ERMEL

ÉQUIPE DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Responsable de l'équipe
JACQUES COLOMB

APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE

CYCLE MOYEN TOME 1

Responsables de la Rédaction

MARIE-NOËLLE AUDIGIER
I.N.R.P.
GÉRARD DERAMECOURT
E.N. Périgueux
JEANNE DIA
C.P.E.N.
COLETTE DUBOIS
E.N. Le Bourget
JEANINE BOET
E.N. Le Bourget
NICOLE GAUDELET
E.N. Antony
ROLAND CHARNAY
E.N. Bourg-en-Bresse
MIREILLE GUILLERAULT
E.N. Grenoble
YVES CLAVIER
E.N. Versailles
MARCELLINE GOUARDERES
E.N. St-Germain-en-Laye
JACQUES COLOMB
I.N.R.P.
GÉRARD PERROT
E.N. Rouen

SERMAP HATlER
Edition 1981

****

Extraits
(pages 95 à 100)

Chapitre 2. Calcul mental

A. OBJECTIFS

I. Le calcul numérique à l'Ecole Elémentaire

Chacun se souvient que les objectifs fondamentaux de l'école « laïque, gratuite, et obligatoire » ont été résumés dès la fin du dix neuvième siècle par les trois verbes à l'infinitif « lire, écrire, compter ». A ce titre l'enseignement du calcul se fixait clairement comme but de munir chaque français de «procédés généraux permettant de résoudre une classe de problèmes». Par exemple chaque enfant devait être capable en fin de scolarité :

- de présenter par écrit les traces du calcul de 6 321 : 10,5 à l'aide de la disposition

$$\begin{array}{r|l} 6\ 321 & \underline{10{,}5\quad\quad} \\ & \\ & \end{array}$$

- de calculer mentalement 28 × 25, en justifiant le résultat par l'emploi de la règle générale : pour multiplier un nombre par vingt cinq, on le multiplie par 100 et on divise par quatre.

En outre, et dans des buts pratiques évidents, l'école tentait de donner aux élèves un niveau de performance, d'efficacité, le plus élevé possible. On parlait donc de calcul rapide, et les enfants étaient entraînés à la vitesse comme le sont les sténo-dactylographes.

Les manuels de l'époque prévoyaient par exemple l'apprentissage d'une règle de calcul pour multiplier par 1,25: les élèves devaient savoir qu'il fallait d'abord « multiplier par dix » et ensuite « diviser par huit », règle elle même pratiquement appliquée en « plaçant un zéro à la droite du nombre » puis en divisant par deux, trois fois de suite ; il s'agit bien là de l'application d'un algorithme. En revanche les programmes ne prévoyaient pas de techniques de calcul mental de multiplication par 1,2. Les élèves devaient savoir calculer mentalement 48 × 1,25 mais n'étaient pas censés connaître d'autre méthode que le calcul écrit pour trouver 48 × 1,2 . L'obligation de poursuivre la scolarité jusqu'à seize ans ne laisse plus à la seule école élémentaire la responsabilité de munir chaque élève des outils indispensables à sa vie d'adulte (et en particulier des outils numériques). Par ailleurs, la démocratisation des procédés électroniques de calcul met à la portée de chacun des outils incomparablement plus performants que le calcul humain.

On est donc amenés à se poser sérieusement la question :

Faut-il encore aujourd'hui enseigner le calcul numérique à l'école élémentaire ?

De fait, après 1970, si dans l'enseignement des mathématiques le calcul écrit a conservé une place importante, en revanche le calcul mental a été souvent oublié, voire déconsidéré ; cela peut tenir au fait que d'autres notions nouvelles (ensembles, nombres, relations...) ont pris beaucoup de temps et d'importance dans les classes cela peut provenir également de l'insuffisance de la réflexion qui n'avait pas permis d'expliciter d'autres objectifs que la simple maîtrise des règles.

Comment justifier l'enseignement du calcul ?

Tout le monde s'accorde sur le fait qu'il faut savoir compter, donc qu'il faut enseigner le calcul.
Les arguments sont variés;

Certains le justifient en rejetant l'utilisation des calculatrices à l'Ecole:

Exemples:
Se servir d'une machine à l'école?

- « Et si la machine tombe en panne (ou si l'on n'en a pas).
- Ça serait trop facile.
- Nous quand on était à l'école, il n'y avait pas de machine et on se débrouillait bien.
- On est à école pour travailler ».

D'autres continuent à le justifier en affirmant la nécessité de connaître toutes les techniques de calcul pour la « vie courante ». Un enfant de 11 ans (et même un adulte), est-il souvent amené à effectuer une division de nombres décimaux dans la « vie courante » ?

Nous prenons bien sûr en compte l'objectif d'acquisition de compétences pratiques en calcul, mais en outre nous pensons que l'enseignement du calcul se prête bien, à la mise en place d'une démarche de construction des connaissances par les élèves, démarche qui, à notre avis, favorise une meilleure relation au savoir.

Calcul écrit ou mental ? Automatique ou pensé?

A la distinction « calcul écrit », « calcul mental », nous en préférons une autre, beaucoup plus nette et fondamentale : « calcul automatique » et « calcul pensé ». En effet le calcul mental se distingue mal du calcul écrit, lorsque le calculateur fait simplement l'effort de mémoire de « poser l'opération dans sa tête ». De même, pour effectuer «mentalement » un calcul il peut parfois être utile de noter quelques résultats intermédiaires, l'essentiel du travail restant mental.

Ce qui caractérise le *calcul automatique* (ou mécanique) c'est l'emploi systématique, quels que soient les nombres, pour une opération donnée, d'un algorithme unique : emploi d'une technique écrite, d'un matériel (boulier, règle à calcul, réglettes de Neper, machine à calculer, table de logarithmes...), ou d'une règle de calcul mental.

C'est la génération parfaite, qui peut faire espérer rapidité, fiabilité, disponibilité d'esprit, économie dans la mémorisation des procédés, puisqu'on va même le plus souvent jusqu'à l'oubli de la justification des dits procédés. L'inconvénient majeur est qu'en cas d'utilisation trop peu fréquente de ce type d'outil le risque est grand de se retrouver totalement désarmé; c'est ce qui se produisait avec certains algorithmes comme la division, ou l'extraction de racines carrées, que la plus grande part des adultes ont souvent oubliés.

Le calcul pensé est quant à lui éminemment particularisant : chaque problème est neuf et l'apprentissage va consister essentiellement à se rendre compte que pour une même opération certains calculs sont plus simples que d'autres, et qu'il peut donc être utile de choisir une voie apparemment plus longue mais moins escarpée Cela impose bien sûr la prise en compte par les élèves de certaines facilitations apportées en calcul par les propriétés trop souvent méconnues de la numération décimale de position. Deux anecdotes pour illustrer ce propos :

a) Des élèves de CE2 à qui l'on apprend que « pour ajouter 9 à un nombre il suffit de lui ajouter 10 et de retrancher 1 » comptent sur leurs doigts de la manière suivante: soit à calculer 7 + 9.

- Je pars de sept et j'ajoute dix : sept, huit, neuf... quinze, seize, dix-sept.
- Maintenant je retranche un : dix-sept, seize. Donc sept plus neuf, seize!

Faute de disposer du moyen de prévoir le nombre qui vient « dix après sept » sans épeler les intermédiaires, les enfants emploient un procédé baroque qui consiste à dépasser le but. Même s'ils réussissent dans cette entreprise on peut s'interroger sur l'aspect formateur de leur docilité.

b) Dans de nombreux C.E. 1 et C.E.2 on enseigne très tôt la règle de multiplication d'un nombre par dix « ... on place un zéro à la droite de l'écriture du nombre. Pourtant lorsqu'au CM.1 on demande à des élèves d'effectuer des additions successives d'un nombre quelconque, nombreux sont ceux qui sont émerveillés, voire troublés en constatant qu'en additionnant des 37 au bout d'un certain temps on rencontre 370 et qu'il en est de même avec tout autre nombre. Tout se passe comme si la régle simple, mais magique avait caché le phénomène qui la sous-tend.

Pour ce qui est du calcul écrit, il est utile de montrer aux élèves que le produit 587× 499 peut s'effectuer ainsi :

			5	8	7		
		×	4	9	9		
2	9	3	5	0	0	←	5 8 7 × 5 0 0
		-	5	9	3	←	5 8 7 × 1
2	9	2	9	1	3		

Ce genre d'activité où la réflexion sur 1a signification des calculs intermédiaires est prépondérante, facilite l'assimilation ultérieure d'algorithmes.

L'École privilégie grandement le calcul automatique, ce qui revient de fait à nier la capacité des élèves à apprendre intelligemment à calculer: la «bosse des Maths » a encore bon dos, et l'idéologie du don exerce encore ses ravages, surtout pour ce qui est du calcul mental. Pour nous, le calcul mental est affaire de travail (savoir et entraînement), de mémoire et peut-être surtout de confiance en soi. Cela nous impose une réflexion fondamentale sur son enseignement dans la mesure où, outre son intérêt pratique évident, nous lui attribuons également un rôle dans l'acquisition de notions mathématiques.

II. Calcul mental pensé et Mathématiques

Cela peut paraître paradoxal à celui qui ne pratique pas les mathématiques de considérer comme mathématique, ou mathématisante, une activité qui consiste pour chaque élève devant un problème particulier de calcul, compte tenu de cc qu'il sait savoir et de ce dont il dispose, à chercher un procédé efficace mais peut être impossible à réutiliser dans un autre calcul. Cette démarche «bricolante», tâtonnante, erratique, heuristique, semble aux antipodes de la conduite mathématique assurée, «droit au but» élégante, simple (On peut d'ailleurs faire le rapprochement avec deux phases différentes suivies par bien des élèves lorsqu'ils ont à faire un problème : la recherche sur le «cahier d'essais» : il s'agit de trouver la sortie d'un labyrinthe et tous les coups sont permis, et le moment où ils rédigent sur le « cahier du jour » : ils décrivent souvent non pas le chemin qui les a menés à la découverte, mais celui qu'a posteriori ils considèrent devoir être la solution attendue par l'enseignant).

Pourtant les activités de calcul mental pensé sont très utiles par rapport à trois domaines très liés aux mathématiques

a. les équivalences de désignations;
b. les relations entre les opérations et l'ordre;
c. ce qu'on a coutume d'appeler « le sens » des opérations (c'est-à-dire la résolution de problème).

a. Equivalences de désignations

Par exemple « vingt quatre » peut suivant les calculs être avantageusement considéré comme

• vingt et quatre (si l'on veut le partager en quatre ou en deux ou en dix);

• douze et douze (si l'on veut en prendre la moitié);

• un avant vingt cinq (si l'on veut le multiplier par quatre);

• vingt et un et trois si l'on cherche quel jour de la semaine on sera vingt quatre jours plus tard, ou si l'on désire lui ajouter dix-sept;

• etc...

Il est clair, au travers de ces exemples, que l'écriture usuelle du nombre est déprivilégiée. Calculer consiste souvent à choisir au mieux dans les classes d'équivalence de désignations, sans se cantonner systématiquement dans l'utilisation de la désignation usuelle.

b. Relations entre opérations et ordre

Le calcul mental pensé, nous l'avons vu, doit permettre de faire réaliser à chaque élève que certains calculs sont paradoxalement plus simples que d'autres (Pour un débutant il est effectivement troublant de s'apercevoir qu'il est plus facile de trouver ce que représente dix fois trente quatre, que quatre fois trente quatre). Par la suite l'appropriation de ces résultats va l'amener, non pas à savoir effectuer à tout coup un calcul mental exact mais au moins à disposer de procédés de calcul approché. Dans certains cas ce calcul approché sera suffisant, et se substituera simplement au calcul exact. Dans d'autres situations il aura valeur d'épreuve en fournissant une prévision de l'ordre de grandeur du résultat du calcul exact.

c. « Sens » des opérations

Dans l'activité de résolution de problèmes certains élèves sont capables de modéliser la situation par anticipation, par réflexe; d'autres ont en revanche besoin de commencer à faire quelque chose pour être capables de réussir. Dans le cas des petits nombres ils arrivent ainsi assez vite à résoudre des situations par des procédés économiques, mettant en jeu peu d'algorithmes.

Exemple: Pierre a 15 billes à partager entre 3 joueurs, pour que chacun en ait autant. .

Les enfants, en simulant la distribution, ou en pensant à 5 + 5 + 5 = 15, ou à 5 × 3 = 15 peuvent conclure (quitte à présenter comme solution la trace

$$\begin{array}{cc|l} 1 & 5 & 3 \\ \cline{3-3} & 0 & 5 \\ & & \end{array}$$

qu'ils n'ont absolument pas utilisée).

En revanche, si le problème devient: Pierre a 1530 billes à partager entre 30 joueurs pour que chacun en ait autant, certains élèves reconnaîtront une situation où la division « peut servir », et réussiront. D'autres ayant aussi repéré la division se décourageront devant un algorithme qui reste effrayant pour bien des élèves. D'autres enfin effectueront toutes les opérations possibles avec 1530 et 30. C'est surtout à ceux-là que le calcul mental pensé, en leur permettant par exemple de remplacer dans le problème 1530 par 1500, donnera une bonne chance supplémentaire de réinvestir la division, grâce à l'extension du domaine heuristique familier. Par ailleurs la décomposition en 1530 = 1500 + 30 peut amener directement au quotient 51.

III. Finalités et Buts des activités de calcul mental

Insistons sur le fait que nous n'avons pas la volonté de discréditer les algorithmes, les activités généralisantes, convergentes. Il s'agit seulement de défendre le point de vue selon lequel chacun a le droit de se frayer son chemin vers ces algorithmes, et que même lorsqu'ils seront construits, devant un problème particulier il restera toujours loisible de se demander « Et là, comment vais-je m'y prendre? Quelle est la voie qui me plaît le mieux, où je me sentirai le plus à l'aise?»

A ce titre le calcul mental pensé est le domaine privilégié où l'on se doit de laisser les élèves assumer leur individualité, tout en utilisant le groupe pour donner à chacun l'occasion d'adhérer à des solutions proposées par d'autres. En effet, contrairement au calcul écrit, où les algorithmes culturels ont une telle vigueur qu'il est très difficile de ne pas y amener les élèves, en calcul mental il est de plus en plus admis que chacun puisse compter «comme il lui plaît ». Ce serait dommage de ne pas en profiter. La finalité serait de donner, grâce au calcul mental pensé, des habitudes de réflexion sur ces calculs, et des moyens permanents d'approximation, de contrôle du calcul automatique, ces habitudes et ces moyens étant disponibles, c'est-à-dire mobilisables sans stimulus direct (sans consigne explicite). II faudrait que chacun ressente qu'il est impossible que le prix d'une entrecôte de 450 g à 42 F le kg soit de 22 F, ou que 39 × 47 soit égal à 1 263.

On se rapproche de cette finalité grâce à des investigations menées à chaque fois que l'occasion s'en présente en classe, et pas seulement au moment de la leçon de math; investigations destinées à vérifier la disponibilité des acquis en calcul mental, et ce indépendamment du contenu notionnel des exercices, lié au déroulement général de la progression.

En outre pour le travail systématique deux types d'activités peuvent être menés

- un travail individuel de développement de la mémoire (ou des mémoires) en même temps qu'un travail de mémorisation des répertoires et de règles, au fur et à mesure qu'elles sont construites (entraînement; contrôle)

- un travail collectif, lent et détaillé, d'apprentissage du calcul mental pensé, D'appuyant sur la comparaison des divers procédés mis en œuvre par différents enfants pour traiter le même problème.

C'est donc pour illustrer ces deux axes que nous fournissons en B une réserve d'activités de calcul mental pensé, qui peuvent éventuellement être redondantes, avec celles qui sont explicitées dans les divers chapitres notionnels des progressions. Ce point de vue est tout à fait comparable à celui abordé pour le chapitre « problèmes » qui comporte, lui aussi, un aspect méthodologique essentiel.