'il suffit d'utiliser la soustraction dans des conditions, qui plus est, ou l'algorithme de la division n'apporte quasiment aucun avantage par rapport à la répétition de la soustraction et, où, pour l'élève, la division apparaît même comme plus "pénible" car il n'a justement pas l'habitude d'en faire. Ceci se manifeste souvent, en début d'année scolaire, lorsque je demande d'effectuer la "vraie division" de 180 par 43 et où l'élève me ramène triomphalement le bon résultat (quotient 4, reste 8) qu'il a effectué par soustractions successives. Si je lui dis qu'il n'a pas fait de division, il me réponds *" On faisait comme ça avec mon maître et, de toutes façons, je trouve le bon résultat*". Ce qui double l'argument d'autorité (que je ne me permettrai pas de critiquer : ce qui est intéressant est que ces procédures dites *personnelles* étaient censées éviter l'argument d'autorité alors qu'elles ne font que donner de l'autorité à un processus primitif) de l'argument expérimental mais d'une expérience qui a été volontairement limitée puisque, pour les nombres plus grands, l'élève est <u>encouragé</u> à utiliser la calculette. D'autre part il n'apprend pas les mathématiques car il ne s'intéresse qu'au résultat et non pas à la compréhension de la manière de trouver le résultat : ce n'est pas de sa faute car toute l'argumentions de la commission Joutard consiste à mettre en avant l'utilisation des calculettes *parce qu'elles sont un moyen de trouver le résultat*. Il apprend eussi non pas les mathématiques mais la ***magie*** car c'est ainsi qu'il perçoit le fonctionnement de la calculette divisant les "grands nombres".

Or la démarche de l'élève citée prouve qu'elle essaie elle-même de sortir en partie de la division en tant que soustraction répétée[14] du diviseur car elle voit bien que, en particulier pour des nombres qui sont hors programmes et sur lesquels elle a donc peu d'expérience, c'est un processus extrêmement long. C'est à dire qu'elle ne peut voir

a) que la division a précisément été inventée, comme utilité immédiate, pour raccourcir ce processus

b) que, ce faisant, elle était une opération en elle-même mais qui, justement parce qu'elle est une soustraction répétée, est beaucoup plus que cela.

c) elle ne peut comprendre non plus – mais on ne désire plus l'enseigner car, depuis les mathématiques modernes , "ce ne sont pas des mathématiques " … tout en s'étonnant que les élèves n'aient plus le "sens des opérations" – les caractéristiques en termes d'analyse dimensionnelle de la division.

Et, bien sûr, le calcul est faux puisque un des avantages de la "procédure experte " est de minimiser les risques d'erreur par rapport à la "procédure personnelle" qui consiste à l'effectuer par soustractions successives.

Mais en fait, qu'en est-il de ce type d'activité ? Outre qu'elle fait perdre un temps fou - ce qui est secondaire car il est souvent tout à fait utile et même indispensable de "perdre du temps" lorsque l'on apprend -, <u>elle est en fait une négation de l'apprentissage de la division</u> puisque la division a été inventée pour raccourcir une suite de soustractions. <u>Ne pas limiter à l'introduction de la division la présentation de celle-ci comme soustraction répétée imprime celle-ci</u> non pas comme "sens", *de plus partiel*, de l'opération mais <u>comme méthode générale de la division , c'est-à-dire comme algorithme de la division car effectuer une division en faisant des soustractions successives est bien un algorithme de la division puisqu'il s'agit d'une procédure automatisée qui permet bien de trouver, dans tous les cas, le résultat recherché.</u> Mais on mémorise ainsi un type d'algorithme qui est beaucoup moins performant que l'algorithme classique.

On arrive ainsi au paradoxe suivant : au nom du refus de l'apprentissage par cœur de règles et de mécanismes et de la nécessité du "sens", les élèves mémorisent des procédures automatisées non performantes qui s'opposent ensuite à la mémorisation des algorithmes classiques dont les élèves ne peuvent pas voir l'intérêt puisqu'on ne les met pas dans des situations où la supériorité de l'algorithme classique est patente. On pourrait même montrer que, dans ce cas comme dans d'autres similaires, il s'agit d'une ***régression mathématique*** car <u>l'élève mémorise des automatismes qui relèvent du comptage</u> - dans l'exemple donné l'élève ***compte*** le nombre de soustractions alors que dans l'algorithme classique, il est ***calculé*** - <u>alors que les algorithmes les plus performants relèvent du calcul et donc de l'intelligence du calcul</u>.

14 Voir Annexe 1: Nécessité de l'abstraction pour comprendre l'expérimental

Il y a un point supplémentaire dans ce que dit R. Charnay qui rattache les soustractions réitérées au "travail sur le sens de la division".

On peut donner divers sens à l'expression "sens de la division " :

1) Le premier sens de l'algorithme de division sur les nombres purs – puisque les opérations sur les grandeurs n'existent plus- est un peu ce que dit Tim Gowers : "*A mathematical object is what it **does*** "[15] . Le sens de la l'algorithme de la division euclidienne est , étant donné deux nombre entiers a et b, de trouver le quotient et le reste, c'est-à-dire le couple unique (q,r) tel que a = bq+r (avec r<b). En ce sens, mathématique, la suite de soustractions que l'on peut effectuer pour trouver q et r n'est pas plus le sens de la division que l'algorithme classique , c'est simplement un autre algorithme, beaucoup moins performant.

2) Mais apparemment , R. Charnay ne fait pas allusion à ce sens purement mathématique – c'est une tendance de la pédagogie actuelle de refuser la référence mathématique, et de prétendre que *le seul sens des mathématiques est dans leur application* - mais il défend une vision dans laquelle le sens de l'algorithme classique de la division ne serait pas en lui , <u>c'est-à-dire qu'il défend en fait l'idée que ce serait un mécanisme qui n'a pas de sens</u>, mais dont le sens serait une suite de soustractions.

3) En fait, si l'on concentre "le sens" de la division sur la division comme suite de soustractions , on perd un des deux sens de la division comme modélisation du réel . En effet dans ce domaine, la division a : b = c permet de trouver la valeur d'une part (division du type au : b = c u) ou le nombre de part (division du type au : bu = c) . Or la division par soustractions successives ne modélise pas du tout le calcul de la valeur d'une part. Par exemple, si l'on cherche combien de fois 2m est contenu dans 8m , on peut procéder par soustractions successives puisque la première soustraction 8m-2m= 6m a un sens intuitif et il suffit de répéter *4 fois* cette soustraction de 2m pour trouver 4, le nombre de parts . Par contre , si l'on veut partager 8m en 2 parts égales , la soustraction 8m – 2 n'a aucun sens intuitif . D'ailleurs j'ai pu constater que les élèves spontanément n'utilisent dans un problème la division comme soustraction répétée que si ils recherchent le nombre de parts – comme le fait mon élève dans l'exemple cité - et je n'ai aucun exemple dans le cas de la recherche de la valeur d'une part.

<u>La division des décimaux</u>

La , aussi , les programmes de 2002 comme les précédents limitent l'apprentissage de l'algorithme de la division des décimaux dans le primaire et ne recommandent plus jamais ensuite de le connaître .

Le programme du primaire de 95 demandait de connaître la " *division d'un décimal par un entier*." . Le programme correspondant de collège, programme actuel demandait d'"*Effectuer, dans des cas simples, la division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier*"et precise , dans ses commentaires "*Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux*." Celui de cinquième, dans le cadre des fractions, précise ""*Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier*." Et c'est tout.

<u>On peut donc dire que les concepteurs des programmes trouvent inutile de posséder les algorithmes de la division poussée de deux entiers et de toute division d'un décimal par un décimal et ce , à quelque niveau que ce soit.</u>

Ce qu'il y a clairement de nouveau dans les positions de la commission Joutard par rapport aux commissions précédentes <u>est la reconnaissance d'un état de fait</u>. Tout le monde savait très bien que , malgré les multiples justifications pédagogiques qui prétendaient qu'il ne fallait utiliser les calculatrices que pour apprendre à faire les opérations ou pour faire des calculs répétitifs sur des nombres trop grands , en classe et chez eux les élèves les utilisait dans n'importe quelle conditions et beaucoup d'élèves utilisaient la calculatrice pour faire des opérations qu'ils ne maîtrisaient pas (y compris en terminale pour 24 divisé par 5).

Maintenant, depuis les programmes de 2002, la situation est claire , les programmes recommandent d'utiliser la calculatrice pour des opérations qui ne sont pas au programme : par exemple le quotient d'un décimal

[15] Timothy Gowers, *Mathematics A very short introduction,* Oxford University Press,2002. Page 18.

par un entier n'est pas au programme du primaire mais on recommande d'utiliser la calculatrice pour le calculer[16] (references

Quelles en sont les conséquences ?

a) La division poussée de deux entiers

La conséquence en est mathématiquement importante car la maîtrise de l'algorithme papier crayon est la seule manière de caractériser un rationnel comme un nombre ayant une écriture décimale périodique. Mais cela n'a pas d'importance puisque …. personne ne s'en soucie.

Je voudrais à ce propos donner la principale raison mathématique – il y en a d'autres plus didactiques - qui justifie l'apprentissage de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée[17] : c'est la seule manière de faire sentir l'existence de nombres non rationnels car la pratique de cet algorithme montre qu'il n'y aucune raison pour que la suite des décimales soit périodique. C'est ce qui permet ensuite que la traditionnelle démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ veille dire quelque chose pour les élèves . En effet , que veut dire pour un élève qui ne sait pas que la caractéristique des rationnels est d'avoir une écriture périodique et que l'extraction de la racine carrée de 2 montre qu'il n'y a aucune chance que son écriture soit périodique, que $\sqrt{2}$ est irrationnel , c'est-à-dire "qu'il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction" . Cela signifie seulement pour lui que la seule manière de l'écrire est … $\sqrt{2}$. Mais là aussi, qui s'en soucie ?

b) Le quotient de deux décimaux

Ce qui est sous-entendu lorsque les commissions de programmes écrivent, dans le cadre des fractions : *"Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier"* est que la division des décimaux se ramène à l'étude des fractions et que la question est résolue lorsque l'on a écrit :

$$1{,}23425 : 0{,}537 = \frac{1{,}23425}{0{,}537} = \frac{1234{,}25}{537} = \frac{123425}{53700}$$

Mais ce ci est tout à fait faux[18] car cela ne permet pas de traiter la question du reste et on peut aisément le vérifier en demandant à un élève de cinquième ou de lycée quel est le quotient au 1/10 de 1,23425 par 0,537 et le reste correspondant à ce quotient, y compris en utilisant la calculatrice[19].

On arrive ainsi à un paradoxe : on a actuellement une mise en avant des calculs approchés , c'est-à-dire de calculs sur les décimaux et l'on obtient en fait une non maîtrise du reste de la division de deux décimaux qui est bien l'élément qui permet de donner la précision du calcul.

---

[16] In ***Documents d'application des programmes :Mathématiques –Cycle des approfondissements (Cycle 3), applicable à la rentrée 2002***–CNDP .
Auteurs : Roland CHARNAY, Luce DOSSAT, Jean FROMENTIN, Catherine HOUDEMENT, Nicole MATULIK, Guy PIGOT, Paul PLANCHETTE .
http://www.cndp.fr/textes_officiels/ecole/math_Ecole_C3.pdf , pages 26 et 28.

[17] D'autant plus que l'apprentissage de cet algorithme est très courte (au maximum deux heures), ce qui est très différent de l'apprentissage complet de l'algorithme de la division.

[18] J'ai tenté de traiter la question du reste de la division des décimaux par cette méthode qui est la seule praticable dans le contexte instauré par les programmes: bien sûr il existe une progression logique qui permet de la justifier mais elle est incompréhensible pour les élèves . On a donc le choix entre refaire enterrement l'enseignement de la division euclidienne jusqu'à la détermination du reste dans la division de deux décimaux (en montrant comment on peut utiliser la calculatrice comme vérification) ou faire ce que font sur ce sujet la quasi totalité des collègues, ne pas traiter la question. Et personne ne s'en apercevra puisque personne ne posera de questions sur ce sujet.

[19] Ce test a été fait sur des classes entières de la cinquième à la terminale (et même sur des élèves de licence en économie, option mathématiques) . Il s'agissait de résoudre le problème suivant : On coupe une barre de bois de 2,713 m en morceaux de 0,17 m. Quel est le nombre de morceaux et la longueur du morceau restant ?, le problème étant posé successivement avec des données différentes avec utilisation de la calculette et sans son utilisation. Seule une minorité d'élève arrive à résoudre le problème et il y a quasiment identité entre ceux qui le résolvent à la calculette et sans calculette. Ce qui prouve que la maîtrise de la division des décimaux à la calculette suppose sa maîtrise à la main.

Pour ne pas s'apercevoir des difficultés qu'entraînent les progressions en place, il suffit de ne pas poser aux élèves les problèmes dans lesquelles on pourrait s'en apercevoir. Ou comme le dit aimablement le programme de sixième : "On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes".

Conclusion partielle

En conclusion, on peut donc dire que les programmes du primaire de 2002, ainsi que tous les programmes du primaire et du collège depuis au moins une dizaine d'années ont des postions qui nient la necessité de la connaissance des algorithmes des opérations.

Annexes

1) Nécessité de l'abstraction pour comprendre l'expérimental

Je tacherai d'expliciter cela mais une notion apprise au bon moment dans une progression donnée doit avoir suffisamment de sens pour que l'expression donner du sens n'ait pas lieu d'être. Admettons cependant un usage de cette expression, celui qui prétend "donner du sens" en ramenant une notion à une forme de ses "composantes de base" (par exemple donner du sens à la division en la remplaçant par une suite de soustractions) pour montrer qu'il doit au moins être manié avec précaution.

Un exemple assez simple : on pourrait effectivement "donner du sens" aux nombres 2444 et 45 en les remplaçant respectivement par 2444 bûchettes et 45 bûchettes, c'est à dire en travaillant en base 1 où le seul chiffre autorisé est le 1, c'est à dire **une bûchette** ; puis dans une deuxième étape on pourrait donner "encore plus de sens" à la division de 2444 par 45 en n'utilisant toujours que les bûchettes pour compter : au lieu de faire la division en écrivant les 54 soustractions nécessaires pour trouver que le quotient est 54 et le reste 14 - ce qui est "porteur de sens" mais pas suffisamment- , l'effectuer en enlevant manuellement les bûchettes par paquet de 45, et en comptant le nombre de paquets en utilisant également 54 bûchettes prévues préventivement à cet effet.

Au bout de ce processus, on aurait donc trois paquets de bûchettes a) 2430 bûchettes b) 54 bûchettes et 14 bûchettes qui représenteraient le quotient et le reste de la division. Le processus est un peu long mais "plein de sens " et il permet même de gagner du temps si l'on y réfléchit vraiment bien : en effet, si l'on ne dispose que d'un chiffre pour compter, il est inutile de *compter* les 54 bûchettes du quotient et les 14 bûchettes " pour savoir combien cela représente" puisque cela n'a aucun sens. Si ce n'est que si l'on veut passer au stade de l'écriture, certes un peu primitive, pour "communiquer" le résultat de la division, il faut écrire sur un papyrus (ou graver dans la pierre) 54 barres et 14 barres (sans les compter bien sûr), c'est à dire en supprimant des paquets concernés de bûchettes une bûchette chaque fois que l'on fait un trait sur le papyrus. Et si l'on veut que celui qui reçoit ce document comprenne à quoi correspondent ces deux nombres, ce qui est légitime, il suffit d'écrire sur le papyrus, toujours sans les compter et en utilisant le processus décrit plus haut, 2444 traits et 45 traits qui correspondent aux bûchettes du diviseur et du dividende ***réels***.

Si nous reprenons cette expérience (que j'espère "de pensée" car il faut souhaiter qu'aucun élève n'ait à se plonger dans la manipulation concrète de telles "manipulatives"[20]), on explicite deux liens (que la pédagogie actuelle trouveraient probablement *porteurs de sens*): le lien entre l'écriture décimale d'un nombre et la réalité physique qu'il représente et d'autre part le lien entre la division et la soustraction répétée. Mais leur superposition logique (car la pensée de la division des grands nombres est dépendante de la numération et ne s'est jamais faite à partir d'une numération à un chiffre, c'est à dire qu'elle suppose l'invention d'une forme de numération), produit un système - complètement expérimental avec un minimum d'abstraction- qui est non seulement impraticable mais incompréhensible. C'est ce que l'on pourrait appeler la nécessité de l'abstraction pour la compréhension ou pour la connaissance en général, notion introuvable dans les programmes actuels et pas seulement en mathématiques: l'explication de ce manque pouvant être que la connaissance ne présente plus aucun ***intérêt*** [à part pour un domaine de mesure zéro].

En effet, le passage des 2444 bûchettes réelles an nombre 2444 correspond au moins à deux niveaux d'abstractions successives (le passage des bûchettes au nombre de bûchettes et le passage de ce nombre à l'écriture de ce nombre dans un système de numération) tandis que le passage de la notion de soustraction répétée à celle de division est une nouvelle abstraction qui, comme les précédentes, suppose l'oubli de détails appartenant à la catégorie précédente pour considérer que le nouvel objet n'a pas tous les traits de ses antécédents et a donc une certaine autonomie qui permet de le penser en tant que tel. Dans le passage du nombre de bûchettes au nombre , on ne garde des bûchettes que ce qu'elles sont comme nombre, c'est-à-dire non pas pour les brûler par exemple ou en faire des cure-dents, mais parce qu'on veut les compter ; dans le passage du nombre à l'écriture du nombre dans une base, on perd en fait la notion de nombre comme collection d'unités de même type pour penser celui-ci comme une somme d'unités de types différents (vingtaine et unités dans le cas de quatre-vingt deux en numération orale), ce qui fait que la notion de nombre écrit dans une base ne peut être pensée au minimum en dehors de la notion d'addition ; dans le passage de la soustraction répétée à la division complètement comprise, on perd la notion de soustraction répétée du diviseur au dividende car la division

[20] Pour la critique des *manipulatives,* lire **William G. Quirk**, *The Truth About Math Reform*
http://www.wgquirk.com

numérique *pure* représente aussi la division comme moyen de trouver le nombre de parts qui ne peut être pensée comme suite de soustractions.

Ce processus est d'ailleurs général et, par exemple, on ne peut parler de maîtrise du calcul algébrique que lorsque l'élève a oublié, c'est à dire qu'il n'a plus besoin de penser à la justification des différentes règles algébriques (- par - = +, $\mathbf{a^n \times a^m = a^{an+m}}$ …) et à leur origine arithmétique pour calculer le produit ($2X^3+X+1$) (X^4-X) qu'il considère non plus comme un arbre d'opérations arithmétiques mais comme le produit de deux polynômes, ce qui n'empêches qu'il peut y revenir si nécessaire. Dans ce dernier cas par exemple, la règle qui traduit bien cet oubli de l'arithmétique est :" *Le produit de deux monômes est un monôme dont le coefficient est le produit des coefficients des monômes de départ et dont le degré est la somme des degrés des monômes de départ*" puisqu'elle porte sur des objets qui, s'ils sont effectivement d'origine arithmétique, prennent leur sens en tant qu'objets non arithmétiques. En ce sens , le fait que les notions de polynômes et de monômes ait disparu de l'enseignement au moins du collège n'est pas innocent.

Extraits, sur les algorithmes de :

NOTICES OF THE AMS, VOLUME 45, NUMBER 2, FEBRUARY 1998

Reports of AMS Association Resource Group

http://www.ams.org/notices/199802/comm-amsarg.pdf

The AMSARG is a subcommittee of the AMS Committee on Education, chaired by Roger Howe and charged with representing the AMS to the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) in its revision of the NCTM Standards. Starting in 1989, the NCTM issued three sets of Standards for K–12 mathematics: one set on mathematics curricula, one on assessment, and one on the mathematics teaching profession. The revision will involve updating and refining the existing Standards and blending the three sets into a single document. More background about the work of the AMSARG may be found in the feature article by Roger Howe in this issue of the Notices. The questions that the AMSARG was to answer are listed in a letter from Mary M. Lindquist to Roger Howe that is reproduced in a box with his article. Briefly, these questions are:

(1) Do the current statements of the Standards adequately communicate your view of the discipline?

(2) Do the statements of the current curriculum Standards convey a sense of consistency and growth in content themes as the student moves across the grade levels?

(3) Do the statements of the content Standards adequately reflect the mathematical understanding expected of a student graduating in the twenty-first century?

(4) What suggestions could you make as to the most effective ways of blending the ideas of content, teaching, and assessment?

—*Roger Howe*

/

/

B. Algorithms

Two unrelated discussions took place with regard to this word. The first was about how arithmetic computation should be taught and particularly the role of the calculator in elementary school. The second was about the nature of algorithms in their more general mathematical context. With respect to arithmetic computation, there was consensus that the use of calculators should support, but not supplant, other methods of computation, including paper-and-pencil algorithms. Other methods we contrasted with calculators included doing arithmetic mentally and using manipulatives to represent computations.

There was no consensus about how this might translate into classroom practice. Some members voiced concern about using the calculator at all in the early grades. Others pointed out that perhaps this decision should be left to teachers to work out. The second discussion, about algorithms in general, was a bit more diffuse. The following summary seemed to fit everyone's ideas:

• Kids need to learn certain algorithms.

• They need to do this for three reasons:
a. efficiency,
b. mathematical understanding,
c. the notion of algorithm itself.

• In an age of calculators and spreadsheets the notion of algorithm becomes even more important. Conventional algorithms for basic arithmetic addition, subtraction, multiplication, and division were felt to be worth teaching for reasons (a), (b), (c) above and in particular for their preparatory value for the algebra of polynomials. Beyond that there was little consensus. There will be further comments on algorithms in the point-by-point comments to be submitted later.

There was a clear consensus that the use of algorithms, on whatever level, must be accompanied by understanding of how the algorithm works, not just what it accomplishes, and by discussion (wherever appropriate) of how algorithms can provide additional insight, not just specific answers. These comments lead to the recommendation that the notion of algorithm in the new Standards be clarified and separated from the notion of arithmetic computation. Further, the status of algorithms and computation, especially in the "Increased Attention, Decreased Attention" lists, should be rethought.

/

/

Question 1.

(a) What is meant by "algorithmic thinking"?

(b) How should the Standards address the nature of algorithms in their more general mathematical context?

(c) How should the Standards address the matter of invented and standard algorithms for arithmetic computations? (d) What is it about the nature of algorithms that might be important for children to learn?

Response to Question 1.

(a) We do not know a useful reply to this question in the context of K–12 mathematics. “Algorithmic thinking” conjures up no ready images or category of ideas for us. We feel that in some sense the question is not productive. An important feature of algorithms is that they are automatic and so do not require thought once mastered. Thus learning algorithms frees up the brain to struggle with higher-level tasks. On the other hand, algorithms frequently embody significant ideas, and understanding of these ideas is a source of mathematical power. We feel it should be a goal that children should understand why and how the algorithms they use work. Our predilection is that this understanding be achieved as soon as possible—ideally, at the time of introduction of the algorithm. However, we recognize that in some cases operational mastery of an algorithm can support the conceptual understanding, which might be more difficult without such mastery. Thus sometimes it can be sound pedagogy to teach an automatic procedure first and discuss the reasons for its success later. However, we strongly support the principle that such conceptual understanding be a firm goal.

(b) We believe that the notion of an algorithm, as a guaranteed method to solve a problem, can be presented in the elementary grades. This would involve at least the following four aspects:

(1) Presentation of the idea of an algorithm as a procedure guaranteed to solve a type of problem, accomplish a class of computation, or some other desired goal. (Examples would not even have to be limited to mathematics; thus, in language, verb conjugation, case formation, plural formation, etc., are (sometimes strictly, sometimes less so) algorithmic.)

(2) Experience with some specific algorithms. We believe that these should include standard algorithms for the four basic operations of arithmetic. (By “standard” we do not mean to imply that there is a unique “standard” algorithm for each arithmetic operation; however, the possibilities for “standard” algorithms for arithmetical operations will necessarily be highly constrained.)

(3) The standard algorithms of arithmetic should be seen as examples in a much broader class of things called algorithms. The fact that computer programs, even the computer games the kids play, are embodiments of algorithms could be mentioned to illustrate what a many-splendored class algorithms form. It would probably be well to cover in detail other algorithms beyond those for the basic arithmetic operations to underscore the fact that “algorithm” does not simply mean “rule for doing arithmetic”. The Euclidean algorithm for finding the GCD of two integers is directly relevant to ideas of elementary arithmetic, undergirds some important theoretical facts, and is well suited to calculator implementation.

(4) An algorithm is not the same as what it does. Thus the addition algorithm is to be distinguished from the idea of addition.

Algebra presents a natural context for considering algorithms at a higher level. Some essential ideas are:

(1) The fact that mathematical procedures can be algorithmized is a key to the usefulness of mathematics and the reason that it can be automated: algorithms are the source of the power of computers.

(2) That the guarantee of validity of algorithms is accomplished by proof and that this is a fundamental feature of mathematics. (However, the role of proof extends far beyond guaranteeing the correctness of algorithms.)

(3) There can be different algorithms to accomplish the same task, and one algorithm might be better in one context and worse in another. A good example of this could be the comparison of Cramer’s Rule with elimination for the solution of linear systems of equations. Cramer’s Rule gives an explicit formula for the solution of a system of linear equations in terms of determinants. Elimination does not provide a formula, but instead describes a procedure that will lead to the answer. One’s initial predilection might be to prefer the formula; but, in fact, the formula for determinants involves so much computation and is so vulnerable to round-off error that Cramer’s Rule is impractical for large systems, and determinants, when needed, are usually computed using elimination. Nevertheless, Cramer’s Rule is important in some cases and for conceptual purposes. Such comparisons should be encouraged throughout the curriculum.

(4) There is a strong connection between algebraic formulas and algorithms. In particular, an algebraic expression is a sort of “loose algorithm”: it is a recipe for producing some quantity from others by means of algebraic operations. Thus “$y = 3x + 2$” can be translated: “to get y from x, multiply x by three and then add two”. However, an algebraic formula is not quite an algorithm, because algebraic notation has built into it ambiguities that are known not to matter to the final outcome. Thus, in computing a sum of terms an algorithm would specify which pair of terms to add first, which further term to add to the result, and so on; but an algebraic expression does not specify an order of addition, because the associative law for addition tells us that the order of addition does not affect the final outcome. This algorithmic viewpoint can be usefully applied to the understanding of identities, which are seen as a statement that two (rough) algorithms are equivalent, in the sense that they yield equal results. For example, the standard identity $a2 - b2 = (a + b)(a - b)$ says that the two procedures are:

(i) Take two numbers, square the first, square the second, subtract.

(ii) Take two numbers, add them, subtract the second from the first, multiply the two results. Both yield the same final result.

(5) Algorithms have a recursive structure, and this recursive structure is a source of power: once one problem has been solved, the solution can be applied to further problems. The quadratic formula provides an example here: taking the algorithmic point of view toward formulas, one sees that the quadratic formula gives a procedure for finding the roots of an arbitrary quadratic equation in one unknown. It does so by expressing the solution in terms of the standard arithmetic operations and the operation of taking a square root. Thus it presupposes the ability to perform these operations.

(6) The recursive nature of algorithms is analogous to the recursive nature of mathematics itself. This recursive structure is a prime feature of logical deduction and of axiomatic systems, in which you can use either the basic postulates, or previous theorems, in proving a new result.

Some Further Comments on Question 1 (b)

It probably would be valuable to revisit the algorithms of arithmetic from the higher perspective of algebra.

Geometric constructions are effectively algorithms. (We do not mean that devising a construction is algorithmic, but that a completed construction can be read as a set of instructions to do various basic operations to produce the desired geometric object.)

It is natural to discuss algorithms in relation to computers. Getting a computer reliably to do a multistep calculation, perhaps via a spreadsheet program, rather than formal programming would provide excellent hands-on training in algorithms. A simple programming environment like Logo offers experience in the recursive aspect of algorithms. Related to machine computation, it is an interesting issue what algorithms calculators actually implement to compute the functions they offer. We do not suggest that this should be in the school curriculum, but it would be desirable for secondary teachers to know this so they could discuss it with their more advanced and interested students. The CORDIC algorithm uses very strongly the structure of elementary functions, especially the addition laws for trig functions, so it illustrates the power of such structural facts.

(c) We are aware of some suggestive studies (for example, by C. Kamii), as well as the practice of some foreign countries (e.g., Switzerland, Japan) which do well on TIMMS, that support the idea that extensive practice with mental computation helps develop strong number sense. Since the standard algorithms tend to be optimized for pencil-andpaper computation and not for mental computation, practice in mental arithmetic will probably lead to alternative algorithms. In particular, in practical problems involving addition or multiplication, estimation usually is a consideration, and for purposes of estimation the natural way to add is to combine like digits from left to right rather than from right to left, as in the standard penciland-paper algorithm, which is concerned instead with minimizing the amount of rewriting. We can believe that investigating and comparing the methods that arise may well help understanding of arithmetic. More generally, we find plausible the idea that devising personal ways to deal with arithmetic problems can promote number sense. On the other hand, we suspect it is impractical to ask all children personally to devise an accurate, efficient, and general method for dealing with addition of any numbers—even more so with the other operations. Therefore, we hope that experimental periods during which private algorithms may be developed would be brought to closure with the presentation of and practice with standard algorithms. Also, we hope care would be taken to ensure that time spent developing and testing private algorithms will not significantly slow overall progress. We believe that neither pure rote mastery of algorithms nor purely privately invented algorithms can optimize learning of arithmetic. Finding a good balance between the two is a delicate business and a matter for much practice and study. Guidance here (and elsewhere) might be found by examination of curricular materials from highranking TIMMS countries.

We note that to use invented algorithms in teaching, as opposed to their private use by students, will require teachers to be quite expert about the alternative algorithms which are possible. We suspect that the range of algorithms that will arise and that survive a test of reasonable generality will not be huge, and it could be a beneficial research activity to investigate and classify these and incorporate the results into teachers manuals so that teachers could be prepared to discuss invented algorithms profitably as they arise. We understand that Japanese teachers' manuals frequently discuss the ramifications of a given topic and survey possible student responses. Such manuals would be most desirable in the U.S. We hope that children who invent algorithms could usually be brought to understand the relation between their method and the standard algorithm. Regarding the algorithms for arithmetic, an important point to be made is that our way of writing numbers, e.g., decimal notation, is an algorithm, a very sophisticated and powerful algorithm. It produces very high information density and is marvelously adapted to computation. Furthermore, it is the result of a lengthy process of development and was not essentially complete until late in the first millennium (and not generally adopted in Europe until the sixteenth century). It incorporates in its very structure all the basic operations of rational algebra—counting, addition, multiplication, and exponentiation. Finally, it conditions the other algorithms we use—for example, an addition algorithm is not something that tells us how to add—which is a primitive intuition; an addition algorithm is something that tells us how to express the sum of two numbers, each expressed in standard decimal form, in standard decimal form also. It is probably not appropriate to tell all of this to children, but some propaganda to help them appreciate what a marvelous machine they are operating (whether or not they are using a calculator!) might be useful. Ethnomathematics might help supplement and reinforce the comparisons available through the traditional study of roman numerals, which were also a decimal system, but less systematic than our Hindu-Arabic one.

Teachers should be deeply aware of the algorithmic qualities of our decimal notation and of the reasons for its power. In particular, they should keenly appreciate that our decimal notation is a highly unnatural creation, one which took about four of our five millennia of civilization to produce, and that its efficiency and apparent simplicity are the result of the sophistication of its construction. From a practical point of view, we suspect that a sufficiently deep appreciation of the beauty, power, and sophistication of the decimal system could help teachers bridge the gap between standard arithmetic algorithms and the ones invented by their students.

Standard algorithms may be viewed analogously to spelling: to some degree they constitute a convention, and it is not essential that students operate with them from day one or even in their private thinking; but eventually, as a matter of mutual communication and understanding, it is highly desirable that everyone (that is, nearly everyone we recognize that there are always exceptional cases) learn a standard way of doing the four basic arithmetic operations. (The standard algorithms need not be absolutely unique, just as there are variant spellings between, say, the U.S. and England, but too much variation leads to difficulties.) We do not think it is wise for students to be left with untested private algorithms for arithmetic operations such algorithms may only be valid for some subclass of problems. The virtue of standard algorithms that they are guaranteed to work for all problems of the type they deal with—deserves emphasis.

We would like to emphasize that the standard algorithms of arithmetic are more than just "ways to get the answer"—that is, they have theoretical as well as practical significance. For one thing, all the algorithms of arithmetic are preparatory for algebra, since there are (again, not by accident, but by virtue of the construction of the decimal system) strong analogies between arithmetic of ordinary numbers and arithmetic of polynomials. The division algorithm is also significant for later understanding of real numbers. For all its virtues, decimal notation suffers a significant drawback over, say, standard notation for fractions: decimal numbers (meaning decimal fractions with finitely many terms) do not allow division. This can be remedied at the cost of using infinite decimal expansions, but this is a big leap, and the general infinite decimal is not rational. To understand that rational numbers correspond to repeating decimals essentially means understanding the structure of division of decimals as embodied in the division algorithm. We do not see that naive use of calculators can be of much help here: the length of repeat of a decimal will typically be comparable to the size of the denominator, so that 7/23 or 5/29 will not reveal any repeating behavior on standard calculators.

(d) The most important thing is that they exist; there are uniform ways of solving an entire class of problems.

It is important to understand that in learning an algorithm you are confronting the essence of the phenomenon with which the algorithm deals, since it is guaranteed to accomplish its aim. Also, that, once learned, the algorithm gives you automatic mastery over the topic.

Thirdly, there is the demystification of machines: your calculator and your computer perform algorithms—in fact, that is all they do. Limitations on the algorithms limit the processes they can handle.

Again, it is important to distinguish between an algorithm and what it accomplishes.