Evaluation cinquième : le niveau monte.*

(le niveau d'antagonisme des arguments officiels contradictoires, bien sûr)*

Risques de divisions sur l'évaluation de l'évaluation ?

(Projet /Draft)

Michel Delord

Cette année, grande nouveauté. Evaluation en cinquième. Les premiers résultats tournent au-dessous de 50% de réussite en français et en mathématiques alors que les évaluations de sixième tournaient autour de 70 % pour les mêmes élèves. D'où la première réaction des autorités responsables : on ne peut pas comparer ce qui n'est pas comparable et d'ailleurs, les évaluations ne servent pas à évaluer le niveau, comme nous l'avons toujours dit. Petite difficulté : "*on*" ne l'a pas toujours dit, ou plus exactement "*on*" a dit tout et le contraire suivant les besoins du moment. Gérard Molina l'a dit beaucoup mieux que moi dans "*Un cas d'école : le niveau* "[1] :

> Mais la confusion empire avec les résultats de l'évaluation CE2-6e de la rentrée 1998. À courte échéance, on est confronté à une chute importante : à l'entrée en 6e, presque deux fois plus d'élèves ne maîtrisent pas les compétences de base en lecture (20,8 % en 1998 contre 11,5 % en 1992) , c'est pire

[1] *In* Gérard Molina, *Refonder l'école ou accompagner sa dérive ?* , *L'aventure humaine*, "Oser enseigner", n°10/2000, mai 2000. Pages 97-103. Les références précises de toutes les citations sont données sur le site.
http://www.sauv.net/ananiveau.htm
D'autre part, je n'aborde pas ici la comparaison effectuée par la DEP entre le niveau des élèves en 1920/25 et ceux de 1995 qui a fait dire à Luc Ferry : *" La comparaison récente (juillet 1995) entre les élèves passant le certificat d'études dans les années vingt et ceux d'aujourd'hui confirme, sur ces deux registres [lire-écrire et calcul], ce qu'il faut bien appeler une "baisse de niveau"."* Alors que l'on peut montrer qu'elle a été faite en utilisant des hypothèses et méthodes qui diminuent l'écart de performance constaté.

en mathématiques (38 % ne maîtrisent pas les compétences de base en techniques opératoires contre 17,4 % en 1992). Sans céder au fétichisme des chiffres, il y a là au moins une tendance à la baisse des performances qui interroge le bien-fondé des réformes opérées depuis 1989. Or le ministère préfère lancer les patrons de l'ex-Direction de l'évaluation et de la prospective (D.E.P., devenue Direction de la programmation et du développement) qui dénigrent leur travail avec des arguments dont la malhonnêteté laisse pantois.

a / L'ex-directeur de la DEP, Claude Thélot, soutient que toute comparaison est illusoire car les épreuves cernent des compétences incommensurables, affirmation reprise par le nouveau responsable de l'évaluation, Michel Garnier (Le Monde, 14 septembre 1999). Mensonge pur et simple : Thélot et ses collaborateurs avaient obtenu en 1989 la création des évaluations dans le but de *"vérifier dans quelle mesure les élèves ont acquis les savoirs et les savoir-faire correspondant aux exigences du fonctionnement actuel des classes de 6e*". Que l'on sache, depuis 1992, les " exigences " de la 6e n'ont pas grimpé en flèche ou changé du tout au tout.

b / Claude Thélot (suivi par Michel Garnier) assure que cette évaluation n'a pas été conçue pour comparer les résultats d'une année à l'autre, mais il affirma exactement le contraire à plusieurs reprises. Ainsi, en rendant compte des résultats de 1990, Thélot écrivait : *" En 1991, pour répondre au souci légitime de comparaison, déjà évoqué plus haut, il est d'ores et déjà prévu que l'évaluation devrait retenir une partie des épreuves déjà proposées pour prendre en charge certains objectifs, ce qui permettra d'établir des comparaisons scientifiquement fiables* " (Éducation et formations, hors série, janvier 1991). L'année suivante il confirmait que " *l'évaluation de 1991 comporte des exercices déjà proposés les années passées, afin d'établir des comparaisons dans le temps* " (ibid., janvier 1992), etc. C'est bien pourquoi l'évaluation a toujours lieu à la même période, aux mêmes niveaux, selon les mêmes procédures, en usant d'une distribution des résultats et de grilles d'analyse identiques... Malgré cela le ministère ose prétendre que cet outil " *au maniement extrêmement délicat* " (sic) *" n'a pas été conçu comme un instrument de mesure du niveau* " (Le Monde, 14 septembre 1999).

Intéressons nous plus précisément aux mathématiques et plus particulièrement à la maîtrise des opérations et, en particulier, à celle de la division car elle est fondamentale : sa maîtrise dépend de la maîtrise des autres opérations et elle en est donc le critère[2]. La thèse officielle -qui oppose le sens de l'opération à sa pratique- est en train de prouver sa faillite. En effet, prenons deux exercices de cette nouvelle évaluation, l'un qui est censé s'attacher au sens de la division, l'autre à la maîtrise de la technique de cette opération :

---

[2] Voir Daniel Djament, *A propos des projets de documents d'application des programmes de l'école élémentaire*, Bulletin de l'APMEP n° 426, de janvier-février 2000.
http://publimath.irem.univ-mrs.fr/bibliocomp/AAA00001.htm

. Résumé de l'article : Vouloir initier les élèves au calcul mental approché est excellent, mais cet objectif est contradictoire avec l'affirmation des projets de programme [de 1999 - MD]selon laquelle : " *Apprendre à faire une division est un travail formel qui n'éclaire pas le sens de cette opération et qui par ailleurs prend beaucoup de temps* " À condition bien sûr d'avoir une méthode efficace pour enseigner la division...

Extrait :

"*Pour moi, apprendre à faire une division est un travail profond et simple qui éclaire magnifiquement le sens de cette opération et qui ne prend pas si longtemps que certains le pensent.*

Il est vrai que la lecture de la majorité des manuels de l'école élémentaire laisse penser qu'apprendre à effectuer une division est une tâche d'une insurmontable difficulté et d'une lourdeur insupportable. C'est pourquoi je me propose, sur quelques exemples, de montrer que, loin d'être une mission impossible, l'apprentissage de la technique opératoire de la division est facile et qu'y renoncer, car c'est vers cela que nous nous acheminons, serait lourd de conséquences.

Il est bien évident que, pour faire des divisions, il faut avoir une bonne habitude des autres opérations : en particulier la multiplication et la soustraction. L'apprentissage de la division s'appuie sur les acquis antérieurs et révèle leurs éventuelles insuffisances : moins la technique opératoire de la division sera étudiée, plus les incompréhensions sur les autres opérations seront masquées et moins les maîtres pourront y remédier."

Exercice 23 : *Pierre a choisi un nombre. Il divise ce nombre par 5. Il trouve comme quotient 8 et comme reste 3. Quel est ce nombre ?*

Exercice 28 : *Pose et effectue la division 178,8 : 8*

Si vous n'avez pas le souffle coupé par la colossale difficulté de ces exercices pour des élèves de cinquième, vous pouvez lire la suite : globalement, non seulement dans mon établissement, mais dans la plupart de ceux que j'ai pu contacter 1/3 des élèves échouent au premier exercice (c'est-à-dire qu'ils ne savent pas que 8*5+3 = 43) et 2/3 échouent au second. Lorsque, de plus, on sait que ces connaissances, fondamentales, relèvent de l'apprentissage à l'école primaire, n'ont qu'à être révisées en sixième, sont considérées comme acquises en cinquième et ne figurent donc plus parmi les connaissances à enseigner au-delà, il y a de quoi relancer le débat sur le *«maillon faible du système éducatif»*. Débat qui a d'ailleurs été relancé, sans que cela ne soit repris au niveau médiatique, par le rapport de l'Inspection Générale de mars 2002 : « *La classe de sixième : état des lieux et réformes en cours* »[3].
Extrait, *page 20* :

> *"L'évaluation qui est actuellement effectuée au début de la sixième ne peut tenir lieu de bilan des acquis. Elle n'est pas conçue dans cet esprit. Le résultat, c'est qu'il n'y a pas, aujourd'hui, de connaissance étalonnée de ce que savent ou ne savent pas les élèves à la fin de l'école primaire. On commence alors les études au collège sans visibilité et, surtout, sans possibilité de rétroaction sur un niveau du système éducatif qui est, de fait, déresponsabilisé. Il faudrait très vite porter remède à cette difficulté. Il n'est pas exclu qu'il apparaisse alors que le « maillon faible du système éducatif », que l'on situe de manière convenue au collège, puisse se trouver plutôt en amont."*

Alors, avis de coup de vent, de tempête ou de cyclone?

[3] ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/syst/igen/rapports/6eme.pdf

A) L'apprentissage de l'algorithme de la division dans les programmes

Les instructions officielles laissent planer un doute puisqu'elles n'affirment jamais (c'est-à-dire y compris au niveau collège) que l'élève doit connaître l'algorithme de la division[4], c'est-à-dire qu'il doit savoir faire une division dans tous les cas et quel que soit la "taille" et la nature du nombre : il est donc assez normal que les élèves ne sachent plus ce que l'on appelle traditionnellement "faire une division". Ce que l'on peut vérifier en posant une division du type 1,23425 par 0,537[5] à un élève de lycée, en lui demandant simplement le quotient au 1/10 (il n'a que deux chiffres à trouver pour le quotient) et le reste correspondant à ce quotient.

Dans leur brièveté, voici les directives officielles :

Programme de 1995 - Ecole primaire :

"Division euclidienne (avec quotient et reste) de deux entiers, division d'un décimal par un entier."

Ceci laisserait croire que l'élève doit savoir faire la division des entiers dans tous les cas. Erreur:

Programme de 1995 - Sixième de Collège :

Compétences exigibles

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres. Effectuer, dans des cas simples, la division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier.

Commentaires

La division est une opération en cours d'acquisition en début de collège. On la reliera aux problèmes d'encadrement d'un entier (ou d'un décimal) par des multiples d'un entier et on entraînera les élèves à donner aussi bien l'approximation entière d'un quotient par excès que par défaut. L'objectif principal est l'acquisition du sens de l'opération, au travers d'une pratique et de diverses utilisations. Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux.

Nouveau programme Primaire février 2002

Programme

"Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres), par un calcul posé."

Document d'accompagnement

"On se limite à des calculs qui peuvent effectivement être rencontrés dans l'usage courant. Ces limitations relatives à la taille des nombres ne concernent évidemment pas les calculs du type 2 455:10 ou 12,563 : 100…

Le calcul de divisions (quotient entier et reste) doit être limité à des cas raisonnables : dividende ayant au plus quatre chiffres, avec pose effective des soustractions intermédiaires et possibilité de poser des

[4] Dans ce texte, je ne répondrai pas à la question "Pourquoi doit-on apprendre les algorithmes des opérations ?". D'une part , cette question est traitée dans d'autres textes : par exemple , dans la notice de l'AMS, *Reports of AMS Association Resource Group*, 1998 , http://www.ams.org/notices/199802/comm-amsarg.pdf) ou, brièvement, dans « *Sur l'enseignement primaire en France* », MD, Milan, 19 Avril 2002. D'autre part, le ministère a maintenant une position ambiguë puisqu'il ne dit plus qu'il ne faut pas les connaître comme en 1999 mais impose des méthodes qui sont des obstacles à leur apprentissage car elles sont justement les méthodes d'apprentissage du calcul prévues par ceux qui trouvent inutile voire néfaste de les apprendre : voir par exemple "*Let's abolish Pencil and Paper Arithmetic*" (www.doc.ic.ac.uk/~ar9/abolpub.htm)

[5] C'est à dire la division d'un décimal par un décimal : l'apprentissage en est soit disant reporté en cinquième à partir de la notion de fraction en utilisant le fait que 1,23425 : 0,537 = 1,23425/0,537 = 1234,25/537 = 123425/53700. Mais il ne s'agit pas de l'apprentissage de la division de deux décimaux puisque, par exemple, cette présentation ne permet que très difficilement de déterminer le reste correspondant à un quotient de précision donnée. **On peut donc dire que la division de deux décimaux n'est plus enseignée du tout à quelque niveau que ce soit.**

produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient. L'algorithme de la division sera repris dans le programme de 6ème et prolongé au cas du quotient décimal."

<u>B) Quelques remarques sur l'évolution des programmes:</u>

I) Version langue de bois pour les parents

La version des programmes destinée aux parents parue dans "*Qu'apprend on à l'école élémentaire ?*" laisse le doute complet sur le niveau de maîtrise des "techniques opératoires" puisque les parents peuvent lire :

> " *Le calcul sur les nombres entiers et décimaux se développe sous différents aspects : mémorisation des résultats, techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication, division euclidienne), calcul réfléchi exact ou approché, ordres de grandeur, utilisation des calculatrices*."

D'autant plus que s'ils lisent "*Qu'apprend on au collège ?*", ils ne verront justement pas que les opérations ne sont pas maîtrisées au collège puisque la question n'y est abordée que dans la phrase suivante :

> "*Au collège, il est également nécessaire de poursuivre l'apprentissage du calcul numérique (calcul mental, écrit ou instrumenté), la pratique des règles de calcul et des formules, l'usage des règles de priorité.* "

Ceci traduit d'ailleurs bien la position du ministère, position contradictoire :

- sous l'influence ancienne et néfaste des divers spécialistes de la pédagogie, on nie l'importance de la connaissance des algorithmes des opérations à la main. Pour mémoire, on peut citer

> i) la position de la COPREM (organisme officiel chargé de la réflexion sur les programmes) en 1983:
> *" La maîtrise parfaite des " quatre opérations" effectuées sur papier n'est plus de nos jours une nécessité absolue en soi, puisque le cas échéant, la machine peut jouer un rôle de "prothèse pour le calcul". Il n'est donc pas très important d'atteindre une grande fiabilité dans l'exécution sur papier des opérations : en cas d'urgence, on pourrait se procurer pour une somme modique (quelques paquets de cigarettes) une calculette à la boutique du coin."*
>
> ii) puis celle du projet de programme de 1999, qui avait donné lieu à une consultation jugée positive mais qui a été ensuite abandonné :
> « *L'existence des calculettes oblige à reconsidérer globalement l'apprentissage de la division. Alors que les techniques de l'addition, de la soustraction et, de façon plus délicate, la technique de la multiplication permettent d'enrichir le sens que les élèves donnent à chaque opération, il n'en est pas de même pour la division. Apprendre à faire une division est un travail formel qui n'éclaire pas le sens de cette opération et qui par ailleurs prend beaucoup de temps. D'autre part, même si l'élève parvient à acquérir cette technique, celle-ci est souvent vite oubliée.* » Et de conclure : on doit «*rester dans le champ de la table de multiplication liée au diviseur (si on divise par 6, le dividende ne dépassera pas 60)* ». Cette dernière phrase signifiait directement que l'on n'apprend plus à faire une division car apprendre à faire une division signifie justement "sortir du champ de la table de multiplication "

- une volonté démagogique manifeste de dissimuler cet état de fait au grand public [6]. Au moment de la sortie du projet de Programme de 1999, alors que c'était un événement historique, puisque c'était la première fois que la

[6] Il faut dire que le "grand public" n'a pas été véritablement renseigné par les journalistes – de quelque bord que ce soit - dont la seule "investigation" semble être la lecture des communiqués du ministère. Quant aux divers organismes syndicaux et associations d'enseignants, ils ont globalement approuvé les projets de programme de 1999.

maîtrise de la division disparaissait des exigences de l'école primaire depuis 1882, M. Allègre n'a pas clamé sur tous les toits : " *Vos enfants n'apprendront plus la division en primaire* "[7].

[7] On a exactement le même processus de liquidation discrète pour la question de la dictée : comme pour la division que l'on dénigre en en précisant de moins en moins le rôle et la place dans l'apprentissage, le programme de Février 2002 ne définit aucun aspect positif à la dictée tout en ne précisant ni sa place ni son rôle dans l'apprentissage. Dans le BO des nouveaux programmes, les ***seules références*** à la dictée, c'est-à-dire pas la "dictée à l'adulte" mais à la véritable dictée non préparée dont parle Claude Duneton (voir *infra*) sont des références négatives : on y apprend seulement en effet ce à quoi … la dictée ne sert pas, ce qui est la négation de la notion même de programme puisque doit y figurer ce qui doit être appris :

- page 44 : " *L'écriture d'un mot que l'on ne sait pas encore écrire permet, en effet, de revenir à une activité de synthèse qui vient compléter l'analyse.* ***La dictée n'en est pas le seul moyen*****."**

- page 47 : pour les problèmes d'orthographe **: "*la dictée ne peut tout régler***" .

La similitude est flagrante entre la position du ministère sur la dictée et sa position sur la division car il dénigre ces deux activités sous des prétextes assez grossiers qui ne sont pas les rôles fondamentaux qu'avaient ces deux activités : sous le prétexte que la dictée se terminait par une note portant sur l'orthographe ou que l'apprentissage de la division permettait de trouver un résultat numérique, des gens quand même spécialement payés pour réfléchir à ce qu'est l'enseignement en sont arrivés à déduire que la dictée ne servait qu'à apprendre l'orthographe et que l'apprentissage des opérations ne servaient qu'à trouver le résultat.

"*Un autre des exercices ultra-classique que l'on s'est mis à négliger, sans en connaître, heureusement, la véritable portée, c'est la dictée. La dictée n'a jamais eu, contrairement à ce qu'on pense, un intérêt bien considérable pour l'apprentissage de l'orthographe... Et encore il faut distinguer entre la dictée vraiment enseignante, expliquée tout du long, et la dictée dite « de contrôle », la plus pratiquée, celle où l'on comptait les fautes à la fin, et les points — et qui ne servait à rien! Au moins en ce qui concerne la graphie de la langue, car elle avait un rôle très important on revanche —~ je dis bien en revanche, car c'en est une! —, un rôle généralement incompris et peu soupçonné : insuffler dans l'inconscient des gosses une dose de langue française qui l'alimentait d'une manière des plus subtiles et des plus efficaces, parce que détournée. Ces textes d'une dizaine de lignes, choisis la plupart du temps, dans les phrases longues de la littérature pour donner une meilleure prise à l'analyse logique qui suivait, étaient d'abord lus lentement dans une sorte d'attention sacrée, rituelle, où chaque auditeur essayait de détailler les mots et les tournures, et de se faire une première idée des difficultés à venir*."
in Claude Duneton, *A hurler le soir au fond des collèges*, Collection "Points Actuels",Paris, 1983

II) Allégement et régression

- Contrairement à ce que dit M. Pernoux, chargé cependant [8] de la formation des professeurs des écoles en IUFM, il y a eu effectivement un allégement des programmes sur une question fondamentale, répétons-le, puisqu'elle révèle les lacunes de l'apprentissage des autres opérations puisque, entre 1995 et 2002 disparaissent des programmes du primaire :

a) la division d'un décimal par un entier
b) la division d'un entier quelconque par un entier à deux chiffres

- ***Ce qui fait que les programmes de 2002 de fin d'école primaire se situent maintenant en-dessous des exigences des programmes de Cours élémentaire jusqu'aux années 70*** puisque ceux ci demandaient la maîtrise de la division de tout entier par un entier à deux chiffres. Et le problème ne se réduit pas à la division mais couvre aussi la multiplication des nombres entiers puisque, alors que les programmes de Cours Elémentaire de 1882 à 1970 exigeaient la maîtrise de toutes les multiplications de nombres entiers, les nouveaux programmes de 2002 de fin d'école primaire se limitent à : "*Calculer le produit de deux entiers ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé*."(B.O.E.N. *page 85*)

- On peut poser un certain nombre de questions sur la limitation à un nombre à deux chiffres du diviseur. On pourrait penser que la division d'un nombre à plus de deux chiffres s'effectue de la même manière que la division à deux chiffres : il n'en est rien lorsque l'on suit les conseils pédagogiques donnés par les programmes qui ne sont d'ailleurs que le reflet minimum de ce qui est fait en IUFM et dans de nombreuses classes primaires. En effet ceux-ci précisent qu'il y a la " *possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient"*. Prenons un exemple pour voir ce que cela signifie, c'est-à-dire quelles sont les méthodes qui sont employées pour effectuer les divisions, méthodes que je vois gagner d'années en années un plus grand nombre de mes élèves de sixième et qui, justement, ne sont pas des méthodes générales qui s'étendent facilement pour l'apprentissage de toutes les divisions :

Prenons tout d'abord une division par un nombre à un chiffre en ne posant pas les soustractions mais en ayant la" *possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient"* .

3	4'	7	1	7
	6	7		495
		4	1	
			6	

7	*	1	=	7	7	*	6	=	42
7	*	2	=	14	7	*	7	=	49
7	*	3	=	21	7	*	8	=	56
7	*	4	=	28	7	*	9	=	63
7	*	5	=	35					

Il est évident que, si l'élève ne connaît pas ses tables de multiplication par cœur, il ne peut se passer d'écrire tous les résultats de la table car il est obligé de consulter la liste de tous les multiples du diviseur pour connaître le chiffre qu'il doit écrire au quotient. S'il connaît ses tables, il est inutile d'en écrire les résultats dans ce cas (division par un nombre à un chiffre) et, tout au contraire, recommander cette pratique encourage l'ignorance des tables, ce qui devient un handicap majeur pour effectuer les autres multiplications et divisions. Donc, dans le cas des divisions par un nombre à un chiffre, ce conseil pédagogique est entièrement négatif.

[8] Si j'ai écrit "cependant", c'est qu'il est quand même étonnant que M. Pernoux, qui est chargé de la formation des professeurs d'école, ne se soit pas aperçu de cet allégement. Il y a deux hypothèses : soit il ne connaît pas le programme qu'il doit enseigner à ses élèves, soit il nie l'évidence pour défendre des programmes lamentables.

M. Pernoux s'était adressé aux rédacteurs de la pétition primaire dans un mail adressé le 16 Novembre 2001:
"*Pour ce qui est du projet de programme de mathématiques les quelques lignes figurant dans l'appel me semblent critiquables et le «passage à la trappe de l'aire et du périmètre du cercle », qui semble être effectivement le seul véritable nouvel allégement, ne me semble pas confirmer l'impression d'un allégement continu des programmes*."
In Michel Delord, *Appel sur l'enseignement primaire : A propos des commentaires de M. DominiquePernoux*
http://michel.delord.free.fr/prim_dp1.pdf

Passons à la division par un nombre à deux chiffres dans le cas de "difficulté maximum" autorisé par les programmes, c'est-à-dire quand le dividende est un nombre à 4 chiffres et le diviseur un nombre à 2 chiffres, soit, par exemple, la division de 4311 par 44 :

4	3	1'	1	|	44
	3	5	1	|	97

44	*	1	=	44	44	*	6	=	264
44	*	2	=	88	44	*	7	=	308
44	*	3	=	132	44	*	8	=	352
44	*	4	=	176	44	*	9	=	396
44	*	5	=	220					

On commence à deviner pourquoi la "*possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient"* devient très lourde puisqu'elle oblige ici à écrire le résultat de 9 multiplications pour trouver seulement les 2 chiffres du quotient.

Rappelons la méthode "classique" qui évite le calcul l'ensemble des multiples du diviseur pour trouver la valeur des chiffres du quotient :
- on sépare 3 chiffres à gauche du dividende puisque 44 est supérieur à 43 puis
- on dit : "*En 431 combien de fois 44 ou en 43 combien de fois 4 ?*" : il y va 9 fois.
- on dit : "En 351 combien de fois 44 ou en 35 combien de fois 4" : il y va 8 fois. On fait l'essai. En fait, il n'y va que 7 fois.

Cette méthode donne, à chaque fois, soit le chiffre du quotient, soit, s'il est trop "fort", le chiffre supérieur, c'est-à-dire qu'elle permet de trouver le bon chiffre du quotient au maximum en deux opérations.

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire division d'un nombre à 4 chiffres par un nombre à 2 chiffres, la méthode imposant la pose des multiplications de tous les multiples du diviseur conduit, <u>dans tous les cas</u>, à poser 8 multiplications soit à calculer 16 produits partiels pris dans la table de multiplication (y compris pour l'exemple *infra*, 3991 par 44, où il suffit d'une multiplication).

Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire division d'un nombre à 4 chiffres par un nombre à deux chiffres, la méthode "classique", rend nécessaire le calcul d'un nombre de multiplications variant

- de UNE multiplication (c'est-à-dire 2 produits partiels) dans le cas de la division de 3991 par 44, par exemple, puisque on "devine" directement les deux chiffres du quotient 90 ("En 39, combien de fois 4 ? 9 fois" et, "En 31, combien de fois 44? 0 fois")

3	9	9'	1	|	44
	0	3	1	|	90
		3	1	|	

- jusqu'à 6 multiplications (c'est-à-dire 12 produits partiels) au maximum dans le cas où il faut poser 2 multiplications pour trouver chaque chiffre du quotient.

<u>On comprend donc que la méthode autorisée soit très lourde et pénible pour les divisions du programme mais elle devient très rapidement insupportable pour des divisions hors programme aussi simples que 39538 par 4393.</u>

En effet, la méthode classique et optimisée par plusieurs siècles d'utilisation sociale est la suivante :
On dit : " En 39538, combien de fois 4393 ou, en 39, combien de fois 4 ? Il y va 9 fois". On calcule UNE multiplication, sans la poser, c'est-à-dire 9* 4393 = 39537 (4 produits partiels) et la division est finie puisque le reste est 1.

3	9	5	3	8	|	4393
				1	|	9

La méthode des apprentis sorciers est la suivante et elle nécessite le calcul de 8 multiplications, c'est-à-dire de 32 produits partiels

3	9	5	3	8	4393	4393	*	1	=	4393	4393	*	6	=	26358
				1	9	4393	*	2	=	8786	4393	*	7	=	30751
						4393	*	3	=	13179	4393	*	8	=	35144
						4393	*	4	=	17572	4393	*	9	=	39537
						4393	*	5	=	21965					

Je pourrais prendre d'autres exemples mais je pense que la conclusion est claire :

- Si les programmes actuels refusent que les élèves sachent faire une division, à part dans des cas particuliers pour des "petits nombres", c'est essentiellement qu'ont été mis en place et recommandés des modes d'apprentissage qui ne permettent pas de calculer. Et encore, a) je n'en ai montré qu'un aspect particulier de cette difficulté et b) je ne me suis pas étendu aux modes d'apprentissages de l'addition, de la soustraction et de la multiplication (en calcul écrit et calcul mental) qui sont en fait des obstacles à l'apprentissage de la division elle-même. On comprend mieux maintenant les remarques figurant dans le dernier programme et les documents d'accompagnement de ces derniers (c'est moi qui souligne, M.D.) :

> - page 93 du B.O.E.N. : "*Les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur <u>des nombres d'usage courant</u>* [Encore une innovation conceptuelle ; 39 538 n'est pas un "nombre d'usage courant" comme dividende et il le sera de moins en moins puisqu'il est interdit comme tel par le programme et que faire le contraire serait "une recherche de virtuosité excessive". M.D.], *en s'attachant à assurer une bonne compréhension des étapes du calcul. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une <u>recherche de virtuosité excessive</u>*."
>
> - page 26 du document d'accompagnement : *" Les compétences relatives aux techniques opératoires sont inséparables de la résolution de problèmes : l'élève doit acquérir une bonne aptitude à organiser ses calculs, <u>sans nécessairement toujours utiliser le procédé le plus court</u>."* Cette dernière remarque est un doux euphémisme puisque, dans le cas de la division, on lui a appris systématiquement les procédés les plus longs.

- Revenons, dans le cas de la division, à la justification de la nécessité de poser les multiplications et les soustractions intermédiaires : ce souci existait dans l'enseignement avant 1970 – je pourrais donner des exemples pratiquement dans tous les manuels depuis 1880 – mais visait simplement les débuts de l'apprentissage en Cours Elémentaire. Très rapidement, c'est-à-dire dès que l'élève en avait la capacité, on passait à la "méthode des grands ", c'est-à-dire que l'on ne posait plus ni les multiplications ni les soustractions. Un des effets positifs de cette méthode était que les élèves faisaient du calcul mental (addition, soustraction, multiplication et division) sans s'en apercevoir, c'est-à-dire, en plagiant Claude Duneton, " *insuffler dans l'inconscient des gosses une dose de calcul mental qui l'alimentait d'une manière des plus subtiles et des plus efficaces, parce que détournée".* Nos modernes pédagogues, qui insistent tant sur le rôle du calcul mental en l'opposant à l'apprentissage du "calcul posé" ont commencé par le supprimer là où il se faisait le plus et de manière inconsciente car ils n'ont vu, comme d'habitude, dans l'apprentissage des algorithmes classiques des opérations que son but le plus grossier qui est le moyen de trouver un résultat (ce qui réduit leur importance à celle de la calculette).

- Nous pouvons maintenant aborder la justification centrale pour ce type d'apprentissage, celui du "sens de l'opération"[9]. Il est tout à fait vrai qu'une division est une soustraction répétée de la même manière qu'une

[9] Si l'on veut véritablement parler du ***sens de la division* ***, point que je ne développerai pas ici, <u>il se situe justement dans deux domaines qui sont strictement niés dans les programmes actuels</u>

- d'une part la liaison qui existe entre la division des nombres entiers et la division des polynômes, c'est-à-dire la préparation du calcul algébrique par le calcul sur les entiers :

multiplication est une addition répétée : il est tout à fait utile dans ce sens de faire remarquer, sur des petits nombres et pour éclairer cet aspect de la division que, par exemple, si l'on divise 38 par 7 et que l'on trouve 5 au quotient, ce 5 signifie que l'on peut soustraire au maximum 5 fois 7 à 38. Mais cela ne justifie en aucune manière que le quotient de la division de 4567 par 34 soit obtenu en effectuant 134 soustractions successives de 34 sur le modèle suivant dont je vous passe les 128 (i.e. 134 –6) étapes non reproduites :

4567-34 = 4533; il y va 1 fois
4533-34 = 4499; il y va 2 fois
4499-34 = 4465; il y va 3 fois
/
/
/
113-34=79; il y va 132 fois
79-34 = 45; il y va 133 fois
45-4=11; il y va 134 fois
11-34 impossible donc le quotient euclidien de 4567 par 34 est 134 et le reste est 11.

Folie, direz-vous, personne ne fait ça. Erreur : dans un pays comme les USA où le niveau de calcul des élèves est devenu tout à fait lamentable, cette méthode est employée sur de tels nombres pour "donner du sens". Je prends un exemple faisant partie de ce qui était montré dans le débat[10] organisé par *l'American Enterprise Institute.* On voit même sur la vidéo[11] les nombreuses feuilles de tableau papier que les élèves ont noirci – collectivement !!!- pour arriver au résultat. Et cette méthode est recommandée par les mouvement de type *"Hands on Math"* qui elle aussi produit de nouveaux *concepts*[12], comme les programmes actuels en France, justifiiant qu'il ne faut savoir calculer que sur les *petits nombres* : ce que le programme appelle ici "les nombres d'usage courant" s'appelle là-*bas "familiar numbers*", "*<u>landmark numbers</u>*" (*points de repères*, qui sont 5, les multiples de10 et de 25) que l'on appelle aussi "*anchor*s", c'est-à-dire ancres. Il y a donc encore de la place pour la *conceptualisation*[13].

Mais en fait, qu'en est-il de ce type d'activité ? Outre qu'elle fait perdre un temps fou - ce qui est secondaire car il est souvent tout à fait utile et même indispensable de "perdre du temps" lorsque l'on apprend -, <u>elle est en fait</u>

---

la division de $\mathbf{6}X^2+\mathbf{5}X+\mathbf{1}$ par $\mathbf{2}X+\mathbf{1}$ donne $\mathbf{3}X+\mathbf{1}$ de la même manière que
la division de **651** par **21** donne **31**

- les deux sens de la division qui sont " *trouver le nombre de parts* " et "*trouver la valeur d'une part* " ne peuvent être réellement compris que si l'on ne s'en tient pas à l'aspect purement numérique des opérations c'est-à-dire si l'on introduit <u>en primaire</u> les bases de l'analyse dimensionnelle et du calcul sur les grandeurs :

Par exemple, à la multiplication 2 * 3m = 6m correspondent deux divisions
- la division 6m : 3m = 2 qui donne le "nombre de fois", c'est-à-dire "*le nombre de parts*"
- la division 6m : 2 = 3m qui donne la " *valeur d'une part* "

Ces deux sens de la divisions étaient enseignés avant 1970 dés le Cours Elémentaire** alors que le programme de Février 2002 n'en présente qu'un seul et mal (Accompagnement des programmes, p. 29) ce qui équivaut à rendre les élèves incapables de résoudre un problème basé sur la division.

* Sans parler du point central mathématique de la division euclidienne, qui n'est pas de niveau primaire : l'unicité de l'existence du couple (quotient, reste)

** Voir la note 2 de "Les aventures de la division" à http://michel.delord.free.fr/avdiv1.pdf

10

Does Two plus Two Still Equal Four? What Should Our Children Know about Math?
Monday, March 4, 2002
http://www.aei.org/past_event/conf020304.htm

11 http://video.c-span.org:8080/ramgen/mdrive/e030402_math.rm

12 C'est-à-dire produit un discours ampoulé et précieux pour cacher la vacuité de l'enseignement qu'elle propose
.

13 Voir le site de Bill Quirk et en particulier la critique de "TERC Hands-On Math", c'est-à-dire "La main à la pâte en Maths"
http://wgquirk.com/TERC.html

une négation de l'apprentissage de la division puisque la division a été inventée pour raccourcir une suite de soustractions : rester trop longtemps sur ce type d'activités qui s'imprime ainsi comme méthode générale de la division pour l'élève revient à mettre en place et mémoriser un type d'algorithme[14] mais qui est beaucoup moins performant que l'algorithme classique. On arrive ainsi au paradoxe suivant : au nom du refus de l'apprentissage par cœur et de la nécessité du "sens", les élèves mémorisent des procédures automatisées non performantes qui s'opposent ensuite à la mémorisation des algorithmes classiques dont ils ne peuvent pas voir l'intérêt puisqu'on ne les met pas dans des situations où la supériorité de l'algorithme classique est patente. On pourrait même montrer que, dans ce cas comme dans d'autres similaires, il s'agit d'une ***régression mathématique*** car l'élève mémorise des automatismes qui relèvent du comptage - dans l'exemple donné l'élève ***compte*** le nombre de soustractions alors que dans l'algorithme classique, il est ***calculé*** - alors que les algorithmes les plus performants relèvent du calcul et donc de l'intelligence du calcul.

De plus, on pourrait montre que, même si la division peut se définir comme une suite de soustractions identiques, l'intérêt spécifique de la division dépasse justement le fait que la division soit une suite de soustractions parce que justement, elle est une *suite* de soustractions. On peut le montrer plus facilement pour la multiplication qui est une suite d'additions de termes identiques : ce fait indéniable n'empêche pas que la multiplication a des propriétés qui ne sont pas celles de l'addition. Je n'en donnerai que deux exemples

- la perception de la suite des nombres entiers au travers de la seule addition en fait ce que *Rozsa Péter* appelle la suite grise et uniforme des entiers tandis que l'introduction de la multiplication y introduit une irrégularité et ce qu'elle appelle de la couleur[15] (cette couleur n'est plus perceptible aujourd'hui puisque ce qui permet de la reconnaître est la maîtrise des nombres premiers qui ne sont plus au programme ni du primaire ni du collège)
- dans une addition, les deux nombres additionnés, c'est-à-dire les deux termes de la somme, jouent conceptuellement le même rôle alors que dans la multiplication de deux entiers ce n'est pas le cas puisque l'un représente le terme qui est ajouté et l'autre représente le nombre d'additions (c'est-à-dire le nombre de fois) ce qui suffit à justifier la pertinence des concepts multiplicateur et multiplicande. Voir, en annexes, " *Multiplicateur et multiplicande : des notions inutiles voire nuisibles ?"*.

C) Notre grand témoin : Roland CHARNAY

Sa position est centrale car il a fait une longue carrière comme responsable de la collection ERMEL qui est depuis les années 70 la bible de l'enseignement des mathématiques en primaire - concurrencée maintenant par la collection dirigée par Rémi Brissiaud, également ancien rédacteur de ERMEL -, il a fait partie des commissions qui ont élaboré les programmes du primaire et du collège en 1995 / 1996, et il fait partie des commissions d'experts qui ont écrit les nouveaux programmes du primaire (on peut supposer qu'il a fait partie de la commission qui a produit l'avorton de programme de 99 mais la transparence est telle que personne ne sait officiellement qui en a fait partie).

J'ai déjà cité dans un autre texte[16] la position de la collection ERMEL en 1982 :

> " *Il n'est pas inutile de rappeler ici que la division de deux nombres décimaux ne relève pas des programmes du Cycle Moyen et est donc mise en place au cours du premier cycle de l'enseignement secondaire. Cette décision est de notre point de vue pleinement justifiée dans la mesure où l'on sait que, s'il est assez aisé d'inculquer aux élèves une technique efficace pour cette division, les enseignants savent d'expérience que l'apprentissage raisonné pose de sérieux problèmes théoriques et pédagogiques, qu'une infime minorité d'élèves peut réellement dominer à l'âge de onze ans*."

[14] Car effectuer une division en faisant des soustractions successives est bien un algorithme de la division puisqu'il s'agit d'une procédure automatisée qui permet bien de trouver, dans tous les cas, le résultat recherché.

[15] J'ai développé cet aspect là dans :
IV) QUELQUES ASPECTS PRATIQUES DE LA BAISSE DE NIVEAU EN CALCUL :
3) Arithmétique et opérations - Limite localiste des SDE, de la didactique
http://www.sauv.net/delord/calcul/4_aspects-pratiques.html#3) Arithmétique et opérations - Limite localiste

[16] *"Appel sur l'enseignement primaire : A propos des commentaires de M. Dominique Pernoux"*
ftp://ftp2.sauv.net/sauv/textes/prim_dp1.pdf

Une double remarque :

- le moment où les auteurs de ERMEL écrivent cette prose est celui ou la COPREM écrit que, en général, *" La maîtrise parfaite des " quatre opérations" effectuées sur papier n'est plus de nos jours une nécessité absolue en soi, puisque le cas échéant la machine peut jouer un rôle de "prothèse pour le calcul"*

- il était peut-être en 1982 encore "*assez aisé d'inculquer aux élèves une technique efficace pour cette division*", mais ce n'est certainement plus vrai car le dénigrement pour les "opérations à la main", présentée ici non pas comme un apprentissage nécessaire et riche mais comme une "*inculcation*" et la disparition des instituteurs qui avaient une expérience de cette inculcation rend la tâche beaucoup plus difficile

L'ambiance est donc à la critique tout azimut de la maîtrise des opérations : leur maîtrise est donc considérée à la fois *inutile* et *impossible…*Il ne serait donc pas étonnant que les élèves ne les maîtrisent pas.

Maintenant voyons les positions personnelles de M. R. Charnay telles qu'elles apparaissent dans la conférence qu'il a faite en 1995 sur la liaison école / sixième[17] :

A propos des nombres entiers naturels

- Le sens des opérations n'est pas complètement acquis, a noté Roland CHARNAY. Le cas de la division est pointé dans le programme de sixième. Il importe de poursuivre un travail sur le sens (situations de division qui peuvent être résolues par des procédures personnelles comme essais, soustractions réitérées, produits à trous, ..) et un travail sur l'algorithme de la division (maintenir la pose effective des produits partiels et des différences permet le rappel du sens, allège la charge de travail mental et facilite les contrôles a posteriori). L'objet de réunions de concertation sur le thème de la liaison entre école et collège pourrait être de programmer l'apprentissage de cette opération sur plusieurs années.
Il importe aussi, au collège, d'entretenir les connaissances sur les sens de la multiplication : introduite comme addition réitérée, elle est aussi dénombrement de carreaux d'un quadrillage, aire du rectangle, moyen de dénombrer dans une situation de combinatoire. Ces ruptures de sens peuvent ne pas avoir été suffisamment éclairées à l'école ou perçues par tel élève.
- Les techniques opératoires de l'addition, de la soustraction et de la multiplication sont maîtrisées à un niveau comparable à celui constaté dans les décennies précédentes : c'est ce que révèlent les diverses évaluations. Mais, il y a lieu d'entretenir ces compétences, notamment la connaissance des tables de multiplication ou l'exécution de multiplications rendues délicates par la présence de zéros intercalaires *"dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique"* selon les termes du programme de sixième.
/

Roland CHARNAY a eu cette formule : "*au cycle des approfondissements, faire vivre les décimaux, garder une référence constante au sens, ne pas mettre en place d'algorithme ou de procédure standard prématurés ; en sixième, avoir conscience de ce qui reste à faire et ne pas se limiter à des exercices techniques*".

[17] http://www.ac-creteil.fr/maths/puissances/N2/ecol-six.html

D) Retour aux évaluations

Nous pouvons maintenant reprendre les deux exercices cités et essayer de comprendre les raisons de l'échec important sur le 23 et généralisé sur le 28 :

> ***Exercice 23*** : *Pierre a choisi un nombre. Il divise ce nombre par 5. Il trouve comme quotient 8 et comme reste 3. Quel est ce nombre ?*
>
> ***Exercice 28*** : *Pose et effectue la division 178,8 : 8*

Digressions sur l'Exercice 23

Cet exercice est inclus pour voir si les élèves ont saisi le" sens de la division", le tout dans un contexte toujours non démenti où l'on prétend que l'enseignement d'avant 70 était mécanique et n'avait pas de sens. Voyons ce qu'il en est

A) Le manuel "*Arithmétique du cours élémentaire*" (de P. Menanteau, P. Pallier et Mme R. Menanteau, Les Nouvelles Presses Françaises, Paris, 1949) présente page 136 la leçon "*La preuve de la division*" dans laquelle il est dit pour le CE1: " *Pour savoir si une division qui a zéro comme reste est juste, on multiplie le quotient par le diviseur. On doit ainsi retrouver le dividende* ".

Sur la même page, il y a un certain nombre de problèmes marqués d'une étoile, ce qui signifie qu'ils sont de niveau CE2. Parmi ceux-ci, voici les n° 9 et 10 :

> ***9.** Une fermière a tiré 93 l de lait. Combien de bidons de 15 l pourra-t-elle emplir ? Combien de litres de lait restera-t-il ?
> ***10.** En vous servant de la réponse au problème n° 9, rédigez l'énoncé d'un problème où vous demanderez combien la fermière a tiré de litres de lait ?

On pourrait donc dire que les problèmes du type exercice 23 posés maintenant en début de cinquième étaient jusqu'en 1970 de niveau CE2 mais ce serait faux. En effet dans le Menanteau comme dans tous les autres livres d'arithmétique de CE2 qui proposaient pratiquement tous le type d'exercice où il faut retrouver le dividende en connaissant le diviseur, le quotient et le reste en utilisant la formule dividende = diviseur * quotient + reste, les nombres choisis dans ce type d'exercices sortaient du cadre de la table de multiplication ce qui n'est pas le cas de l'exercice 23.

Alors, dans quel cadre pouvait être posé ce type de problème ? Strictement dans le cadre de l'apprentissage des tables de multiplication de 5 ou 8 qui se faisaient au CE. Mais savoir ses tables de multiplication n'avait pas la même signification qu'il a, par exemple, dans les accompagnements de programme de Février 2002 pour le cycle 3:

Résultats mémorisés, procédures automatisées

Compétences	Commentaires
Connaître les tables d'addition (de 1 à 9) et de multiplication (de 2 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence ou un complément, un produit ou un quotient entier.	Les mots *somme, différence* ou *écart, complément, produit, quotient, reste, multiple* font partie du vocabulaire à acquérir au cycle 3. Une bonne connaissance des tables suppose la capacité à fournir instantanément un résultat qui y figure ou un résultat dérivé. Ainsi, connaître 7 * 8 = 56, c'est être capable aussi bien de compléter 7 * 8 = … que 7 * … = 56 ou … * … = 56 (sachant qu'il y a d'autres décompositions que celles fournies par les tables) ou encore de dire combien il y a de fois 7 dans 56. C'est aussi savoir que 58 n'est ni un multiple de 8, ni un multiple de 7, mais que, par exemple, il est situé entre deux multiples de 8 (7 * 8 et 8 * 8). C'est également être capable de trouver très rapidement combien il y a de fois 8 dans 58.

Savoir ses tables de multiplication, dans les manuels des années 20 à 50, c'est 4 règles précises

> *- 1) Donner les résultats immédiatement sans réfléchir*
> *- 2) Les connaître dans les mêmes conditions à l'envers (c'est-à-dire les tables de division)*
> *- 3) Réciter immédiatement les diverses décompositions sous forme de produits de nombres à un chiffre des nombres qui sont dans la table : par exemple 12 vaut 2 * 6 ou 3 * 4*
> *- 4) Connaître dans les mêmes conditions, c'est-à-dire sans réfléchir, les résultats de la table de division lorsque " ça ne tombe pas juste ". Question : En 37 combien de fois 5 ? Réponse immédiate : 7 fois. Reste 2. <u>Car c'est une condition indispensable pour faire une division</u>.*

La comparaison entre les deux manières d'apprendre les tables est assez instructive :

- la méthode 1920 est claire : elle s'adresse au Cours Elémentaire 1 et demande de connaître par cœur et immédiatement un certain nombre de résultats essentiellement dans un but très précis : savoir faire ses opérations, ce qui n'exclut d'ailleurs pas qu'ils puissent être utilisés dans d'autres buts.

- les recommandations de 2002 pour le cycle 2, c'est-à-dire jusqu'au CE1, précisent (page 22 du document d'accompagnement):

> " *Au cycle 2, le répertoire multiplicatif est progressivement construit par les élèves. Ils peuvent le consulter avant que les résultats ne soient mémorisés, en particulier pour les tables autres que celles de deux et cinq. La mémorisation commence au cycle 2, notamment pour les tables jusqu'à cinq, mais la mémorisation complète relève du début du cycle 3*."

Précisons qu'avant 70, la multiplication par 2 et 5 étaient acquises dès le CP et que donc les tables de multiplication par 2 et 5 l'étaient très tôt en CE1. Le programme 2002 ne prévoit l'apprentissage systématique de la table de 2 et 5 qu'au début du cycle 3, c'est-à-dire en CE2 et l'apprentissage des autres tables sans donner de limites précise : on peut cependant considérer que si les commentaires sur les programmes de <u>sixième</u> de 1996 affirment : "*On visera en particulier la maîtrise des tables de multiplication* " cela signifie que l'on peut passer en sixième sans savoir ses tables, c'est-à-dire en étant incapable de faire correctement une multiplication ou une division même en restant dans les limites ridicules du programme, ce que d'ailleurs tout professeur a pu constater et ce pour un nombre croissant d'élèves d'année en année.

Maintenant venons-en à ce qu'affirment les directives pour le cycle 3 : elles commencent par ce qui pourrait signifier une adéquation avec les directives des années 1880 à 1960 : " *Une bonne connaissance des tables suppose la capacité à fournir instantanément un résultat qui y figure ou un résultat dérivé*" mais qui est aussi contredit par les exemples qui l'illustrent. Autant il est possible, logique et directement utilisable de connaître les 4 règles que j'ai données (et en particulier la règle 3) autant l'exemple qui demande de trouver <u>immédiatement</u> toutes les décompositions de 56 est excessif et illusoire.

D'un autre coté, la formulation "*C'est aussi savoir que 58 n'est ni un multiple de 8, ni un multiple de 7, mais que, par exemple, il est situé entre deux multiples de 8 (7 * 8 et 8 * 8). C'est également être capable de trouver très rapidement combien il y a de fois 8 dans 58*." est beaucoup moins précise que la règle 3 qui, elle, si elle est connue, permet d'en retrouver tous les résultats. En effet, si l'on sait par cœur " *En 58, combien de fois 7 ? 8 fois reste 2*" et "*En 58, combien de fois 8 ? 7 fois reste 2*", on sait que 58 n'est ni un multiple de 7, ni un multiple de 8, qu'il est situé entre deux multiples de 8 et combien il y a de fois 8 dans 58.

Maintenant, nous pouvons comprendre pourquoi il y a peu près 30% des élèves qui ne savent pas répondre à l'exercice 23 : ils ne savent pas en début de cinquième leur table de multiplication par 5 qui était acquise avant 70 en CP et au plus tard en CE1. Il est également possible de faire la remarque suivante qui sera utile pour comprendre les difficultés des élèves pour faire des divisions : on ne sait si c'est le fait de ne plus apprendre <u>correctement</u> les tables de multiplication qui est une cause de la faiblesse des élèves dans la maîtrise de la division ou si le dénigrement par les organismes officiels de la nécessité de faire des divisions à la main justifie le fait de ne plus apprendre les tables, ou si l'apprentissage des tables de multiplication n'est plus entretenu par la pratique des opérations mais on est sûr d'une chose : toutes les orientations qui s'opposent au fait que les élèves apprennent les tables suivant les règles 1 à 4 et toutes les orientations qui diminuent l'importance de l'apprentissage des opérations à la main convergent pour renforcer l'incapacité mathématique des élèves.

Digressions sur l'exercice 28

Donc ***Exercice 28*** : "*Pose et effectue la division 178,8 : 8*"

Remarque préliminaire : comme nous sommes encore sous l'effet des programmes de 1995 en collège et à l'école primaire, la division *178,8 : 8* fait partie du programme du primaire.

On peut se demander maintenant comment se peut-il que, en gros, seulement un tiers des élèves de cinquième sachent faire cette opération ?

La réponse est assez simple : il suffit de suivre les directives officielles.

La maîtrise des algorithmes des opérations était possible dans les progressions précédant 1970, y compris pour le plus compliqué d'entre eux, celui de la division[18],car, outre le fait que leur apprentissage n'était pas dévalorisé et les raisons que je donnerai infra, cet apprentissage était étalé dans le temps et que cette nécessité était reconnue :

Si l'on suit donc l'exemple de la division, la division par 2 et 5 était au programme du Cours Préparatoire, on apprenait les divisions d'un nombre entier quelconque par un entier à deux chiffres au Cours Elémentaire et il restait deux ans complets de Cours Moyen pour apprendre le reste, c'est-à-dire la division de deux entiers quelconques, y compris la division "poussée" et la division de deux décimaux. Quel était l'avantage de cette progression ?

- elle était basée sur la reconnaissance du fait que l'apprentissage d'un mécanisme *reconnu comme tel* est un apprentissage long qui demande beaucoup d'exercices répétitifs
- cet apprentissage était valorisé par le fait qu'il était nécessaire et testé par exemple dans le certificat d'études primaire, examen qu'il était impossible d'avoir si l'on ne savait pas faire une division
- lorsque les élèves finissaient leur CM2, ils avaient fait *régulièrement* des divisions (aussi bien en classe qu'à la maison) *pendant CINQ ANS*[19]
- cet apprentissage se situait à un âge ou l'enfant a envie d'imiter le maître et l'adulte en général

Tout au contraire, maintenant,

- il y a une négation générale de la nécessité de l'apprentissage des mécanismes au nom de la "défense du sens" bien que cette opposition entre sens et mécanisme n'ait justement aucun sens, *a priori* et sans expliciter d'autres raisons réelles, pour une raison bien simple : il ne peut y avoir d'apprentissage réel du sens en dehors de l'apprentissage de mécanismes et il ne peut y avoir d'apprentissage réel des mécanismes en dehors de l'apprentissage du sens.

- ces apprentissages ne sont plus testés. Sans être exhaustif pour étudier les diverses formes "d'évitement" d'évaluation des compétences des élèves sur le contenu du programme, les divisions "posées" d'un nombre décimal par un entier, qui constituent la limite supérieure des difficultés du programme, ne figurent pas dans les évaluations CM2-Sixième et, bien souvent la limite supérieure de difficulté du programme pour les nombres entiers n'est pas atteinte (Serait-ce ce qui permet d'affirmer non seulement que le niveau ne baisse pas, mais qu'il monte ?) :

[18] En 1982, les auteurs de ERMEL reconnaissaient même "*qu'il est assez aisé d'inculquer aux élèves une technique efficace pour la division* [d'un décimal par un décimal]"

[19] L'effet du retard de l'apprentissage des opérations sur la capacité à résoudre des problèmes, qui est pourtant un des dadas connu des concepteurs des programmes, est encore plus négatif : "*le report de trois ans pour la mise en place de la soustraction, de la multiplication et de la division (programme de 1995) produit cet étrange résultat : pendant ces trois ans, l'entraînement hautement productif de l'élève à la résolution des problèmes se limite au choix entre l'addition… et l'addition. Il est donc inutile d'entreprendre de vastes recherches didactiques pour savoir pourquoi les élèves confondent* opération *et* addition *ou choisissent très souvent comme opération pour résoudre un problème la dernière qu'ils ont étudiée. Le recours explicatif à des "déficits d'images mentales", des "problèmes de conflits cognitifs" ne sert qu'à masquer le déficit intellectuel des programmes*."
In Michel Delord, *Sur l'enseignement primaire*, op.cit., page 7.

- dans l'évaluation de 1996, alors que les élèves sont encore soumis au programme de 1985 qui recommande, même si c'est de manière peu claire, "l'*élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites",* la seule division posée demandée est, à l'exercice 18, "*3968 divisé par 8*".

- dans l'évaluation de 1997, les deux seules divisions posées demandées sont : *72 divisé par 3* et *2782 divisé par 26* : remarquez que le niveau de difficulté maximum recommandé par le programme n'est pas atteint puisqu'il suffit de séparer 2 chiffres au dividende pour obtenir le premier chiffre du quotient qui est … 1.

- dans l'évaluation 2000, ne figure aucune division posée dont les résultats interviennent dans le calcul des scores de réussite[20]

- <u>lorsque les élèves finissent leur CM2, ils ont *au maximum*[21] un an de pratique de la division</u>

- avec des méthodes non extensibles au cas de divisions comportant plus de chiffres que le programme ne le prévoit

- très souvent, au nom de "l'enseignement du sens", ils tentent de faire les divisions par soustractions successives puisqu'ils n'ont été placés que dans des cas (avec des petits nombres du type diviser 243 par 60) où l'algorithme classique n'est pas manifestement plus performant que les soustractions successives. Ce cas est de loin le pire puisqu'ils ne voient pas l'intérêt de l'algorithme classique : *"Mais, Monsieur, mon maître ne m'a pas appris comme ça et, de toutes façons, on peut arriver à le faire comme il disait*".

<u>Ces simple raisons suffisent à expliquer que les exigences du programme même réduit de primaire ne soient pas maîtrisées en début de cinquième.</u>

Et l'on comprend mieux l'effet négatif des recommandations données *supra* par M. Charnay :

- "*ne pas mettre en place d'algorithme ou de procédure standard prématurés"* en primaire
- mettre en avant centralement des " *situations de division qui peuvent être résolues par des procédures personnelles comme essais, soustractions réitérées*"
- recommander "*un travail sur l'algorithme de la division*" caractérisé par *" maintenir la pose effective des produits partiels et des différences*" qui " *permet le rappel du sens, allège la charge de travail mental*"
- l'insistance sur le commentaire de programme de sixième qui recommande de limiter les opérations à celles qui *"n'exigent pas de virtuosité technique"*
- c'est-à-dire en fait expliquer que la division est difficile et la rendre encore plus difficile par des procédures d'apprentissage convenablement choisies….

[20] Explications :
- <u>l'exercice 11</u> comprend trois exercices sur le même type :

" *La division de 287 par 2 a pour quotient 143 et pour reste : ?* "

L'élève est censé poser la division puisque figure son dessin sur le cahier d'évaluation, mais il ne s'agit pas de véritables divisions puisque l'élève connaît déjà le quotient.
- <u>l'exercice 35</u> est le seul où intervient la division, combien difficile, de 150 par 7 : nous vous laissons le soin d'interpréter les consignes de correction de l'item 82 qui correspondant à la lecture d'un cadre dans le quel la consigne suivante est donnée : *" Ecris tes calculs dans ce cadre"*

"Item 82 : "Procédure" On ne tiendra pas compte des résultats.
Code 1 : Division euclidienne bien écrite ou bien posée quel que soit le résultat
Code 2 : Toute autre procédure correcte
NB : l'item 82 codant la procédure, les résultats ne seront pas pris en compte dans le calcul des scores"

[21] Je me place ici dans des conditions favorables à mes opposants : je reçois quelquefois des élèves pour qui l'algorithme classique de la division n'a été introduit qu'au dernier trimestre du CM2. Je n'envisage pas le cas, qui existe encore, de vieux instituteurs souvent proches de la retraite qui ne suivent pas le programme et continuent à apprendre *<u>toutes</u>* les divisions à leurs élèves : d'une part, leur nombre diminue et, d'autre part, ils tendent à faire remonter les taux de réussite.

D) Querelle d'interprétations ?

Dans le faux débat qui va nécessairement s'ouvrir sur la question, les corporatismes de tout bord vont pouvoir s'exprimer pour trouver des responsables. Les instituteurs n'ont pas fait leur travail car la division de 178,8 : 8 est du niveau primaire ! Les professeurs du secondaire n'ont pas fait leur travail car ils n'ont pas consolidé les acquis du primaire !

Les deux assertions sont vraies mais la vérité est beaucoup plus simple : il ne peut y avoir de bon enseignement et de bons enseignants que si le programme de la Maternelle à l'Université est cohérent et ne s'obtient pas, à chaque niveau, en supprimant ce qui semble difficile car cela compromet la réussite à ce niveau et donc au niveau supérieur tout en rendant globalement inintéressant l'enseignement. Et produit donc tout autant de l'indiscipline qu'une discipline formelle pour des apprentissages formels où le manque d'intelligence est même devenu un obstacle à l'apprentissage des savoirs mécaniques.

La pétition primaire disait :

"ARRÊTER LA DESTRUCTION DE L'ENSEIGNEMENT D'UNE PENSÉE STRUCTURÉE
- s'opposer à la spirale infernale... qui prétend faciliter la compréhension en allégeant les savoirs fondamentaux. Le résultat en est l'exact contraire... [et] détruit déjà chez l'enfant toute possibilité d'accession à la rationalité, lui apprend au contraire systématiquement à " penser " de manière incohérente et réduit l'enseignement à des contenus procéduraux qui ne peuvent même plus être maîtrisés car la simple maîtrise de mécanismes suppose justement un minimum de rationalité.
- s'opposer à la justification de cette spirale qui sépare l' " *intelligence conceptuelle* " de ses manifestations concrètes, de la maîtrise des techniques de base et de l'utilisation de la mémoire : on est censé comprendre la division sans la pratiquer, écrire un récit sans connaître les temps du passé, étudier la densité de population sans la calculer, etc. On pourra donc parler de tout sans rien connaître. Conception qui autorise la rédaction de " *programmes* " dont l'enflure verbale proliférante a de plus en plus de mal à masquer un contenu réel de plus en plus misérable. "

A part pour ceux qui veulent "faire payer le lampiste"[22], si la responsabilité des enseignants est en cause, c'est qu'ils ne se sont pas opposés à temps aux dérives du Comité National des Programmes et de ses prédécesseurs.

Michel Delord, le 30 octobre 2002

[22] Par exemple, devant l'ampleur générale de la catastrophe de cette évaluation de cinquième, "*une principale (sur consigne supérieure) a déclaré : l'évaluation en 5e n'a pas servi à évaluer les élèves, mais les profs eux-mêmes (qu'ont-ils bien pu faire apprendre aux élèves de 6e ?)*". Pris sur une liste de discussion.

Annexes

1) Une définition du "sens la multiplication" dans un "vieux" manuel

Tiré de :
Brouet et Haudricourt Frères, *Arithmétique et système métrique Cours Moyen*, Librairies-Imprimeries réunies, Paris, 1912.

Sens de l'opération

La multiplication est une opération par laquelle on répète un nombre appelé multiplicande autant de fois que l'indique un autre nombre appelé multiplicateur.
Le résultat se nomme produit.
[…..]
70. - Le multiplicande et le multiplicateur se nomment les facteurs du produit.

71. - La multiplication s'indique par le signe × (multiplié par) qui s'écrit entre les nombres à multiplier :
8 × 5 (8 multiplié par 5).

72. - La multiplication n'est qu'une addition abrégée.

73.- Le multiplicande est toujours un nombre concret, c'est-à-dire qui exprime des objets déterminés, comme des arbres, des mètres, des francs, etc.

74.- Le multiplicateur est un nombre abstrait, qui indique seulement combien de fois on répète le multiplicande.

75.- Le produit exprime toujours des unités semblables à celles du multiplicande

Technique de l'opération

Je ne cite pas textuellement le cours mais, ici, le mot multiplicande désigne, lorsque l'on pose l'opération, le nombre que l'on place en haut tandis que le mot multiplicateur désigne celui que l'on place en bas. La notion de commutativité était introduite dans ce premier but pour montrer que, dans le cas de la multiplication de 4567 par 34, il était plus rapide de poser l'opération :

		4	5	6	7
		*		3	4
	1	8	2	6	8
1	3	7	0	1	
1	5	5	2	7	8

que l'opération :

				3	4
	*	4	5	6	7
			2	3	8
		2	0	4	
	1	7	0		
1	3	6			
1	5	5	2	7	8

2) Multiplicateur et multiplicande : des notions inutiles voire nuisibles ?

Au vu de l'importance fondamentale de cette question, j'y reviendrai dans un autre texte. Mais, il me semble utile de montrer ici que M. Brissiaud défend, encore en l'an 2000, la position des maths modernes[23].

A la page 30 du Livre du maître CE1[24] , il écrit, critiquant l'enseignement de la multiplication telle qu'elle était enseignée avant 70[25], c'est-à-dire basée sur le calcul sur les grandeurs qui permet de distinguer le multiplicande du multiplicateur : *"Les réformateurs de 1970 ont critiqué avec raison ce choix ; en effet il fait obstacle à la compréhension de la propriété de la multiplication qu'on appelle la «commutativité»".*

D'une part, jusqu'aux années 50, la commutativité était enseignée même si le «mot» lui-même n'était pas toujours prononcé car la première propriété de la multiplication donnée, juste après sa définition, était : "*Le produit de deux nombres ne change pas si l'on intervertit l'ordre des facteurs*". La tendance au "tout numérique" qui sera justifié théoriquement par les maths modernes se manifeste dés les années 60 par l'abandon de la définition de la multiplication en termes de grandeurs[26].

D'autre part, on peut dire que ce n'est pas l'enseignement du calcul sur les grandeurs qui était un obstacle à la compréhension de la commutativité, mais au contraire la réduction au numérique et l'insistance absolue sur la commutativité qui ont été un obstacle essentiel à la compréhension de la multiplication renforcé ensuite par l'utilisation des calculettes qui ne savent faire – mal d'un point de vue pédagogique- que du calcul numérique.

Enfin, dans son texte, Rémi Brissiaud reprend sous une forme modernisée la matrice même des arguments éculés des années 70 contre l'enseignement du calcul sur les grandeurs. Mais reprenons d'abord l'argument de 70 développé par P. Jacquemier dans le numéro spécial[27] de la revue de l'APMEP consacré au soutien du B.O.E.N. introduisant les maths modernes à l'école primaire :

> *"**La multiplication est une opération commutative**.*
> *Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de "nombres concrets". Cette*

---

[23] Les réformes centrales des années 50 à 70 (ces dates varient suivant les pays) ont été formellement abandonnées mais il en subsiste des pans importants qui en sont d'ailleurs les éléments les plus contestables
- c'est vrai pour les mathématiques modernes, surtout en France et en Israël mais beaucoup moins aux USA
- c'est également vrai pour la méthode globale de lecture dont les responsables prétendent qu'elle a disparu alors qu'elle continue à exister sous des désignations différentes. Lire : "*Whole Language Lives On*", rapport pour la *Fordham Foundation* de *Louisa Cook Moats* (http://www.edexcellence.net/library/wholelang/moats.html)

[24] Rémi Brissiaud, Pierre Clerc, André Ouzoulias, *Livre du maître CE1*, Edition Retz, Nathan, octobre 2000.

[25] Il définit d'ailleurs le "*changement de 70*" d'une manière étriquée qui lui permet de justifier son raisonnement : " *La solution adoptée par les réformateurs de 1970 fut radicale : ils préconisèrent de ne plus introduire la multiplication comme addition réitérée et de ne plus utiliser le mot " fois "*". En fait, cet aspect descriptif et partiel de la réforme vise à masquer le fait que les mouvements pédagogiques partisans des maths modernes (APMEP par exemple) présentèrent comme aspect principal et positif de cette réforme la suppression de tout calcul sur les grandeurs en prétendant "*qu'il n'était pas mathématique*".
Voir, par exemple :
- *Sur l'enseignement primaire en France (pages 9 et 10)*
i) Le calcul sur les grandeurs est interdit depuis 1970
ii) Cette interdiction a encore été confirmée officiellement récemment
ftp://ftp2.sauv.net/sauv/textes/milan+.pdf
ou
Compléments à "*Toujours moins de mathématiques à l'école*", Pour la science, Mai 2002
http://www.pourlascience.com/index.php?ids=tgKhUSrbQxlckakpgPcf&Menu=Pls&action=3&idn3=1465

[26] Et même, ensuite, en fait de toute définition explicite de la multiplication car l'essentiel est que "*l'élève en ait une image mentale*", forme savante du "*penser sans mots* " et *des "théorèmes en acte*"; pour vous en convaincre, demandez à une personne de moins de 40 ans de donner une définition de la multiplication.

[27] *Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent* par P. Jacquemier *in* La mathématique à l'école élémentaire, Paris, supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages. Pages 59 - 74

expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication. Il n'y a pas à distinguer multipli cande et multiplicateur ; si on les distingue souvent, c'est parce qu'on pense plus à ces "nombres concrets", 3 sacs de 7 oranges, 15 barriques de 228 litres, qu'à des nombres. L'emploi de ces mots ne se justifie pas (l'emploi des mots soustractande et soustracteur se justifierait ; on s'en passe aisément d'ailleurs). [….]

*Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5doigts * 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts * 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges * 3 ou aussi bien 3 oranges * 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3 * 7 ou 7 * 3 ou 21."*

Rémi Brissiaud n'est pas le seul à reprendre mot pour mot les arguments de 70 qui sont restés quasiment intacts car la contre-réforme suivant les mathématiques modernes s'est passée de manière particulièrement bureaucratique, c'est-à-dire sans que soient discutées sérieusement les véritables bases théoriques de la réforme précédente : l'argument sur la soustraction m'a été servi tel quel l'an dernier sur la plus grande liste de discussion d'instituteurs … ce qui n'empêche qu'il est négatif d'un point de vue pédagogique.

En effet, P. Jacquemier centre le débat[28] sur la nécessité de donner des noms différents aux deux nombres de départ d'une opération et pense que ce serait justifié pour la soustraction. La seule raison valable, qu'il n'avance pas ici explicitement, mais qui était donnée à l'époque était qu'il était judicieux de donner deux noms différents aux deux nombres de départ d'une opération lorsqu'elle était commutative et de ne pas donner de noms différents lorsqu'elle ne l'était pas. Ainsi, la logique de P. Jacquemier est la suivante

- l'addition et la multiplication sont commutatives (2+10=10+2 et 2* 10=10 * 2), on doit donc donner le même nom aux nombres de départ : les termes et les facteurs. Et il est effectivement dans l'usage courant de dire *"2 et 10 sont les termes de la somme 12*" et "*2 et 10 sont les facteurs du produit 20*".
- la soustraction et la division ne sont pas commutatives (10-2=8 mais 2-10=-8 ; 10:2=5 mais 2:10=0,2), on doit donc donner des noms différents aux nombres de départ de l'opération. On distingue dans l'usage courant le dividende du diviseur pour la division. Mais on ne distingue pas le soustractande du soustracteur et il est logique de se demander pourquoi P. Jacquemier introduit ces notions dont il admet lui-même que "l'on s'en passe aisément"…

Si, dans l'analyse d'une opération, on met exclusivement en avant le caractère commutatif ou non de cette opération[29], cette position est cohérente et même intéressante lorsque que l'on ne s'intéresse qu'à la structure logique des opérations. Mais il y un double hic :
- il faudrait prouver que se placer de ce point de vue est justifié dès les débuts de l'enseignement
- l'usage courant (et même par des mathématiciens) est contraire à cette logique puisqu'il y a deux noms différents (multiplicateur et multiplicande ; dividende et diviseur) pour deux opérations dont l'une est commutative et l'autre pas tandis qu'il y a qu'un seul nom (terme) pour une opération qui est commutative (addition) et l'autre pas (soustraction).

Mais, tout au contraire si l'on se place non pas du strict point de vue numérique et logique mais du point de vue du sens des opérations lorsque qu'il s'agit de les apprendre comme outil de base de modélisation du réel c'est-à-

[28] Je ne traite pas ici la question de l'intérêt de l'emploi de la notion de "*nombre concret*".

[29] C'est-à-dire lorsque c'est plutôt l'aspect logique/axiomatique des opérations qui est au premier plan, aspect qui n'est pas négligeable mais qui ne doit pas avoir une position centrale pour l'enseignement primaire.
Pour plus de détails, voir :

- In *Sur l'enseignement primaire en France* - Page 11 et suivantes
C) *Aspect logique / aspect intuitif des mathématiques : le rôle des grandeurs. L'enseignement de l'ordre de grandeur … sans grandeur*
ftp://ftp2.sauv.net/sauv/textes/milan+.pdf

- de manière plus générale et plus approfondie:
Ferdinand Gonseth ,*Les mathématiques et la réalité : essai sur la méthode axiomatique*, Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard,Paris,1936, rééd.1974.

dire comme base de résolution des problèmes, on peut comprendre par contre pourquoi la situation est ce qu'elle est (c'est-à-dire que l'on n'utilise ni soustractande ni soustracteur) :

- Comme on ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même nature (cela n'a aucun sens d'additionner ou soustraire des mètres et des secondes), il est naturel que, de ce point de vue, les deux nombres ne soient pas distingués et que l'on utilise simplement termes pour addition et soustraction. Si l'on fait une addition ou une soustraction où les deux termes sont des mètres (c'est-à-dire une distance), le résultat sera toujours des mètres (c'est-à-dire une distance).

- Par contre la multiplication et la division peuvent faire intervenir des grandeurs de natures différentes[30], c'est-à-dire qu'il n'y a pas de symétrie générale du point de vue dimensionnel entre les nombres qui interviennent, il est donc logique dans ce cas là que les noms désignant les deux nombres de départ soient différents. C'est à dire que lorsque l'on divise des mètres par des secondes, on trouve une vitesse tandis que lorsque l'on divise des secondes par des mètres, on trouve le temps mis pour parcourir un mètre, c'est-à-dire une durée qui n'est pas une vitesse. Autre exemple : si l'on divise des Francs par des mètres dans un problème où l'on connaît le prix en Francs de 20 m de tissu, on trouve un prix (qui est le prix d'un mètre de tissu) alors que si l'on divise des mètres par des Francs, on obtient la longueur de tissu que l'on peut obtenir pour 1 Franc.

Enfin, dernier argument de P. Jacquemier : "*Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts * 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts * 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges * 3 ou aussi bien 3 oranges * 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3 * 7, ou 7 * 3 ,ou 21*".

Il est tout à vrai, *en général et numériquement*[31], que si l'on utilise l'unité **u** et les nombres a et b, on a bien a * b**u** = b * a**u**[32]. Mais la faiblesse centrale de l'argument est double :

- l'exemple est choisi *ad usum delphini* car l'on voit bien sur l'exemple des sacs et des oranges qu'il n'est pas extensible alors que l'auteur veut en montrer la valeur générale : s'il est tout à fait vrai qu'il y a autant d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges que dans 3 sacs de 7 oranges, en serait-il de même pour 1 323 000 sacs de 423 oranges (ce qui peut exister) et 423 sacs de 1 323 000 oranges dont l'existence est assez aléatoire ?

- l'auteur se place d'un point de vue descriptif dans une situation qui l'arrange, mais pas du point de vue de l'élève qui cherche à résoudre un problème et cherche donc l'opération qu'il doit employer pour résoudre CE problème, ce qui correspond à modéliser mathématiquement UNE situation, celle qui est décrite dans LE problème :

- si le problème est : "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges ?*", la formulation mathématique correspondante est : 3 oranges * 7 = 21 oranges

---

[30] C'est à dire qu'elles peuvent *aussi* faire intervenir des grandeurs de même nature : 6m : 3m = 2, 6m * 3m = 18m²…

[31] Si Carrefour achète à un papetier 2 537 500 de cahiers à 3,20€, le prix payé serait effectivement le même que s'il achetait 3,20 cahiers à 2 537 500€ l'un mais, justement, il ne peut pas acheter 3,20 cahiers à 2 537 500€pièce. On confond aussi ici ce qui était nettement distingué dans les cours des années 50 :
- le calcul - c'est-à-dire l'aspect numérique - doit s'effectuer en prenant 3,2 comme multiplicateur, c'est-à-dire en ce sens celui qui est "en bas" dans la multiplication,
- mais ceci correspond à la multiplication 3,20€ * 2 357 500 en terme de grandeurs qui traduit la situation à modéliser. En ce sens, le multiplicateur, "nombre pur" qui indique le nombre de fois est 2 357 500 et le multiplicande, " nombre concret " est 3,20€.

[32] Ou a(bu)=b(au), mais ceci ne relève pas en général de la commutativité puisqu'il s'agit en fait de aT(b*u)=bT(a*u) ou T est une "opération" externe et * une "opération" interne (que l'on pense en terme d'espace vectoriel ou en terme d'actions d'un groupe). Il y a plusieurs possibilités d'axiomatisations de cette situation : pour cela, on peut consulter par exemple, soit
- celle donnée par *Hassler Whitney* en 1968 dans *The Mathematics of Physical Quantities,*
http://michel.delord.free.fr/h_whitney.pdf
-soit celle donnée par Nicolas Rouche en 1992 dans "*Le sens de la mesure: Des grandeurs aux nombres rationnels, Collection* Formation, Edition Dider Hatier, 1992.

- si le problème est : "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 3 sacs de 7 oranges ?*", la formulation mathématique correspondante est : 7 oranges * 3 = 21 oranges

Or, en nous plaçant dans la situation de référence qui est l'apprentissage de la multiplication du CP au CE2, que doit découvrir un élève qui a comme problème à résoudre "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges ?*": il doit découvrir quelle est l'opération (addition, soustraction, multiplication, division) qu'il doit effectuer pour trouver la réponse. Sans utiliser toute l'argumentation méthodique basée sur les bases du calcul dimensionnel qui doit être enseignée en primaire mais que je ne peux développer ici, il doit remarquer, <u>en utilisant la définition de la multiplication qui la particularise du point de vue de l'analyse dimensionnelle par rapport aux autres opérations</u>, que l'opération utile dans ce cas est bien une multiplication dans laquelle

- le nombre qui se répète, c'est-à-dire le multiplicande, est "le nombre concret" 3 oranges.
- le multiplicateur, c'est-à-dire le nombre fois, est le "nombre pur" 7.

C'est-à-dire qu'il a d'abord à résoudre UN problème et le fait qu'il en résolve deux à la fois est assez anecdotique et est ici avancé strictement pour présenter la commutativité comme propriété centrale de la multiplication dans des exemples spécialement construits à cet effet et qui n'ont aucune valeur.

En effet, si l'on y réfléchit, l'emploi du même mot "sac" dans les deux problèmes ne sert qu'à faire illusion sur le fait qu'il représente dans les deux cas la même chose puisque dans le cas "1 323 000 <u>sacs</u> de 423 oranges et 423 <u>sacs</u> de 1 323 000 oranges", on voit que la communauté de sens sur les deux emplois du mot "sac" se distend très nettement. Mais on peut aller beaucoup plus loin dans l'absurdité d'un tel raisonnement[33] puisque lorsqu'un élève résout le problème "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges ?*", on peut effectivement prétendre qu'il résout simultanément l'infinité des problèmes suivants une fois que l'on a admis que les mots employés n'ont plus de sens précis: "Quel est le prix de 7 pains à 3€ l'un ?", "Quel est le prix de 3 pains à 7€ l'un ?", "Quelle est l'aire d'un rectangle qui a pour longueur et largeur respectivement 3m et 7m ?"… Il me suffirait – car c'est cela qui est indispensable à ce stade - que l'on apprenne aux élèves à résoudre UN problème à la fois d'autant plus que l'insistance unilatérale sur les liens entre les phénomènes réels pensés seulement au travers de liens exclusivement numériques s'appelle … la confusion entre déterminisme physique et coefficient de corrélation ou mieux : numérologie. Que déduirez-vous du fait que, si je soustrais 49 qui est le millésime de ma date de naissance à 53 qui est mon age, je trouve 4 qui est le numéro de mon adresse ?

Revenons-en à M Brissiaud : il exhibe exactement le même type de problème que P. Jacquemier en 1972 :

> *" Considérons ces deux problèmes de “ Recherche du résultat d'un ajout réitéré ”*
>
> *Combien coûtent 2 cahiers à 17 F l'un ?*
> *Et*
> *Combien coûtent 17 cahiers à 2 F l'un ?"*

On peut donc faire les mêmes remarques : c'est l'emploi du même mot "cahier" alors qu'il ne désigne pas la même chose puisque, *a priori*, un cahier à 2 F n'a pas grand chose à voir avec un cahier à 17F qui crée une impression de ressemblance et qui tend à faire croire que la similitude des résultats numérique tiendrait aux caractères physiques de l'objet cahier. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la remarque *infra* de R. Brissiaud dans le cas où les deux problèmes seraient : "*Combien coûtent 2 cahiers à 17 F ?" et "Combien coûtent 17 crayons à 2 F* ?"

Mais nous allons voir que Rémi Brissiaud cependant innove sur un point:

> " L’enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3ème niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant 17 * 2.
>
> Mais considérons le cas d'un enfant qui n'a pas encore étudié la multiplication. II peut seulement résoudre ces problèmes au 1er ou au 2ème niveau. Il calculera donc 2 fois 17, (17 + 17) dans un cas et 17 fois 2 (2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2) dans l'autre. Rien ne peut lui laisser prévoir qu'il trouvera le même nombre. Si, dans le premier cas, il calcule 17 + 17 et si, dans l'autre cas, il

[33] Négatif à ce niveau d'enseignement mais lorsque l'on écrit 2 X+ 3Y ou 2X * 3Y, on effectue bien des opérations sur des choses qui n'on pas d'autre sens que celui que l'on a défini. Je reviendrai sur cette question qui est en fait celle du lien (c'est-à-dire à la fois ce qui lie et oppose) le calcul numérique, le calcul sur les grandeurs et le calcul algébrique.

compte de 2 en 2 en levant successivement 17 doigts (2, 4, 6, 8...), on ne voit pas ce qui lui permettrait d'anticiper qu'il trouvera le même résultat.

L'équivalence de ces deux gestes mentaux (je vais calculer 2 fois 17 dans un cas, 17 fois 2 dans l'autre) n'a donc rien d'évident *a priori* et pourtant c'est elle qui *fonde* la multiplication en tant qu'opération arithmétique."

L'innovation consiste donc à dire que c'est la "commutativité" qui "*fonde la multiplication en tant qu'opération arithmétique*". L'argument serait puissant s'il n'était pas douteux *a priori* puisque a) si la commutativité fonde quelque chose, ce ne peut être que ce qui est commun à toutes les opérations qui le sont et pas seulement la multiplication b) le fait que la multiplication est commutative provient de la définition de la multiplication et, en ce sens là, se déduit logiquement de la nature de la multiplication[34]. Il y a quand même de grands risques, bien que le vrai puisse être logiquement déduit du faux, que la volonté de défendre encore maintenant ce qui était une absurdité mathématique en 1972 entraîne le fait de proférer des fautes mathématiques encore plus grandes aujourd'hui. Et s'il y a une réelle difficulté dans l'apprentissage des mathématiques comme outil des modélisation du réel, ce n'est certes pas ce type de raisonnement qui va le faciliter.

[34] Je n'ai pas dit que c'était à démontrer en primaire.