Le calcul au Cours moyen

1 • ANALYSE GÉNÉRALE DU PROGRAMME

Le programme du Cours moyen comprend essentiellement :

1. — La révision et quelques compléments de l'étude des nombres entiers, auxquels on peut rattacher les caractères de divisibilité par 2, 5, 9 et 3, ainsi que leur application à la preuve par 9.

2. — La mesure des grandeurs usuelles en nombres décimaux; les opérations et les problèmes sur ces nombres.

3. — Les quotients et la règle de trois. Les pourcentages et les fractions simples.

4. — La mesure du temps et les problèmes simples de mouvements uniformes et de vitesses.

5. — Les mesures et les calculs de surfaces et de volumes (article sur le système métrique).

6. — Des notions de géométrie.

I. NOMBRES ENTIERS

2 • LA NUMÉRATION

L'enfant qui entre en première année de Cours moyen sait, en principe, lire et écrire les nombres entiers, inférieurs à 10 000. On lui en a révélé la structure à l'aide d'un matériel approprié et en utilisant aussi des mesures et des instruments qui sont connus de lui. Il a eu deux ans pour se familiariser avec l'usage de ces nombres; il est temps d'abandonner définitivement les bûchettes et les cartes, et de se servir méthodiquement des grandeurs et des unités du système métrique.

L'enfant sait : que 10 unités forment une unité accessoire, la dizaine, qui contient, ou qui vaut, ou qui équilibre 10 unités; que 10 dizaines forment une centaine et que 10 centaines, ou 100 dizaines, forment un mille. Il a appris aussi à nommer certaines de ces unités avec des préfixes et des abréviations, *déca* ou *da*; *hecto* ou *h*; *kilo* ou *k*. On a dû cependant lui apprendre aussi l'existence du centimètre, de la dizaine de cm, qui est appelée décimètre, et de la centaine de cm, qui est appelée mètre. Ces noms seront expliqués au cours moyen, avec l'usage des sous-multiples et des nombres décimaux.

Dans les révisions qui seront faites, aussi bien de la numération que des unités du système métrique, il sera sans doute bon de faire reconnaître les unités représentées par les divers chiffres d'un nombre, quand, bien entendu, ce nombre est suivi de l'indication de l'unité. Ceci permettra de passer ensuite sans difficulté au même exercice pour un nombre décimal, l'indication de l'unité qui le suit (circulaire de 1952) se rapportant cette fois au chiffre qui précède, à gauche, la virgule. On trouvera peut-être quelque avantage à énoncer la règle :

dans un nombre (entier ou décimal), *pour deux chiffres qui se suivent, l'unité représentée par le chiffre de gauche est égale à dix fois celle qui est représentée par le chiffre de droite ;*

et, inversement, *l'unité, représentée par le chiffre de droite, est le dixième* (1) *de celle qui est représentée par le chiffre de gauche.*

La notion de classe (mille, millions, milliards ou billions) ne mérite pas de longues explications. C'est une simple habitude de langage qui permet de ne pas donner de noms spéciaux aux unités décimales : dix mille, cent mille; dix millions, cent millions... Elle est traduite par l'écriture des nombres (entiers) en tranches de trois chiffres, séparées par des intervalles (2) destinés à faciliter la lecture.

On essaiera de donner une idée de la grandeur du million et du milliard par quelques exemples concrets. Dans un mètre cube, il y a un million de centimètres cubes, c'est-à-dire qu'il contient environ un million de billes; et pour compter ces billes une à une, sans se tromper, à raison d'une bille par seconde, il faudrait plus de vingt-deux jours de douze heures. Un kilomètre contient un million de millimètres.

3 • OPÉRATIONS

On a étudié, au Cours élémentaire, le sens des quatre opérations ordinaires : addition, multiplication et leurs inverses, y compris la recherche du quotient à une unité près, ou division avec reste. On a vu qu'elles donnent la réponse à des questions concrètes ou le résultat de manipulations sur des grandeurs : réunir, retrancher, compléter, comparer, former une grandeur avec des parties ou des valeurs égales, trouver un nombre de parts (égales), ou trouver la valeur d'une part. On a appliqué ces questions à des collections d'objets, à des valeurs marchandes ou commerciales, à des longueurs, à des poids, à des volumes, à des capacités, et même à des surfaces de rectangles. Il en résulte un certain nombre de types de problèmes, et on pourrait espérer qu'à la sortie du Cours élémentaire un élève saurait, sans erreur ni hésitation, indiquer et poser l'opération (encore unique) qui donne la solution de chacun d'eux.

Il n'en est évidemment pas ainsi pour la moyenne des élèves; il est donc nécessaire, pendant les deux années de Cours moyen, de revenir souvent sur l'étude du sens des opérations. Il faut le faire d'autant plus que cette étude doit être étendue en même temps aux nombres décimaux. Cette extension peut paraître simple et évidente pour l'addition et la soustraction. Elle présente des difficultés sérieuses pour la multiplication par un multiplicateur décimal. Si, notamment, on a trop considéré la multiplication seulement comme une « *addition abrégée* », il devient difficile d'expliquer le cas d'un multiplicateur décimal, par exemple 3,35 : il faut

(1) Le mot « dixième » nécessitera peut-être quelques explications; il peut être associé à un partage en dix parties égales, ou à une division (exacte) par 10.

On rappelle que les expressions, encore trop souvent employées, « dix fois plus grand, ou plus petit », sont incorrectes. Car, en adoptant le sens qu'on croit leur attribuer, elles entraîneraient la conséquence que une fois plus grand, ou une fois plus petit serait une égalité.

(2) La circulaire de 1953 a supprimé l'emploi du point, qui présentait cependant un certain avantage pédagogique, en facilitant l'écriture pour les enfants et la vérification des cahiers pour le maître.

alors diviser d'abord le multiplicande par 100 et ce sont 335 nombres égaux au quotient ainsi obtenu qu'on additionne, par une technique abrégée (1).

Cette révision est encore utile, car, pour résoudre les problèmes qui lui seront posés, l'élève devra poser, au lieu d'une opération unique, plusieurs opérations successives, donnant les résultats intermédiaires dont il aura à reconnaître lui-même la nécessité.

Le mécanisme lui-même aura besoin d'être révisé, en même temps qu'étendu aux nombres décimaux, par les règles de placement des virgules. Quelques circonstances spéciales, par exemple la présence de zéros intercalaires, n'ont peut-être pas été traités complètement; les justifications et même la pratique des cas les plus difficiles n'ont peut-être pas été expliquées ou comprises.

4 • DIVISIBILITÉ

Vocabulaire

Dans la révision de la table de multiplication et de la technique de la multiplication et de la division des nombres entiers, on peut préciser le sens du mot « *multiples* » et de quelques autres termes se rattachant à la divisibilité.

Les *multiples d'un nombre entier* sont les produits de la multiplication de ce nombre par les nombres entiers successifs. La table de multiplication donne les 10 premiers multiples des nombres de 2 à 10. Il est peut-être utile que chaque élève ait à sa disposition une table de Pythagore (par exemple sur un protège-cahier). Les multiples y sont donnés aussi bien par les lignes que par les colonnes, ce qui est une illustration de la commutativité de la multiplication. Sur un mètre gradué en cm, de 0 à 100, les multiples d'un nombre limitent des intervalles de même longueur. Dans un damier de 100 cases, où sont inscrits les nombres de 1 à 100, les multiples d'un nombre, par exemple 3, sont contenus dans les cases, de 3 en 3, à partir de la case 3; on obtient ainsi tous les multiples inférieurs à 100 (ou de deux chiffres).

Un nombre entier D est *divisible* par un nombre entier d, lorsqu'il en est un multiple; on peut le reconnaître en divisant D par d, ou en cherchant le quotient q à une unité près; le reste doit être nul :

$$D = d \times q.$$

On dit encore que d est un *diviseur* de D. Quelques enfants qui s'intéressent au calcul et aux nombres pourront former tous les diviseurs d'un nombre, par exemple 60; ils pourront chercher les premiers nombres qui n'ont pas de diviseur proprement dit (nombres premiers).

Divisibilité par 2 et par 5

Beaucoup d'élèves savent déjà que les multiples de 2 sont les nombres *pairs;* sur le damier, ils occupent les 5 colonnes 2, 4, 6, 8, 10. Ce sont les nombres dont le dernier chiffre est 0 (qui peut être considéré comme un nombre pair) ou 2, ou 4, ou 6, ou 8.

Le reste de la division (à une unité près) d'un nombre entier par 2 est 0, si le nombre est pair, c'est 1 si le nombre est *impair.* On pourra faire chercher, à titre d'exercice d'intelligence, dans quel cas le produit (de la multiplication) de deux nombres entiers est pair.

Les multiples de 5, ou les nombres divisibles par 5 sont les *dizaines* et les *demi-dizaines.* Sur le damier, ils occupent les colonnes 5 et 10. Ce sont les nombres dont le dernier chiffre est un 5 ou un 0.

Le reste de la division d'un nombre entier par 5 est 0 si le nombre est multiple de 5 (terminé par 5 ou 0); c'est 1 si le nombre est terminé par 1 ou par 6...

On peut illustrer l'étude ou la révision de la divisibilité par 2 et 5, par des exercices sur les mesures pratiques du système métrique, doubles et moitiés; on peut aussi leur associer les règles de calcul mental :

Pour multiplier par 5 un nombre entier ou décimal, *on peut le multiplier par 10 et diviser le résultat par 2.*

(1) C'est en raison de cette difficulté que nous avons conseillé de considérer, dès le cours élémentaire, la multiplication comme « une construction faite sur le multiplicande de la même façon que le multiplicateur est construit avec l'unité 1 : la valeur de 3,35 kg est obtenue en calculant 335 fois le centième de la valeur du kg. On reconnaît là la recherche d'une quatrième proportionnelle (voir ci-dessous IV, 16) (dont un terme est l'unité) :

la valeur de 3,35 kg est à la valeur de l'unité comme 3,35 kg est à 1 kg;

ou, plus correctement : le rapport de la valeur de 3,35 kg à la valeur de l'unité est égal au rapport de 3,35 kg à 1 kg.

Pour diviser par 5 un nombre entier ou décimal, *on peut le diviser par 10 et multiplier le résultat par 2.*

La division (exacte) d'un nombre entier (ou décimal) par 2 ou par 5, a pour quotient un nombre, entier ou décimal, qui a au plus un chiffre décimal (en plus que le dividende).

Divisibilité par 9 et par 3

Le reste de la division d'un nombre entier par 9 est appelé couramment « *reste par 9* ». Il convient de signaler aux élèves que ce n'est là qu'une abréviation et non une recette plus ou moins mystérieuse. Il ne semble pas qu'il soit nécessaire d'établir rigoureusement la règle usuelle, bien connue, du calcul de ce reste. On peut cependant l'éclairer par quelques exemples préalables, simples et méthodiques.

On peut situer les dix premiers multiples de 9 sur le damier des 100 premiers nombres; on constate que la somme des deux chiffres est 9 (ou 18 pour 99). On constate aussi que le reste de la division par 9 de chacune des 8 premières dizaines est le chiffre de cette dizaine, par exemple :

$$70 = 9 \times 7 + 7;$$

le quotient est aussi égal à ce chiffre; pour 90 le reste est 0 et le quotient est 10. On peut aussi faire calculer les divisions des centaines, des mille :

$$300 = 9 \times 33 + 3; \qquad 4\,000 = 9 \times 444 + 4.$$

Pour passer de là au reste de la division d'un nombre quelconque, on peut utiliser une étape intermédiaire :

$$\begin{aligned} 5\,315 &= 5\,000 + 300 + 10 + 5; \\ &= 9 \times (555 + 33 + 1) + (5 + 3 + 1 + 5). \end{aligned}$$

La somme des chiffres du nombre : $5+3+1+5 = 14$ n'est pas le reste de la division, puisqu'il est supérieur à 9, mais il est égal à ce reste à un multiple de 9 près; il suffit de calculer le reste par 9 de 14, en additionnant ses chiffres : $1+4 = 5$.

L'inconvénient de ce calcul est qu'il ne conduit pas directement à la règle usuelle : elle consiste bien à additionner successivement les chiffres du nombre considéré; mais chaque fois qu'un total partiel a deux chiffres, on le remplace par la somme de ses chiffres et chaque fois qu'on rencontre un 9, on le remplace par 0.

Quelle que soit sa justification, plus ou moins complète ou plus ou moins précise, le calcul du reste (de la division) par 9 doit devenir familier aux élèves du Cours moyen (même de première année). On en déduit sans peine les conditions de divisibilité : par 9, le reste doit être nul; par 3, le reste doit être égal à 3, ou 6, ou 0.

Preuve par 9 des opérations

Le principe de la preuve par 9 peut être mis sous forme de deux énoncés :

Le reste (de la division) par 9 de la somme — ou du produit — de plusieurs nombres est égal au reste (de la division) par 9 de la somme — ou du produit — des restes (de la division) par 9 de chacun des nombres additionnés — ou multipliés.

D'où la suite des calculs :

1. — On calcule les restes par 9 des nombres à additionner — ou à multiplier.
2. — On additionne — ou on multiplie — ces restes.
3. — On cherche le reste par 9, de ce résultat.
4. — On cherche le reste par 9 du résultat de l'opération proposée. Ces deux derniers restes doivent être égaux. (La disposition de la croix de Saint-André est une habitude, et non une nécessité).

Pour vérifier une soustraction ou une division, avec ou sans reste, on vérifie l'addition ou la multiplication, dont on a cherché des termes :

soustraction : $a - b = x$; on vérifie $a = b + x$;
division : $a : d = q$, reste r; on vérifie $a = d \times q + r$.

Il est important de faire comprendre aux élèves que cette preuve par 9 peut signaler une erreur, mais ne permet pas d'affirmer l'exactitude de l'opération. Elle s'étend aux nombres décimaux, mais ne vérifie pas le placement des virgules. Par contre, dans le cas d'une erreur ainsi décelée dans une multiplication, ou une division, on peut localiser l'erreur en appliquant la preuve aux produits partiels.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les multiples de 2, ou *nombres pairs*, sont dans les colonnes 2, 4, 6, 8, 10.
Les multiples de 5, sont dans les colonnes 5 et 10.
Les multiples de 9 sont sur les parallèles à la diagonale de 9 à 81 et 90 et 99.
Les multiples de 3 sont sur les parallèles à la diagonale :
de 3 à 21; de 6 à 51; de 9 à 81; de 30 à 93; de 60 à 96; de 90 à 99.

II. MESURES EN NOMBRES DÉCIMAUX

5 • SIMPLIFICATIONS DUES AU SYSTÈME MÉTRIQUE

Bien avant l'introduction du Système métrique, on utilisait des *unités* pour mesurer les grandeurs usuelles. Elles n'étaient pas les mêmes suivant les provinces et les pays; elles restaient cependant à peu près fixes (malgré l'absence d'étalons et d'un contrôle légal); certaines sont encore utilisées. Il suffit de citer le pouce, le pied, la toise, le mille (pour les longueurs et les distances); le boisseau, l'once, la livre, l'arpent, le pied cube. Les unités de monnaie, sol, denier, livre... contenaient des poids plus ou moins déterminés d'un métal précieux. On mesurait une grandeur par *un nombre fractionnaire*, c'est-à-dire par un nombre entier d'unités, complété par une fraction (inférieure à 1) de l'unité. C'est ainsi que, dans une *Définition de l'arithmétique* (1788), je lis : « *Un maçon a fait 420 toises et 6/9, de* *muraille* » (six fois la neuvième partie de la toise, en plus des 420 toises); et encore : « *Un marchand a vendu 111 aunes et 9/8 de drap à 27 livres et 13 sols l'aune.* »

La simplification apportée par le système métrique a été double. D'une part les unités fondamentales : mètre, gramme, litre, sont devenues les mêmes, non seulement en France, mais dans un grand nombre de pays, et les instruments de mesure font l'objet d'un contrôle fréquent et rigoureux.

D'autre part, les unités secondaires sont des multiples et des sous-multiples *décimaux* des unités fondamentales, et la plupart ont des noms, formés avec les préfixes bien connus : déca, hecto, kilo; déci, centi, milli; auxquels on ajoute parfois mega et micro. Pour cette raison, *toute mesure exprimée avec une unité et un sous-multiple* (décimal) *de cette unité peut toujours être exprimée par un nombre entier* (par un changement d'unité, mais sans changement de chiffres) :

$$4 \text{ m et } 35 \text{ cm} = 400 \text{ cm et } 35 \text{ cm} = 435 \text{ cm}$$

(le signe = exprime que les longueurs exprimées sont les mêmes, ou sont égales).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut, bien entendu, que la partie exprimée par un nombre entier de sous-multiples soit plus petite que l'unité. Sinon, il y aurait lieu de faire une addition qui entraînerait un changement de chiffres :

$$6 \text{ m et } 203 \text{ cm} = 600 \text{ cm} + 203 \text{ cm} = 803 \text{ cm.}$$

Dans le langage d'avant le Système métrique, on aurait employé une *fraction* pour désigner les centimètres :

4 m et 55 centièmes; ou 4 m et 55/100; ou 4 m 11/20.

On utilise encore de telles expressions dans le langage courant :

demi-litre; ou $\frac{1}{2}$ l; 3 quarts (de kilogramme).

Elles subsistent dans l'expression de durées : 1 h 3/4.
Les minutes sont d'ailleurs des soixantièmes d'heure :

$$1 \text{ h et } 35 \text{ mn peut s'écrire : } 1 + \frac{35}{60} \quad \text{ou} \quad \frac{95}{60} \text{ d'heure.}$$

6 • MESURES EN NOMBRES DÉCIMAUX

Ces considérations éclairent la notion et l'écriture d'un nombre décimal, ou l'emploi de la virgule :

$$4{,}375 \text{ kg} \quad = \quad 4 \text{ kg et } 375 \text{ g} \quad = \quad 4\,375 \text{ g.}$$

La virgule est placée à la droite du chiffre (ou du nombre) qui représente l'unité choisie et indiquée.

Avec ces conventions, on peut encore dire qu'un nombre décimal (avec une virgule), suivi d'un nom d'unité, est égal au nombre entier, obtenu en supprimant la virgule, suivi d'un nom d'un sous-multiple décimal convenable de l'unité (dixième, centième), ... suivant qu'il y a un, ou deux ou ... chiffres décimaux (1).

Les opérations sur les nombres décimaux se ramènent aux opérations sur les nombres entiers, complétées par des règles pour l'emplacement de la virgule (alignement des virgules pour l'addition et la soustraction (III, 12); nombre des chiffres décimaux du produit pour la multiplication (III, 13) (2); déplacement simultané

(1) On sait même que dans des calculs fréquents de physique moderne, une mesure est exprimée par un nombre entier ou décimal de 3 ou 4 chiffres multiplié par une puissance de 10 et suivi d'une unité; il est même commode de dire « *multiplié par cette unité* ».

(2) On remarquera encore que cette règle peut se rattacher à un calcul d'exposants de puissances de 10 :

$$4{,}35 \times 750 = (435 \times 10^{-2}) \times (75 \times 10^{1}) = (435 \times 75) \times 10^{-2+1}$$

pour la division (III, 14). Il importe, bien entendu, comme l'indique le programme et comme le conseillent les *Instructions* (IV, 2), d'utiliser la double règle du déplacement de la virgule, soit *dans un changement d'unité* (décimale), soit *dans une multiplication*, ou *une division par 10, 100, 1 000*.

Le *Programme officiel* réunit d'ailleurs, dans un même alinéa, les nombres décimaux et les nombres entiers; les *Instructions* précisent qu'il y a équivalence (on pourrait dire égalité) entre les « *deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités* (dont l'une est sous-multiple décimal), *soit avec une virgule* » (qui permet de supprimer le nom du sous-multiple). On remarquera même que cette conception simplifie les explications nécessitées par l'écriture de la mesure d'une surface ou d'un volume (*Instructions*, IV, 2) (1).

7 • MESURES EN NOMBRE FRACTIONNAIRES

En un certain sens l'usage des nombres décimaux a remplacé celui des fractions et d'un point de vue théorique, on peut considérer les nombres décimaux comme des cas particuliers des nombres fractionnaires (2).

On pourrait être tenté d'exposer d'abord une théorie de la mesure des grandeurs au moyen des nombres fractionnaires, d'en déduire celle des fractions décimales qui sont des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10, puis la théorie des nombres décimaux qui sont une forme particulière d'écriture des fractions décimales. On aurait ainsi une plus grande généralité, puisque certaines grandeurs qui peuvent être exprimées par une fraction, par exemple le tiers de litre, ne peuvent l'être, du moins exactement, par un nombre décimal. Mais cette généralité serait encore insuffisante, puisque des grandeurs usuelles, comme la diagonale d'un carré d'un décimètre de côté, ne peuvent être exprimées par un nombre fractionnaire.

Par contre une première difficulté se présente : alors qu'un nombre décimal n'a qu'une seule écriture possible (sauf adjonction de zéros à la droite des chiffres décimaux), un nombre fractionnaire est représenté par une « *infinité* » de fractions égales entre elles. La recherche méthodique de la plus simple de ces fractions, c'est-à-dire celle qui a les termes les plus petits (réduite à sa plus simple expression) est un problème d'arithmétique, que connaissaient les géomètres grecs (existence et recherche du p.g.c.d.), mais qui dépasse évidemment le niveau de l'Enseignement primaire.

Au surplus, ce n'est pas cette forme la plus simple qu'il faut toujours utiliser dans la pratique; lorsqu'il faut additionner ou soustraire des fractions, on les réduit au même dénominateur, c'est-à-dire qu'on les remplace par des fractions égales, de termes ordinairement plus grands.

8 • FRACTIONS DE GRANDEURS

Pour ces raisons, dans l'Enseignement primaire et même dans les premières années d'Enseignement du second degré, *la mesure des grandeurs est limitée à l'emploi des nombres décimaux* : on utilise une unité et des multiples et sous-multiples décimaux de cette unité.

Le programme comporte cependant une étude des « *fractions très simples* ». Mais il spécifie que ce sont des « *fractions de grandeurs* », c'est-à-dire, comme le précisent les *Instructions* (IV, 10), des opérateurs, ou des *multiplicateurs abstraits*, indépendants des unités choisies.

Une telle fraction indique une opération, ou une *transformation* à faire sur

(1) Pour cette raison, j'attache beaucoup plus d'importance aux règles de déplacement de la virgule qu'aux relations entre les unités représentées par des chiffres consécutifs; ces relations pourraient, à mon avis, être seulement l'objet d'exercices, sans nécessiter l'énoncé d'une règle, énoncé long et complexe, s'il est correct. A. C.

(2) Il n'en est pas tout à fait ainsi, au point de vue historique, car la représentation ancienne d'une mesure était la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1, en sorte que, pour employer le langage actuel, on séparait toujours la « *partie entière* » et la partie complémentaire d'un nombre fractionnaire. Ceci explique une opinion encore assez répandue qu'une fraction est *une partie* de l'unité et son explication par la tarte qu'on partage en famille.

une grandeur, qui, elle, peut être définie par sa mesure. On en déduit une autre grandeur de même espèce, obtenue en partageant la première en parties égales (en nombre égal au dénominateur), puis en prenant ou en réunissant des grandeurs égales à ces parties, en nombre égal au numérateur (qui peut être supérieur au dénominateur). On reviendra ci-dessous (voir *Fractions*) sur l'étude de cette partie du programme.

On peut signaler, dès maintenant, que, même dans le cas d'une fraction de grandeur, il y a souvent avantage pratique à la remplacer par une fraction décimale (de dénominateur puissance de 10), exacte ou approchée, et à écrire cette fraction sous forme de nombre décimal. Ce nombre est alors indépendant des unités adoptées; il est obtenu en divisant le numérateur par le dénominateur (voir aussi ci-dessous, *Fractions décimales et pourcentages*).

9 • INTÉRÊT THÉORIQUE DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

L'importance des fractions, ou plus exactement, des nombres fractionnaires (éventuellement affectés d'un signe + ou —), est cependant grande en Arithmétique théorique. L'ensemble des nombres fractionnaires (chacun d'eux étant représenté par toutes les fractions égales à l'une d'elles) est l'ensemble le plus simple de « nombres », comprenant les nombres entiers ordinaires, dans lequel sont possibles les 4 opérations élémentaires (addition, multiplication et leurs « inverses »), à l'exception de la division par zéro. Le quotient d'un nombre entier (positif, négatif ou même nul) par un nombre entier non nul est la fraction qui les a pour termes, ou, plus exactement, est le nombre fractionnaire, défini par cette fraction et représenté par toutes les fractions qui lui sont égales.

Cette importance est beaucoup moins grande dans le calcul usuel, de la vie courante et même de la science de l'ingénieur, ou de la physique. Il n'y a aucun inconvénient à remplacer 3/4 par 0,75, ou, pour utiliser une habitude (d'ailleurs inutile), par 75 %, ni même à remplacer 1 tiers par l'un des nombres approchés 0,33 ou 0,333 (33 % ou 33,3 %), suivant l'approximation qui apparaît utile. Dans le Cours moyen et surtout dans la Classe de fin d'études, les élèves devront d'ailleurs acquérir une première notion de l'approximation, tant des mesures que des calculs; ils arrondiront au F les sommes à payer; ils savent bien qu'on ne mesure pas la longueur d'un champ au centimètre près; ils négligeront, dans un nombre, les chiffres qui représentent des unités trop petites.

En conclusion, on ne peut que recommander de suivre les indications très nettes du programme officiel et de *se borner aux mesures des grandeurs en nombres décimaux* (éventuellement approchés). On peut faire exception, bien entendu, pour les mesures de temps ou de durées. Les *Instructions* recommandent d'ailleurs de passer souvent par l'intermédiaire des nombres décimaux (dixièmes et centièmes de minutes convertis ensuite en secondes; IV, 12).

III. **CALCUL DES NOMBRES DÉCIMAUX**

10 • ÉCRITURE ET LECTURE

Virgule

On a indiqué déjà (III, 5 et 6) que la mesure d'une grandeur (longueur, poids, volume ou capacité, monnaies) exprimée en unités et sous-multiples décimaux de cette unité peut être écrite avec deux nombres entiers séparés par une virgule (voir « Système métrique »). Il est équivalent de dire : *une table a une longueur de* :

1 m et 35 cm; ou 100 cm + 35 cm = 135 cm; ou 1,35 m.

Dans ces diverses écritures de la mesure, avec les mêmes chiffres, on a déjà dit que chaque chiffre représente des unités, égales à *10 fois* les unités représentées par le chiffre qui suit à droite, s'il existe :

1 représente des m, égaux à 10 fois les dm, représentés par 3;
3 représente des dm, égaux à 10 fois les cm, représentés par 5.

Inversement chaque chiffre représente des unités, égales au *dixième* des unités, représentées par le chiffre qui précède, à gauche, s'il existe :

5 représente des cm, égaux au dixième des dm, représentés par 3;
3 représente des dm, égaux au dixième des m, représentés par 1.

La loi d'écriture décimale est telle qu'il suffit de connaître l'unité représentée par un des chiffres pour connaître, sans ambiguïté, l'unité représentée par un chiffre quelconque. On peut s'aider de tableaux analogues au suivant :

...	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	...

construits pour les poids, les capacités ou les volumes, plus tard pour les surfaces et les volumes (cubes des unités). De nombreux ouvrages contiennent de ces tableaux; il peut être avantageux d'en faire construire par les élèves eux-mêmes et de les exercer à choisir l'unité (ou sous-multiple) qui est la plus propice pour une mesure (cm ou mm sur un dessin; m pour un bâtiment; km pour une distance; *Instructions*, Cours élémentaire, III, 3).

Il importe de faire décomposer des exemples de nombres, ou plus exactement de mesures, dont certains chiffres sont des zéros.

Tout nombre, entier ou décimal, exprimant une mesure de grandeur, *doit être suivi de l'indication de l'unité adoptée* (souvent en abréviation). Cette unité est représentée par le chiffre qui précède immédiatement la virgule (à gauche), ou par le dernier chiffre de droite s'il n'y a pas de virgule. (On peut supposer alors qu'on sous-entend une virgule, suivi de zéros : 35 m ou 35,0 m ou 35,00 m) (1). (Voir la circulaire du 13 août 1952.)

Les *chiffres décimaux* d'un nombre sont ceux qui suivent la virgule, à droite. Ils représentent les sous-multiples décimaux de l'unité adoptée (dixième, centième). On peut toujours, sans changer le nombre, ou la mesure, placer des zéros à la droite de ces chiffres décimaux (ainsi qu'il a déjà été indiqué quand il n'y en a pas) :

2,8 m = 2,80 m   ou 28 dm   ou 280 cm.

Certains *nombres décimaux* abstraits sont indépendants des unités choisies et, par suite, s'écrivent sans indication d'unité :

Le poids de farine fourni par un poids de blé est obtenu en multipliant ce poids de blé par 0,8.

Cette formule est indépendante de l'unité choisie pour mesurer le poids de blé et le poids de farine, pourvu toutefois que ce soit la même. De même *le périmètre d'un cercle est obtenu* (approximativement) *en multipliant la longueur du diamètre par 3,14.*

Ces nombres sont des valeurs (décimales) de fractions (décimales) ou de « *pour cent* ». Ils indiquent un rapport de deux grandeurs de même espèce (2). On reviendra ci-dessous sur leur étude (V et VI).

(1) On sait que, dans certains cas, ces zéros indiquent une précision de mesure : 35,0 m peut signifier 35 m, à un décimètre près; longueur comprise entre 35 m et 35,1 m. Il ne semble pas qu'il y ait lieu de préciser au Cours moyen une telle signification.

(2) On remarquera qu'une valeur totale d'une grandeur et la valeur de l'unité de cette grandeur ne sont pas de même espèce; la première ne dépend que de l'unité de valeur, la vitesse *dépend de l'unité de longueur et de l'unité de temps; le poids spécifique dépend de l'unité de* poids et de l'unité de volume.

Lecture

On énonce la partie entière (à gauche de la virgule) en la faisant suivre du nom de l'unité, puis la partie décimale (à droite de la virgule) en indiquant l'unité représentée par le dernier chiffre décimal :

43,25 m	se lit	43 mètres 25 centimètres;
20,050 kg	se lit	20 kilogrammes 50 grammes.

On tient compte ainsi de la présence possible de zéros. Il semble d'ailleurs excellent qu'à chaque lecture d'un nombre, l'enfant soit obligé de se rendre compte de l'unité que représente le dernier chiffre décimal. Il doit ainsi observer, réfléchir, et il comprend mieux la structure du nombre.

On aurait pu penser que la réforme de l'écriture, imposée par la circulaire du 13 août 1952, introduirait une difficulté supplémentaire pour les élèves, et beaucoup de maîtres ont dû être gênés par cette innovation, cependant préparée par les *Instructions* de 1945. L'expérience semble montrer que l'écolier d'aujourd'hui accepte cette notation aussi aisément que nous-mêmes, à son âge, avions accepté l'ancienne (voir l'article sur l'écriture des formules).

11 • DÉPLACEMENT DE LA VIRGULE

Dans un nombre décimal, représentant une mesure de grandeur, le déplacement de la virgule peut résulter de deux circonstances différentes :

Changement d'unité

Quand on remplace l'unité par son dixième, ou son centième..., il faut déplacer la virgule de un, ou deux, ou ... rangs vers la droite :

3,52 m = 35,2 dm = 352 cm = 3 520 mm.

Dans l'avant-dernier exemple, on a supprimé la virgule, puisqu'il n'y a plus de chiffres décimaux. Dans le dernier, on a introduit un zéro pour représenter les millimètres; on peut aussi remarquer que 352 cm est égal à 352 dizaines de mm.

Quand on remplace l'unité par sa dizaine, ou sa centaine, ou ..., il faut déplacer la virgule de un, ou deux, ou ... rangs vers la gauche :

645 m = 64,5 dam = 6,45 hm = 0,645 km.

Dans le premier nombre, il y avait une virgule sous-entendue, avec des zéros à droite; dans le dernier nombre, on a introduit un zéro pour représenter les km, qui ne figurent pas dans la mesure en m.

Les exemples ainsi indiqués montrent quelques-unes des difficultés qui peuvent se présenter pour les élèves, d'autant plus que cette écriture décimale est une convention, convention logique sans doute, mais convention quand même. Elle nous est familière, mais pour les enfants elle ne peut être ni inventée, ni même comprise, sans des explications, ni surtout sans des exercices, qui fixent la mémoire du mécanisme. On peut emprunter d'abord ces exemples et ces exercices à la mesure des longueurs, dont la connaissance est sans doute déjà partiellement acquise par les enfants.

On étudiera de la même manière les unités décimales, multiples et sous-multiples du gramme, du kilogramme, du centilitre, du litre et de l'hectolitre; on pourra peut-être compter aussi en centaines de francs. Rien ne presse de généraliser. On passe en général trop rapidement aux unités décimales abstraites, dixièmes, centièmes, millièmes. Nous souhaitons que l'on n'en parle pas en première année de cours moyen et que l'on se contente d'utiliser, dans cette classe, des *nombres décimaux concrets.*

Les maîtres veilleront à bien faire comprendre que le déplacement de la virgule, ainsi accompagné du changement de l'unité, ne change pas la valeur de la mesure. On obtient deux écritures différentes d'une même mesure.

On remarquera encore qu'un changement d'unité convenable permet toujours de remplacer un nombre décimal (avec des chiffres décimaux non nuls) par un nombre entier, suivi de la nouvelle unité.

Multiplication et division par 10, ou par 100, ou...

Pour multiplier un nombre décimal par 10, ou par 100, ou ..., on déplace la virgule de un, ou de deux, ou ... rangs vers la droite; on ne change pas l'unité.

3,25 m × 10 = 32,5 m; 3,25 m × 100 = 325 m;
3,25 m × 1 000 = 3 250 m.

Dans la deuxième multiplication, on a supprimé la virgule, puisqu'il n'y a plus de chiffres décimaux. Dans la troisième, on a implicitement remplacé 3,25 m par 3,250 m.

Pour expliquer cette règle, on peut utiliser la règle de la multiplication d'un nombre entier par 10, ou par 100, ou ..., déjà apprise au cours élémentaire, et qui consiste à placer un ou deux, ou ... zéros à la droite du nombre. On change provisoirement d'unité, de façon à exprimer la mesure par un nombre entier, on applique la règle rappelée, puis on revient à la première unité :

3,25 m = 325 cm;
325 cm × 10 = 3 250 cm. 3,250 cm = 32,5 m.

La division par 10, ou par 100, ou ... étant l'inverse de la multiplication, on fait le déplacement de la virgule en sens inverse.

Pour diviser un nombre (décimal) *par 10, ou par 100, ou ...* (ou pour en prendre le dixième, ou le centième, ou ...), *on déplace la virgule de un, ou deux, ou ... rangs vers la gauche; on ne change pas l'unité :*

22,5 m : 10 = 2,25 m; car 2,25 m × 10 = 22,5 m;
22,5 m : 100 = 0,225 m; car 0,225 m × 100 = 22,5 m.

12 • ADDITION ET SOUSTRACTION

Il n'y a pas de difficulté majeure à étendre aux nombres décimaux le *sens* et la *technique* de l'addition et de la soustraction.

L'addition traduit encore une « réunion » de grandeurs (Cours élémentaire, III, 10), on peut la préciser à nouveau pour les grandeurs étudiées, on place des longueurs bout à bout, en *rectifiant* éventuellement (au moins par la pensée) une ligne brisée ou une ligne courbe; on mélange des volumes de liquide; on pèse deux corps placés séparément, puis ensemble sur un plateau d'une balance. La soustraction est l'opération inverse de l'addition : elle peut être interprétée comme la recherche d'un *complément*, ou d'un *reste*, ou d'une *différence* de deux grandeurs préalablement comparées.

La technique est presque la même : depuis deux ans, l'enfant est habitué à écrire les mètres sous les mètres, les dizaines sous les dizaines..., il écrira de même les virgules sous les virgules, les dixièmes sous les dixièmes... Les retenues se feront, s'il y a lieu, de la même façon, puisque les chiffres d'une colonne (de l'addition ou de la soustraction, ainsi posée) représentent des unités égales à une dizaine des unités représentées par les chiffres de la colonne de droite.

On peut encore dire que tout se passe comme si on additionnait des nombres entiers (obtenus par un changement d'unité convenable), la virgule vient ensuite se mettre à la place qu'elle avait primitivement :

13,25 m		1 325 cm
27,4 m	est équivalent à	2 740 cm
35,57 m		3 557 cm
76,22 m.		7 622 cm.

13 • MULTIPLICATION

La justification de la technique, sinon du sens de l'opération, diffère suivant les cas.

Multiplicande décimal et multiplicateur entier

L'explication peut se faire sur un problème. *Un sac contient 1,06 hl de blé; quel est le volume de blé contenu dans 35 sacs semblables?*

On peut ramener ce problème à un problème sur des nombres entiers, en changeant provisoirement d'unité :

1,06 hl = 106 l;
106 l par sac × 35 sacs = 3 710 l; 3 710 l = 37,10 hl.

On revient à l'ancienne unité en séparant deux chiffres décimaux, c'est-à-dire autant qu'il y en avait au multiplicande primitif et qu'on avait incorporés à gauche de la virgule en changeant d'unité. On sait qu'on dispose l'opération en laissant la virgule.

1,06 hl		106 l
35		35
5 30	est équivalent à	530
31 8		3 18
37,10 hl		3 710 l

Multiplication d'un nombre entier par un nombre décimal

Problème. — Un litre de mercure pèse 13 640 g; quel est le poids de 3,2 litres?

Pour former 3,2 l, on prend le dixième de litre (ou décilitre) et on réunit (ou on compte) 32 de ces dixièmes;
pour avoir le poids de ces 32 dixièmes, on prend le dixième du poids du litre et on compte 32 fois ce poids, ou on le multiplie par 32 :

13 640 g : 10 = 1 364 g; 1 364 g × 32 = 43 648 g;

ou, en précisant les unités de volumes :

13 640 g par l : 10 dl = 1 364 g par dl;
1 364 g par dl × 32 dl = 43 648 g.

On peut d'abord multiplier par 32, puis diviser par 10 en séparant dans le produit un chiffre par une virgule; d'où la règle. L'opération est toujours appelée une multiplication et elle est notée :

13 640 g par l × 3,2 l = 43 648 g.

Certains ouvrages expliquent cette règle en passant par l'intermédiaire d'un problème à multiplicateur entier :

3,2 l est le dixième de 32 l;
le poids de 32 l est : 13 640 g par l × 32 l = 436 480 g;
le poids du dixième est : 436 480 g : 10 = 43 648 g.

Cette explication a le petit avantage de suivre l'ordre de la règle.

Reste à justifier l'emploi du terme « multiplication »; ce peut être gênant et obscur si la multiplication a été « définie » comme une addition abrégée; elle ne l'est plus si elle est comprise comme la *recherche d'une valeur* (monnaie, poids, longueur...), d'une grandeur mesurée par un nombre (entier ou décimal) quand on connaît la valeur de l'unité.

Multiplication de nombres décimaux

On peut reprendre le même problème en mettant le multiplicande sous forme d'un nombre décimal, avec une autre unité; *un litre de mercure pèse 13,64 kg; quel est le poids de 3,2 l?*

On reprend le calcul déjà fait, et on change d'unités dans le multiplicande et dans le produit, ce qui revient à déplacer la virgule du même nombre de rangs :

$$13\,640 \text{ g par } 1 \times 3{,}2 \text{ l} = 43\,648 \text{ g};$$
$$13{,}640 \text{ kg par } 1 \times 3{,}2 \text{ l} = 43{,}648 \text{ kg}.$$

D'où la règle; on peut expliquer la raison d'être différente des chiffres séparés au produit. On remarquera que cette règle conserve la propriété de commutativité. Le produit de (la multiplication) de deux nombres décimaux ne change pas quand on change leur ordre.

14 • DIVISION

Notations

Le mot *quotient*, désignant le résultat d'une division, est susceptible d'être pris dans des sens différents, quoique voisins, et il y a lieu d'en préciser les notations. Ce sont :

a) Le quotient de deux nombres entiers, à une unité près, par défaut, appelé aussi *quotient entier.* C'est le résultat de la division étudiée au cours élémentaire :

$$12 : 3 = 4; \qquad 14 : 3 = 4, \text{ reste } 2.$$

On cherche le plus grand multiple du diviseur, qui soit contenu dans (ou au plus égal à) le dividende. Le *quotient* est le multiplicateur de ce multiple, le *reste* est la différence entre le dividende et ce multiple, il doit être plus petit que le diviseur (il ne peut plus être partagé), il peut être nul :

diviseur × quotient, au plus égal au dividende;
dividende — diviseur × quotient = *reste*, inférieur au diviseur.

b) Le quotient de deux nombres entiers, ou décimaux, à une approximation décimale donnée (unité; ou dixième; ou centième...; 1; ou 0,1; ou 0,01...), par défaut. Le quotient est un nombre décimal contenant 0, ou 1, ou 2... chiffres décimaux; le produit de sa multiplication par le diviseur doit être contenu dans (ou au plus égal à) le dividende. Le reste est la différence entre le dividende et ce produit, il doit être plus petit que le produit du diviseur par l'approximation décimale (diviseur; ou diviseur × 0,1; ou diviseur × 0,01...); il peut être nul (la division est dite alors exacte).

Ce cas peut se ramener au précédent, en effectuant un changement convenable d'unités dans le dividende et le diviseur, de façon que l'approximation devienne à une unité près.

c) Le *quotient exact* du dividende par le diviseur. La division est alors l'*opération* (rigoureusement) *inverse de la multiplication.* On cherche le « nombre », appelé quotient, dont le produit (de la multiplication) par le diviseur est égal au dividende :

diviseur × *quotient* = dividende

C'est quelquefois un nombre entier ou décimal; on l'obtient alors par l'une des divisions précédentes, lorsque le reste obtenu est nul. S'il n'en est pas ainsi, En reprenant l'un des exemples numériques donnés ci-dessus, on peut traiter le problème :

3,3 l d'huile pèsent 24,2 kg; quel est le poids de 6 l de cette huile ?

Le poids de 1 l est le quotient $\frac{24,2}{3,3}$ kg par l; le poids de 6 l est obtenu en multipliant par 6 l ce quotient (qui est le poids du litre) :

$$\frac{24,2}{3,3} \text{ kg par } 1 \times 6 \text{ l} = \frac{24,2 \times 6}{3,3} \text{ kg.}$$

Les simplifications sont évidentes :

$$\frac{24,2 \times 6}{3,3} = \frac{242 \times 6}{33} = \frac{242 \times 2}{11} = 22 \times 2 = 44.$$

Le calcul fait, on rétablit le nom de l'unité : 6 l d'huile pèsent 44 kg.

Bien entendu le maître voit bien que les données du problème ont été choisies pour que le résultat définitif du calcul soit un nombre exact (ici entier). Il y a là une certaine « tricherie » avec la réalité, tricherie bien connue de tous les auteurs de problèmes. Il ne faut pas trop s'en plaindre : les simplifications des calculs sont des exercices utiles pour la connaissance des nombres et pour l'appréciation des ordres de grandeur.

Division d'un nombre entier par un nombre entier

On partage également 25 billes entre 8 enfants. Combien pourra-t-on donner de billes à chaque enfant et combien en restera-t-il?

D'après la table de multiplication, 8 *fois* 3 *billes* font 24 billes et 8 fois 4 billes font 32 billes. On pourra donner 3 billes à chacun des enfants mais pas 4; on en distribuera ainsi $3 \times 8 = 24$ et il restera $25 - 24 = 1$ bille. On peut résumer ce raisonnement en écrivant :

25 billes : 8 enfants = 3 billes par enfant;   reste 1 bille.

On partage également 25 kg de café entre 8 personnes. Quel poids de café devra-t-on donner à chaque personne?

Les nombres sont les mêmes que dans le problème précédent : on pourrait donner 3 kg de café à chaque personne et il resterait 1 kg non partagé. Mais alors qu'il n'était pas possible de partager une bille, on peut partager 1 kg en essayant de former des poids de plusieurs grammes.

On peut continuer le partage en partageant le reste, exprimé en g, soit 1 000 g. On pose les divisions :

$$\begin{array}{r|l} 25\,000 & 8 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 3\,125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 25{,}000 & 8 \\ \cline{2-2} 1{,}0 & 3{,}125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

On met une virgule et au besoin des chiffres décimaux nuls au dividende, on place la virgule au quotient aussitôt avant d'abaisser le premier chiffre décimal du dividende. La solution résumée est :

25 kg : 8 personnes = 3,125 kg par personne;   reste 0.

Comme le café est formé de grains, il peut se faire que les pesées ne donnent pas tout à fait des poids égaux, de sorte que les parts ne seront que « à peu près » 3,125 kg.

Division d'un nombre décimal par un nombre entier

5 litres d'eau salée pèsent 5,750 kg. Quel est le poids de 1 litre?

On se ramène au type de problème précédent, en changeant d'unité dans le dividende, de façon à en faire un nombre entier :

$$\begin{array}{r|l} 5{,}750 & 5 \\ \cline{2-2} 0\,7 & 1{,}15 \\ 25 & \\ 0 & \end{array}$$

5,750 kg = 5 750 g;
5 750 g : 5 l = 1 150 g par l;
1 150 g par l = 1,150 kg par l.

On peut diviser directement le dividende, sous sa forme décimale, en appliquant la règle précédente, pour le placement de la virgule au quotient.

Diviseur décimal

Le boucher a annoncé 573,75 F (arrondi à 574 F) pour un morceau de viande de 1,35 kg. Combien comptait-il le prix du kilogramme?

Le prix du kilogramme est le multiplicande de la multiplication :

$$\text{prix du kg} \times 1{,}35 \text{ kg} = 573{,}75 \text{ F.}$$

Le prix de 100 morceaux semblables, qui pèseraient 135 kg, serait 100 fois le prix de ce morceau, soit 57 375 F. Le prix cherché du kilogramme est encore le multiplicande de la multiplication :

$$\text{prix du kg} \times 135 \text{ kg} = 57\,375 \text{ F.}$$

On est ramené au cas d'un diviseur entier :

$$\begin{array}{r|l} 57\,375 & 135 \\ \cline{2-2} 3\,37 & 425 \\ 675 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 573{,}75 & 1{,}35 \\ \cline{2-2} 3\,37 & 425 \\ 675 & \\ 0 & \end{array}$$

On peut résumer la solution :

$$573{,}75 \text{ F} : 1{,}35 \text{ kg} = 425 \text{ F par kg.}$$

Une bonbonne contient 12,50 l de vin. Combien pourra-t-on emplir de bouteilles de 0,75 l et quel volume de vin restera-t-il?

$$\begin{array}{r|l} 12{,}50 & 0{,}75 \\ \cline{2-2} 5\,00 & 16 \\ 50 & \end{array}$$

En prenant pour unité le cl, la bonbonne contient 1 250 cl et les bouteilles 75 cl. D'où la division et la règle du déplacement de la virgule. Le chiffre des unités du reste est situé sous le chiffre des unités du dividende (avant le déplacement de la virgule). On peut résumer la solution :

$$12{,}50 \text{ l} : 0{,}75 \text{ l par bouteille} \quad = \quad 16 \text{ bouteilles;} \qquad \text{reste } 0{,}50 \text{ l.}$$

Dans l'un et l'autre exemple, on a utilisé, en la justifiant, la propriété d'un *quotient exact* : sa valeur ne change pas quand on multiplie ses deux termes par une même puissance de 10 (et aussi par un nombre quelconque).

$$\frac{573{,}75}{1{,}35} \text{ F par kg} = \frac{57\,375}{135} \text{ F par kg;}$$

$$\frac{12{,}50}{0{,}75} = \frac{1\,250}{75} = \left(16 \text{ et } \frac{50}{75}\right) \text{ bouteilles.}$$

Dans le second problème on pourrait dire qu'une dix-septième bouteille n'est que partiellement remplie et que le volume de vin est les 50/75 de son contenu (ou les 2/3). Cette remarque est en accord avec la notion de fraction, telle qu'elle est indiquée par le programme.

IV. LA RÈGLE DE TROIS

La règle de trois est une opération sur trois nombres (entiers ou décimaux, concrets ou abstraits); comme pour les opérations déjà étudiées, on peut en distinguer la technique et le sens. On commencera ici par l'étude de la technique, qui peut se justifier par des considérations théoriques, conséquences des propriétés de la multiplication et de la division des nombres (entiers et décimaux).

15 • TECHNIQUE DE LA RÈGLE DE TROIS

Produit de 3 facteurs

Dans l'étude de la table de multiplication, puis dans celle de la technique de la multiplication des nombres entiers et décimaux, on a constaté que le produit (de la multiplication) de deux nombres (ou facteurs) est indépendant de l'ordre, ou bien encore est *commutatif.*

Une autre propriété, ou qualité, de la multiplication des nombres (entiers et décimaux) est plus intuitive, c'est l'*associativité*; elle concerne trois nombres et peut être énoncée :

On obtient le même résultat (ou des résultats égaux) *en multipliant un premier nombre par un deuxième, puis en multipliant le produit ainsi obtenu par un troisième nombre;*

ou bien en multipliant le premier nombre par le produit (de la multiplication) *du deuxième nombre par le troisième.*

Cette propriété est en évidence sur un exemple concret (1) : *un hectolitre de blè pèse 78 kg; le blé se vend 3 250 F le quintal. Quel est le prix de 32 hectolitres?*

On peut calculer :

le prix de 1 hl : 3 250 F par q × 0,78 q par hl = 2 535 F par hl;
le prix de 32 hl : 2 535 F par hl × 32 hl = 81 120 F.

Mais on peut aussi bien calculer :

le poids de 32 hl : 0,78 q par hl × 32 hl = 2 496 q;
le prix des 32 hl : 3 250 F par q × 2 496 q = 81 120 F.

On peut résumer les deux solutions par les formules :

3 250 F par q × (0,78 q par hl × 32 hl);
(3 250 F par q × 0,78 q par hl) × 32 hl ;

les parenthèses indiquent qu'il faut d'abord effectuer la multiplication qu'elles renferment; ensuite la multiplication extérieure.

Quotient

Dans l'étude de la division, on a dit que le *quotient exact* de deux nombres (entiers ou décimaux, concrets ou abstraits) est le nombre x, dont le produit (de la multiplication) par le diviseur d est égal au dividende a. On a admis, comme *évi-*

(1) On reconnaît là un type de problème assez courant; on peut aussi en rapprocher la règle du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle, par le produit de ses trois dimensions, qu'on peut associer, en un produit d'une surface par une longueur (de 3 façons différentes).

dent ou certain, que ce quotient est déterminé, on a indiqué sa notation avec une barre (de fraction), en sorte qu'il est « équivalent » d'écrire :

$$x = \frac{a}{d} \qquad \text{ou } x \times d = a \qquad \text{ou} \qquad d \times x = a.$$

Cette détermination (ou cette unicité) du quotient peut être considérée comme une propriété de la multiplication et peut être exprimée ainsi (1) :

Si les produits de la multiplication de deux nombres par un même troisième, non nul, sont égaux, ces nombres sont égaux :

$$a \times x = a \times y \qquad \text{ou } x \times a = y \times a \qquad \text{entraîne } x = y \ (a \text{ non nul}).$$

Quand la division de deux nombres (entiers ou fractionnaires) ne se fait pas exactement, on admet qu'il existe cependant (on peut dire physiquement, ou matériellement) un quotient exact (voir III, 10). On admet que ces quotients exacts (y compris ceux qui sont égaux à des nombres entiers ou décimaux) peuvent être multipliés entre eux et que leur multiplication vérifie les propriétés (ou qualités) qui viennent d'être rappelées : commutativité, associativité et égalité de deux quotients (ou de deux nombres) dont les produits, par un troisième, sont égaux.

Égalité de quotients

Ces considérations permettent d'affirmer que :

On ne change pas le quotient exact de deux nombres (entiers ou fractionnaires) *en les multipliant, ou en les divisant* (si cela est possible) *par un même nombre.*

On cherche le quotient exact $x = \frac{a}{d}$, du dividende a par le diviseur d; c'est dire que le produit de d par x (ou de x par d) est égal à a :

$$d \times x = a.$$

En multipliant ces deux nombres égaux par un même troisième q, on obtient encore deux nombres égaux :

$$q \times (d \times x) = q \times a \qquad \text{ou} \qquad (q \times d) \times x = q \times a.$$

La deuxième égalité est obtenue en appliquant l'associativité à l'opération du premier membre. Cette égalité montre que x, calculé comme le quotient de a par d, est aussi le quotient de $(q \times a)$ par $(q \times d)$. On passe du premier quotient au second, en multipliant les deux termes par q; on passe du second au premier en divisant ses deux termes par q.

On a déjà appliqué cette propriété d'égalité de quotients exacts (en la justifiant par des considérations concrètes) dans la technique de la division des nombres décimaux (14, *Diviseur décimal*) pour le déplacement de la virgule au dividende et au diviseur.

Les 3 calculs de la règle de trois

La règle de trois est une opération qui consiste, étant donnés trois nombres (entiers ou décimaux, concrets ou abstraits), à multiplier les deux premiers a et b,

(1) C'est là une propriété importante (malgré son évidence apparente) des nombres entiers (donc aussi des nombres décimaux) et elle est une des bases de toute théorie correcte des nombres fractionnaires, ou des quotients. Elle peut être énoncée comme une propriété de la multiplication par o : *pour que le produit* (de la multiplication) *de deux nombres* (entiers) *soit nul, il faut que l'un au moins des nombres soit nul;* il suffit qu'il en soit ainsi. On en déduit la propriété du texte en appliquant la distributivité de la multiplication :

$$a \times x = a \times y \qquad \text{et} \qquad a \times (x - y) = (a \times x) - (a \times y)$$

entraînent :

$$a \times (x - y) = 0.$$

Dans le produit $a \times (x - y)$, le premier facteur a n'étant pas nul, il faut que le second $(x - y)$ le soit, c'est-à-dire que x doit être égal à y.

puis à diviser le produit obtenu par le troisième nombre d (en cherchant le quotient exact) :

$$a \times b = p; \qquad d \times x = p; \qquad \text{ou } x = \frac{p}{d}.$$

Une règle de trois est représentée par la formule :

$$x = \frac{a \times b}{d};$$

en principe, c'est un quotient exact, mais il peut se faire qu'on ne puisse en calculer qu'une valeur approchée.

Les considérations précédentes permettent d'affirmer l'équivalence des trois modes de calcul suivants :

On multiplie a *par* b, *puis on forme le quotient* (exact) *du produit ainsi obtenu par* d*;*

on forme le quotient (exact) *de* a *par* d, *puis on multiplie ce quotient par* b*;*

on forme le quotient (exact) *de* b *par* d, *puis on multiplie* a *par ce quotient.*

Ces trois modes sont exprimés par les formules (où les parenthèses ont la signification de priorité de calcul déjà indiquée) :

$$\frac{(a \times b)}{d}; \qquad \left(\frac{a}{d}\right) \times b; \qquad a \times \left(\frac{b}{d}\right)$$

En raison de la commutativité, on peut changer l'ordre des facteurs, dans les multiplications; il y a peut-être lieu de le respecter dans la solution d'un problème concret.

Les quotients « formés » sont, en principe, des quotients exacts; si le calcul ne donne, au moins pour l'un d'entre eux, que des valeurs décimales approchées, les 3 valeurs calculées ne sont plus strictement égales, mais seulement approchées. Exemple : les trois modes de calcul appliqués à l'exemple numérique : $\frac{30 \times 14}{21}$ donnent

1. — $30 \times 14 = 420$;	$420 : 21 = 20$; reste 0;
2. — $30 : 21 = 1{,}428$; reste $0{,}012$;	$1{,}428 \times 14 = 19{,}992$;
3. — $14 : 21 = 0{,}666$; reste $0{,}014$;	$30 \times 0{,}666 = 19{,}98$.

Il est visible que l'approximation peut devenir aussi grande qu'on veut, en calculant les quotients avec un nombre suffisamment grand de chiffres décimaux.

On reviendra ci-dessous sur la justification de l'équivalence de ces modes de calcul par leur interprétation dans des problèmes concrets. La justification théorique peut résulter de l'*associativité* de la multiplication :

Reprenons les formules avec les lettres a, b, et d; effectuons le deuxième calcul et appelons a' le quotient (exact) de a par d; il est défini par l'égalité de multiplication :

$$d \times a' = a.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par le nombre b, on obtient encore deux nombres égaux :

$$(d \times a') \times b = a \times b \qquad \text{ou} \qquad d \times (a' \times b) = a \times b.$$

La deuxième égalité (déduite de la première, en associant différemment les facteurs de la multiplication du premier membre) montre que le produit $(a' \times b)$, qui est le résultat du deuxième calcul, est égal au quotient de $a \times b$ par d, c'est-à-dire au résultat du premier calcul.

Effectuons encore le troisième calcul et appelons b' le quotient (exact) de b par d :

$$b' \times d = b.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par a, on obtient encore deux nombres égaux :

$$a \times (b' \times d) = a \times b \qquad \text{ou} \qquad (a \times b') \times d = a \times b.$$

Le produit $a \times b'$, qui est le résultat du troisième calcul est égal au quotient de $a \times b$ par d, c'est-à-dire au résultat du premier calcul (1).

Simplifications de la règle de trois

Dans une règle de trois, on peut multiplier ou diviser (si cela est possible) par un même nombre le nombre du dessous et l'un des facteurs du dessus. Car on ne change pas le quotient correspondant, ni son produit, par l'autre facteur dans le mode de calcul approprié). On peut faire de telles modifications successivement; la technique en est bien connue. Pour l'exemple de calcul ci-dessus :

$$\frac{30 \times 14}{21} = \frac{30 \times 2}{3} = 10 \times 2 = 20.$$

16 • PROPORTIONNALITÉ

Le programme comporte : « *Prix et poids à l'unité et exemples analogues de quotients. Règle de trois.* » Les *Instructions* (IV, 8) donnent des indications assez précises sur la façon de comprendre et d'étudier ces deux notions. Cependant la règle de trois a pu être rattachée assez longtemps à la notion générale de proportionnalité et considérée comme le calcul d'une *quatrième proportionnelle*, dont la construction est encore, à juste titre, étudiée en géométrie élémentaire. Il y a peut-être quelque intérêt à commenter sommairement cette notion, en montrant sa liaison avec la conception préconisée par les *Instructions* (et avec la notion de multiplication).

Pour faciliter le langage, on utilisera pour ce commentaire l'exemple familier du prix d'une denrée, payée au poids. On examinera le sens et l'équivalence des deux formules :

le prix d'une denrée est proportionnel à son poids;
le prix d'un poids d'une denrée est égal au produit (de la multiplication) *par ce poids du prix de l'unité de poids.*

La proportionnalité peut être exprimée en disant que le *rapport* des prix de deux poids (quelconques) d'une même denrée est égal au rapport de ces poids.

Pour calculer, ou exprimer, le rapport de deux grandeurs de même espèce (ici des poids ou des valeurs), on cherche une *partie aliquote commune*, c'est-à-dire une grandeur contenue un nombre entier (exact) de fois dans chacune des grandeurs; le rapport est égal au quotient exact des deux nombres entiers ainsi trouvés (ou encore à la fraction qui les a pour termes). Cette construction du rapport, et par suite la notion de proportionnalité, déjà utilisée dans la géométrie grecque pour les longueurs, ne nécessite pas le choix préalable d'une unité (pour les grandeurs considérées).

Mais les grandeurs d'une même espèce peuvent être représentées par leurs mesures, en nombres décimaux, avec une même unité connue. Alors, *le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient* (exact) *de leurs mesures* (ceci indépendamment du choix de l'unité, de sorte que ce quotient est un nombre (fractionnaire) abstrait, qu'il n'y a pas lieu de faire suivre d'un nom d'unité).

Deux poids ayant, par exemple, pour mesures :

23,410 kg et 12,305 kg;

(1) On pourrait aussi utiliser le quotient de 1 par d, c'est-à-dire « l'*inverse* » du nombre d (considéré comme un quotient exact); en l'appelant d', les trois formules prennent la forme :

$$(a \times b) \times d'; \qquad (a \times d') \times b; \qquad a \times (b \times d').$$

Leur égalité résulte, plus évidemment peut-être, de l'associativité et de la commutativité de la multiplication (des quotients exacts) ou des nombres fractionnaires.

on peut prendre le gramme comme partie aliquote commune; il est contenu :

23 410 fois et 12 305 fois

dans les deux poids. Le rapport du premier poids au second est le quotient (exact) :

$$\frac{23\,410}{12\,305} \quad \text{égal à} \quad \frac{23{,}410}{12{,}305} \quad \text{ou} \quad \frac{23{,}410 \text{ kg}}{12{,}305 \text{ kg}}.$$

L'égalité résulte de la possibilité de diviser les deux termes du premier quotient par le même nombre 1 000, le rapport peut aussi être considéré comme le quotient des mesures en grammes.

La condition de proportionnalité peut alors être énoncée :

Pour deux poids (quelconques) *de denrées, le quotient de leurs prix est égal au quotient de leurs poids.*

En prenant pour le deuxième poids l'unité de poids, le quotient des poids est la mesure du premier poids et l'énoncé devient :

le quotient du prix d'un poids d'une denrée par le prix de l'unité de poids est égal à la mesure de ce poids :

$$\frac{\text{prix d'un poids}}{\text{prix de l'unité}} = \text{mesure du poids.}$$

Cette division exprime la multiplication :

$$\text{prix d'un poids d'une denrée} = \text{prix de l'unité} \times \text{poids.}$$

C'est la deuxième formule énoncée pour exprimer la proportionnalité (1).

On exprime parfois la proportionnalité du prix au poids (ou d'une grandeur à une autre grandeur), en disant sous une forme incorrecte, qu'on pense expressive : le prix devient deux, ou trois, ou ... fois plus grand ou plus petit, lorsque le poids devient deux, ou trois, ou ... fois plus grand ou plus petit.

Il serait peut-être préférable de dire que le prix d'un deuxième poids est construit avec le prix d'un premier poids, comme ce deuxième poids est construit lui-même avec le premier (par un partage en parties égales dont on prend un certain nombre).

On peut encore considérer (tout au moins en vue d'études ultérieures) la proportionnalité comme un cas particulier de la notion de fonction. Une grandeur, d'une certaine espèce, représentée par sa mesure y (par exemple le prix en F) est fonction d'une grandeur, en général d'une autre espèce, représentée par sa mesure x (par exemple un poids en kg), lorsqu'on sait calculer le nombre y, quand on connaît le nombre x (on sait qu'ordinairement ces nombres x et y ne sont plus seulement des nombres décimaux, ni même fractionnaires mais des nombres réels). Dans le cas de la proportionnalité, le calcul est exprimé par une multiplication :

$$y = a \times x;$$

on obtient le nombre y en multipliant par le nombre x, un certain nombre fixe a, qui est la mesure de la grandeur fonction qui correspond à l'unité de l'autre grandeur.

C'est une telle relation qui existe entre les deux côtés (de l'angle droit) des triangles rectangles qui ont les mêmes angles aigus, ou sont « *semblables* »; c'est-à-dire encore entre les coordonnées relativement à deux axes rectangulaires, d'une droite (ou seule-

(1) Cette deuxième formule est donc une conséquence de la première; elle peut paraître plus particulière, puisqu'elle ne s'applique pas à deux poids quelconques, mais seulement à un poids comparé à l'unité.

Il est facile de vérifier que la première en est cependant une conséquence; par exemple pour deux poids de 25 kg et 12 kg :

$$\frac{\text{prix de 25 kg}}{\text{prix de 12 kg}} = \frac{\text{prix du kg} \times 25 \text{ kg}}{\text{prix du kg} \times 12 \text{ kg}} = \frac{25 \text{ kg}}{12 \text{ kg}} = \frac{25}{12}.$$

Le troisième quotient est obtenu en divisant les deux termes du précédent par un même nombre, qui est le prix du kg; dans ce troisième quotient on peut supprimer l'indication de l'unité.

ment d'une demi-droite) issue de l'origine des axes. C'est le principe de la *représentation graphique* de cette fonction proportionnelle, appelée aussi *linéaire*. On la trouve dans certains ouvrages, plus spécialement ceux destinés à la classe de fin d'études.

17 • PROPORTIONNALITÉS USUELLES

Au point de vue de l'enseignement du cours moyen, on peut retenir que certaines grandeurs, mesurées avec des unités usuelles, ont des « valeurs » qui sont calculées par les règles de multiplication et de quotients :

$$\text{valeur (totale)} = \text{valeur de l'unité} \times \text{mesure};$$

$$\frac{\text{valeur (totale)}}{\text{valeur de l'unité}} = \text{mesure}; \qquad \frac{\text{valeur}}{\text{mesure}} = \text{valeur de l'unité}.$$

Les quotients sont, en principe, exacts; la mesure est aussi le nombre (décimal) d'unités. Dans certains cas, la valeur de l'unité a un nom particulier. Les principaux exemples sont donnés dans le tableau suivant (*Instructions*, Cours élémentaire, III, 13, et Cours moyen, IV, 8) :

Valeur totale	**Grandeur**	**Valeur de l'unité**
valeur marchande ou prix	nombre d'objets poids volume ou capacité longueur surface	prix d'un objet prix de l'unité
salaire	temps du travail	salaire horaire, journalier, mensuel, annuel
poids	volume longueur d'un fil	poids spécifique poids du m
poids, volume, prix d'une récolte	surface d'un champ	rendement
distance	temps de parcours	vitesse
volume	temps d'écoulement	débit
intérêt	temps de placement	intérêt annuel

Dans ces exemples, la valeur et la grandeur sont, en général, d'espèces différentes. Sous le nom de fractions, considérées comme des multiplicateurs abstraits et de pourcentages, le programme comprend des problèmes analogues, pour lesquels les grandeurs et les valeurs sont de même espèce; de sorte que les valeurs de l'unité sont des nombres abstraits qu'il n'y a pas lieu de faire suivre de l'indication d'une unité.

18 • VALEUR DE L'UNITÉ

Pour exprimer une « *valeur de l'unité* », il est utile de rappeler les deux unités employées (*Instructions*, IV, 8) par leurs abréviations. Par exemple, pour les prix, ou valeurs marchandes :

F par kg; F par g ; F par q ; F par t;
F par l ; F par hl; F par m^3; F par m^2; F par ha.

Les relations entre ces valeurs pour une même grandeur sont relativement simples, l'unité de valeur étant toujours la même et les unités de grandeur étant multiples ou sous-multiples décimaux; par exemple :

$$\text{F par g} = 1\,000 \text{ F par kg.}$$

Les maîtres estimeront s'il y a lieu d'exprimer certaines valeurs en centaines de F, ou en millions de F, la difficulté est l'absence actuelle d'abréviation.

Pour les poids spécifiques et les rendements, on peut avoir à faire un double changement d'unité, pour la grandeur et pour la valeur : par exemple passer des kg par a aux t par ha; c'est un calcul de quotients de puissances de 10 :

$$\text{une t par ha} = 1\,000 \text{ kg par } 100 \text{ a} = (1\,000 : 100) \text{ kg par a} = 10 \text{ kg par a.}$$

Ces changements d'unités peuvent faire l'objet d'exercices à l'occasion de problèmes simples. On reviendra ci-dessous sur la notion de poids spécifique en raison de son importance spéciale et sur les notions de vitesse et de débit, pour lesquelles les unités (heures, minutes, secondes) ne sont plus décimales.

La circulaire du 13 août 1952 indique la possibilité d'utiliser une barre inclinée au lieu du mot *par* (ce qui n'est qu'une abréviation minime) :

$$\text{g/cm}^3 \quad \text{au lieu de} \quad \text{g par cm}^3$$

Une valeur de l'unité est ainsi mesurée avec une unité qui est un quotient d'unités (ce que rappelle le mot *par*, ou la barre inclinée); les élèves ont aussi à utiliser quelques grandeurs dont l'unité est constituée par un produit d'unités; en dehors des surfaces en m^2 (ou $m \times m$) et des volumes en m^3 (ou $m \times m^2$), on peut citer les journées de travail qui sont le produit du nombre de jours par le nombre d'ouvriers, analogues aux Wh, qui sont le produit de la *puissance*, en watt, par le *temps*, en h, pendant lequel s'exerce cette puissance (1).

19 • PROBLÈMES DE RÈGLES DE TROIS

Quotient intermédiaire

Les *Instructions* (IV, 8) signalent que les problèmes usuels de règle de trois conduisent à la recherche d'un *quotient intermédiaire* (ce qui est le deuxième ou troisième mode de calcul) et suggèrent deux types de problèmes; le quotient intermédiaire étant, dans l'un un multiplicande, dans l'autre un multiplicateur.

1. — *Dans un lotissement on a acheté, pour le prix* (forfaitaire) *de 21 760 F, une parcelle de terrain d'une superficie de 128 m². On veut ensuite acheter une parcelle voisine, d'une superficie de 192 m²; le vendeur en demande le même prix au m²* (ou « *au prorata* » des surfaces). *Combien devra-t-on payer?*

Dans la première vente le prix du m^2 (qui n'avait peut-être pas été calculé, le prix total étant forfaitaire), est le quotient :

$$\frac{21\,760 \text{ F}}{128 \text{ m}^2} = \frac{21\,760}{128} \text{ F par m}^2.$$

Le prix de la deuxième parcelle sera calculé, en multipliant ce prix du mètre carré par la superficie nouvelle :

$$\frac{21\,760}{128} \text{ F par m}^2 \times 192 \text{ m}^2 = \frac{21\,760 \times 192}{128} \text{ F.}$$

(1) On peut encore y ajouter certains transports évalués en tonnes kilométriques, ou $t \times km$; produit (de la multiplication) du poids transporté (en t) par la longueur du transport (en km).

L'emploi des « journées de travail » évite notamment quelques fausses applications bien connues de la règle de trois.

C'est un calcul d'une règle de trois, qu'on peut faire par l'un des trois modes indiqués :

$$21\,760 : 128 = 170; \qquad 170 \times 192 = 32\,640;$$
$$192 : 128 = 1{,}5; \qquad 21\,760 \times 1{,}5 = 32\,640;$$
$$21\,760 \times 192 = 4\,177\,920; \qquad 4\,177\,920 : 128 = 32\,640.$$

Dans le premier calcul, on a d'abord cherché le prix de vente au m², qui est de 170 F par m².

Dans le second calcul on a cherché le « *rapport* » des superficies des deux terrains, qui est 1,5 (ou 150 %). Le rapport des prix est égal à ce rapport de superficies (c'est la première forme de la loi de proportionnalité).

Dans le troisième calcul, on a cherché le prix de 192 m², comme s'il était de 21 760 F par m², c'est-à-dire 128 fois sa vraie valeur; il convient donc de diviser ce produit intermédiaire par 128.

2. — *Le cidre doux vaut 25 F le litre. Il faut 160 kg de pommes pour faire un hectolitre de cidre. Quelle est la valeur du cidre qui pourrait être fabriqué avec une récolte de 30 q de pommes?*

L'énoncé emploie des unités différentes, on commence par les unifier, en prenant, par exemple, l'hl, le q et le F. Le cidre vaut 2 500 F par hl; il faut 1,6 q par hl. Comme on connaît le prix du cidre en volume, on calcule le volume de la récolte, c'est le quotient :

$$\frac{30 \text{ q}}{1{,}6 \text{ q par hl}} = \frac{30}{1{,}6} \text{ hl.}$$

La valeur du cidre est obtenue en multipliant le prix par hl par ce quotient :

$$2\,500 \text{ F par hl} \times \frac{30}{1{,}6} \text{ hl} = \frac{2\,500 \times 30}{1{,}6} \text{ F} = 46\,875 \text{ F.}$$

On aurait pu, aussi bien, calculer d'abord le prix du cidre produit par un quintal de pommes, puis le multiplier par le poids de pommes :

$$\frac{2\,500 \text{ F par hl}}{1{,}6 \text{ q par hl}} = \frac{2\,500}{1{,}6} \text{ F par q;}$$

$$\frac{2\,500}{1{,}6} \text{ F par q} \times 30 \text{ q} = \frac{2\,500 \times 30}{1{,}6} \text{ F} = 46\,875 \text{ F.}$$

Ces raisonnements justifient l'équivalence du troisième mode et du deuxième mode de calcul de la règle de trois. Le quotient intermédiaire a un intérêt dans les deux cas : il peut être utile de connaître le volume du cidre, en plus de sa valeur; il peut être également utile de connaître la valeur du cidre produit par un quintal de pommes. La justification du premier mode apparaît ici encore plus artificielle que dans le problème précédent.

Division par un quotient

On peut encore calculer par une règle de trois (une division et une multiplication) un problème dont la solution conduirait à diviser un nombre par un quotient.

Dans un champ de 5 a on a pu récolter 1,4 q de blé. En espérant le même rendement, quelle superficie faut-il ensemencer pour obtenir une récolte de 35 q?

Le rendement du blé, en q par a, est le quotient :

$$\frac{1{,}4 \text{ q}}{5 \text{ a}} = \frac{1{,}4}{5} \text{ q par a.}$$

On calcule la superficie nécessaire en divisant 35 q par ce rendement

$$35 \text{ q} : \frac{1{,}4}{5} \text{ q par a.}$$

Le signe : indique la division exacte (inverse de la multiplication).

Mais, au lieu de chercher le rendement, on peut calculer la superficie qui produirait un quintal de blé; c'est le quotient renversé :

$$\frac{5 \text{ a}}{1{,}4 \text{ q}} = \frac{5}{1{,}4} \text{ a par q};$$

il suffit ensuite de multiplier ce quotient par le poids de récolte espéré :

$$\frac{5}{1{,}4} \text{ a par q} \times 35 \text{ q} = \frac{5 \times 35}{1{,}4} \text{ a}.$$

On peut calculer cette règle de trois en la simplifiant :

$$\frac{5 \times 35}{1{,}4} = \frac{5 \times 350}{14} = \frac{5 \times 50}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ a}.$$

Cet exemple justifie la règle : *pour diviser un nombre par un quotient* (exact), *on peut le multiplier par le quotient renversé :*

$$a : \frac{b}{d} = a \times \frac{d}{b} \text{ ou } \frac{a \times d}{b}.$$

On peut aussi établir théoriquement cette règle, comme il a été fait ci-dessus pour l'équivalence des modes de calcul d'une règle de trois.

Calcul préalable du produit

Un problème de troc peut conduire directement au premier mode de calcul d'une règle de trois.

(D'après un examen d'entrée en sixième.) — *Un cultivateur échange avec son voisin 35,60 q de betteraves, contre des pommes de terre. Les betteraves valent 189 F par q et les pommes de terre 1 680 F par q. Quel est le poids de pommes de terre que devra recevoir le cultivateur?*

Les poids échangés doivent avoir la même valeur marchande; on sait calculer celle des betteraves; c'est le produit (de la multiplication) :

$$189 \text{ F par q} \times 35{,}60 \text{ q} = (189 \times 35{,}60) \text{ F}.$$

Le poids de pommes de terre est obtenu en divisant cette valeur par la valeur du q de pommes de terre :

$$\frac{(189 \times 35{,}60) \text{ F}}{1\,680 \text{ F par q}} = \frac{189 \times 35{,}60}{1\,680} \text{ q}$$

On remarquera que le calcul de cette règle de trois (épreuve d'un examen officiel) peut être fait par simplifications.

$$\frac{189 \times 35{,}6}{1\,680} = \frac{189 \times 356}{16\,800} = \frac{189 \times 89}{4\,200} = \frac{63 \times 89}{1\,400} = \frac{9 \times 89}{200} = \frac{801}{200} = 4{,}005$$

20 • CONCLUSION

Ces considérations sur la règle de trois ont été relativement développées pour montrer la liaison entre la conception préconisée par les *Instructions* et celle de la *quatrième proportionnelle* (recherche du terme inconnu d'une proportion — ou égalité de rapports — dont on connaît trois termes), qui peut encore être familière à beaucoup de maîtres.

On en retiendra sans doute que les élèves doivent être familiarisés avec l'usage (nous ne disons pas l'énoncé) des règles de calcul ou de technique, quelles que soient les justifications, concrètes ou théoriques, qui en sont données : *possibilité de multiplier, ou de diviser, par un même nombre les termes d'un quotient ; associativité dans un produit de trois facteurs; l'équivalence des trois modes de calcul d'une règle de trois* (numérique)*; division par un quotient.* Ces règles se retrouvent d'ailleurs dans le calcul des fractions et des pourcentages et elles sont essentielles dans la pratique (et dans la justification) du calcul algébrique.

Pour les problèmes, nous recommandons de ne pas abuser de la règle de trois et de ne pas fabriquer artificiellement des énoncés pour en trouver des applications. Dans bien des cas, la valeur du quotient intermédiaire, même si elle n'est qu'approchée, peut présenter un intérêt pratique et on peut la calculer de suite, pour l'introduire sous sa forme décimale, dans les calculs ultérieurs. Cependant il peut être bon de résumer la solution sous la forme de la règle de trois (quotient d'un produit par un nombre); elle peut constituer, après des simplifications, s'il s'en présente, un calcul utile de vérification. Elle peut aussi suggérer un autre mode de raisonnement.

Dans les exercices traités ci-dessus, on a pris soin de maintenir l'indication des unités, ce qui semble en accord avec l'esprit (sinon avec la lettre) de la circulaire de 1952 et ce qui accentue aussi les indications déjà données dans les *Instructions* (de 1945). (On remarquera que ces indications sont rendues plus facilement applicables par la place de l'abréviation de l'unité, à la suite du nombre décimal, et non plus dans le corps de ce nombre, après la virgule.)

On a montré que des problèmes de règles de trois peuvent se prêter à plusieurs interprétations de leurs calculs et constituer ainsi des justifications ou des illustrations des règles de technique. Il ne faut toutefois s'en servir qu'en restant dans le domaine de la vraisemblance pratique; c'est ainsi qu'il faut éviter de chercher le nombre de chapeaux qu'il est possible d'acheter avec 1 F (ou même avec 100 F), ou encore de faire travailler un ouvrier 27 h par jour.

V. LES FRACTIONS

Le programme ne comporte que l'étude de « fractions très simples de grandeurs ». Il entend sans doute ainsi la limiter très strictement aux applications de plus en plus restreintes qui en sont faites dans la vie courante; on n'utilise plus les fractions pour représenter des mesures (voir ci-dessus, n° 7) et même les fractions de grandeur sont souvent exprimées sous forme de pourcentages (ou de fractions décimales).

Cependant, dans certains livres d'arithmétique théorique, les fractions sont présentées comme des *mesures de grandeur* (une ou plusieurs parties de l'*unité*, divisée en parties égales), ou comme une extension de l'ensemble des nombres entiers (voir n° 9, *Intérêt des nombres fractionnaires*). Pour étayer éventuellement l'enseignement qui est précisé par le programme et recommandé par les *Instructions*, on a cru utile de donner en *annexe* de la présente étude une théorie sommaire des fractions, considérées comme des *opérateurs*, c'est-à-dire comme des indications d'opérations ou de transformations à effectuer sur des grandeurs.

Dans le présent paragraphe, on donnera quelques indications pour la pratique même de la classe, où leçons, exercices et problèmes, sur ce sujet, doivent garder un double caractère de simplicité ou même d'intuition et d'utilisation pratique. On a emprunté des exemples à des problèmes donnés récemment à des examens d'entrée en sixième. Certains d'entre eux apparaîtront sans doute artificiels; ce qui confirme que l'usage des fractions est de plus en plus rare dans la pratique effective.

Une des difficultés de l'étude des fractions est l'existence d'expressions synonymes, ou de sens très voisins :

partager une grandeur en n parties égales; prendre le n-ième de la grandeur; multiplier la mesure par la fraction $\frac{1}{n}$; diviser la mesure par n;

Prendre une fraction d'une grandeur; multiplier la mesure par la fraction;

problèmes inverses : construire une grandeur avec n parties égales; diviser la mesure par $\frac{1}{n}$; multiplier la mesure par n;

construire une grandeur dont on connaît une fraction; diviser la mesure par la fraction; multiplier par la fraction renversée ou inverse.

On a pris soin dans ce qui suit, comme dans la note annexe, de préciser l'équivalence de ces expressions.

21 • PARTAGES EN PARTIES ÉGALES

Le bord d'une bande de papier est un segment de droite; en pliant la bande en deux, on partage le segment en deux parties égales dont chacune est la *moitié* du segment primitif. En pliant en quatre, ou en huit, on obtient 4, ou 8, segments égaux dont chacun est le *quart*, ou le *huitième*, du segment primitif.

En tâtonnant, on peut plier une bande de papier en trois, ou partager le segment de droite formé par son bord, en 3 parties égales, ou 3 *tiers* (voir une construction dans l'Annexe-38).

Pour partager une motte de beurre en 5 parties de même poids (ou égales) on peut la *peser*, on trouve par exemple 350 g, on divise ce poids par 5 :

$$350 \text{ g} : 5 = 70 \text{ g}.$$

On partage à peu près la motte en 5 parts égales; puis on rectifie ce premier partage, en pesant chacune de ces parts et en ajoutant, ou retranchant, un peu de beurre à chacune d'elles de façon que leur poids soit bien de 70 g.

On peut préciser ces opérations et le vocabulaire qui les traduit :
en partageant une grandeur (longueur, poids, volume, valeur, prix...), en

2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6,...

parties égales, chacune *est*

la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le sixième,...

de la grandeur partagée.
On écrit ces expressions qui sont des *fractions* :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6},\ldots$$

le nombre au-dessus, qui, dans ces premiers exemples, est égal à 1, est le *numérateur*, le nombre du dessous est le *dénominateur*.

Quand on partage ainsi une grandeur et qu'on conserve *une* des parts, on dit qu'*on prend*

la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le sixième,...

de la grandeur. On dit aussi qu'on *multiplie cette grandeur* par

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6},\ldots$$

Il faut bien remarquer que le terme *multiplier* a alors un sens nouveau : *multiplier une grandeur par une fraction, c'est prendre la fraction de cette grandeur.*

Pour faire cette opération, on peut mesurer la grandeur, puis diviser cette mesure par le dénominateur. On écrit ou on dit :

la moitié de 15 cm, ou $15 \text{ cm} \times \frac{1}{2}$ ou $\frac{15 \text{ cm}}{2}$; ou 7,5 cm;

le cinquième de 350 g, ou $350 \text{ g} \times \frac{1}{5}$, ou $\frac{350}{5}$ g, ou 70 g.

Exemples d'après des problèmes d'examen d'entrée en sixième (extraits).

La longueur d'un rectangle est de 18 m, la largeur est le tiers de la longueur. Quelle est sa mesure ?

On prend le tiers de 18 m, ou on multiplie 18 m par $\frac{1}{3}$:

$$18 \text{ m} \times \frac{1}{3}, \qquad \text{ou } \frac{18 \text{ m}}{3}, \qquad \text{ou } 18 \text{ m} : 3, \qquad \text{ou } 6 \text{ m}.$$

Un cultivateur a récolté 17 q de pommes de terre, il veut en conserver le cinquième et vendre le reste. Quel poids conservera-t-il et quel poids pourra-t-il vendre ?

La quantité à conserver est obtenue « *en prenant le cinquième* » de la récolte, ou en multipliant le poids de cette récolte par $\frac{1}{5}$:

$$17 \text{ q} \times \frac{1}{5}, \qquad \text{ou } \frac{17 \text{ q}}{5}, \qquad \text{ou } 17 \text{ q} : 5 = 3{,}4 \text{ q}$$

Le poids à vendre est la différence :

$$17 - 3{,}4 = 13{,}6 \text{ q}.$$

On a creusé une fosse de 240 m³, la terre remuée augmente du sixième de son volume. Quel est le volume de terre obtenu ?

On calcule d'abord l'augmentation de volume, qui est le sixième de 240 m^3 :

$$240 \text{ m}^3 \times \frac{1}{6}, \qquad \text{ou } \frac{240 \text{ m}^3}{6}, \qquad 240 \text{ m}^3 : 6 = 40 \text{ m}^3.$$

Le volume de la terre est obtenu en additionnant cette augmentation au volume de la fosse :

$$240 + 40 = 280 \text{ m}^3.$$

On remarquera que dans les deux derniers exemples, on a non seulement calculé le produit de la multiplication de la grandeur par une fraction mais on s'est ensuite servi de ce produit pour faire une soustraction ou une addition et répondre à une autre question du problème.

22 • PROBLÈME INVERSE DU PARTAGE

En divisant ainsi une grandeur en parties égales, ou en *divisant* la mesure de cette grandeur par le dénominateur, on a fait l'opération *inverse* d'une multiplication :

2 fois la moitié = la quantité partagée
3 fois le tiers = id.
6 fois le sixième = id.

Ces considérations permettent de traiter le *problème inverse* du partage, c'est-à-dire trouver la quantité partagée quand on connaît la mesure de la part et le nombre de parts :

mesure de la part × nombre de parts = quantité partagée.

Exemples (d'après des problèmes d'examen d'entrée en sixième; extraits).

On pèse un vase rempli d'eau et on trouve 0,720 kg. On en vide un tiers et il ne pèse plus que 0,500 kg. Quel était le poids d'eau contenu dans le vase plein ?

L'énoncé n'indique pas comment on s'aperçoit qu'on a vidé un tiers du volume de l'eau. On peut supposer que le vase est une éprouvette cylindrique dont a repéré le tiers de la hauteur, à partir du haut.

Quoi qu'il en soit le poids du tiers de l'eau est égal à la différence :

$$0{,}720 - 0{,}500 = 0{,}220 \text{ kg.}$$

Le poids de l'eau est trois fois son tiers :

$$0{,}220 \text{ kg} \times 3 = 0{,}660 \text{ kg.}$$

La longueur d'un terrain est représentée, sur le plan cadastral, à l'échelle de $\frac{1}{2\,500}$ *par un segment de droite de 64 mm. Quelle est la longueur du terrain ?*

On peut calculer en m; le 2 500^e de la longueur est 0,064 m :

$$\text{longueur} \times \frac{1}{2\,500}, \quad \text{ou} \quad \frac{\text{longueur}}{2\,500}, \quad \text{est égal à } 0{,}064 \text{ m.}$$

La longueur est 2 500 fois 0,064 m, ou 0,064 m × 2 500 = 160 m.

On a convenu de dire que prendre une fraction est une *multiplication*; on est amené à dire que le problème inverse est une *division* :

multiplier par $\frac{1}{\text{dénominateur}}$, c'est diviser par le dénominateur;

diviser par $\frac{1}{\text{dénominateur}}$, c'est multiplier par le dénominateur.

23 • PRENDRE UNE FRACTION D'UNE GRANDEUR

On utilise des fractions dont le numérateur n'est pas égal à 1 (voir le *Vocabulaire*, Note annexe. — 37).

Je dois payer, en un an, une dette par payements mensuels égaux, c'est-à-dire par douzièmes. Après 5 mois :

J'ai payé : .... 5 douzièmes ou $\frac{5}{12}$;

il reste à payer : .... 7 douzièmes ou $\frac{7}{12}$.

Prendre la fraction $\frac{5}{12}$, ou $\frac{7}{12}$, d'une première grandeur, c'est partager cette grandeur en 12 parties égales et former une deuxième grandeur avec 5, ou avec 7 de ces parties. On dit encore qu'on *multiplie* la première grandeur par la fraction et que le produit est la deuxième grandeur :

J'ai payé .... dette × $\frac{5}{12}$;

il reste à payer................ dette × $\frac{7}{12}$.

Pour calculer le produit de cette multiplication par une fraction, on divise la mesure de la grandeur par le dénominateur de la fraction, puis on multiplie le quotient obtenu par le numérateur. C'est un calcul de règle de trois :

$$\frac{\text{dette} \times 5}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{dette} \times 7}{12}$$

Exemple (d'après un problème d'examen d'entrée en sixième).

Une ménagère a payé une robe 5 600 F, puis elle a acheté un tablier dont le prix est les 2 septièmes de celui de la robe. Quel est le prix de ce tablier ?

On calcule le septième du prix de la robe en divisant 5 600 F par 7; puis on multiplie ce septième par 2 :

$$\frac{5\,600\text{ F}}{7}\times 2 \quad \text{ou} \quad 5\,600\text{ F}\times\frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{5\,600\text{ F}\times 2}{7} = 1\,600\text{ F}.$$

Exemple (usuel). *La farine donne les 6 cinquièmes de son poids de pain. Quel poids de pain obtiendra un boulanger avec 80 kg de farine?*

On multiplie 80 kg par $\frac{6}{5}$;

$$80\text{ kg}\times\frac{6}{5}, \text{ ou } \frac{80\text{ kg}\times 6}{5} = 96\text{ kg}.$$

Dans le premier exemple, le prix du tablier est inférieur au prix de la robe. Dans le deuxième, le poids du pain est supérieur au poids de la farine (en raison de l'eau ajoutée).

Une fraction est plus petite ou plus grande que 1, suivant que, dans la multiplication par cette fraction, *la grandeur produit est plus petite ou plus grande que la grandeur multipliée* (elles sont de même espèce) :

$$\frac{2}{7} \text{ est plus petit que } 1, \qquad \frac{6}{5} \text{ est plus grand que } 1.$$

Ces exemples rendent intuitive la règle qui résulte de cette définition.

Une fraction est plus petite ou plus grande que 1, suivant que son numérateur est plus petit ou plus grand que son dénominateur (dans la grandeur produit il y a moins de parties ou plus de parties que dans la grandeur multipliée).

24 • FRACTION RENVERSÉE

Renverser une fraction, c'est permuter ses termes, c'est-à-dire prendre pour numérateur et dénominateur d'une nouvelle fraction le dénominateur et le numérateur de la fraction considérée :

$$\frac{4}{5} \text{ et } \frac{5}{4}; \qquad \frac{2}{3} \text{ et } \frac{3}{2}.$$

On retrouve la première fraction en renversant la deuxième. C'est pourquoi on dit parfois que : *les deux fractions sont inverses* l'une de l'autre.

L'utilité de la fraction renversée, ou des fractions inverses, est la règle suivante :

lorsqu'on passe d'une première grandeur à une deuxième (de même espèce) *en la multipliant par une fraction, on retrouve la première en multipliant la deuxième par la fraction renversée.*

On peut illustrer et justifier (partiellement) cette règle par un exemple usuel emprunté aux *Instructions* (IV, 10).

Le blé contient les quatre cinquièmes de son poids de farine. C'est dire que le poids de farine est obtenu en *prenant* les $\frac{4}{5}$ du poids du blé. Avec la convention de la multiplication :

$$\textit{poids de farine} = \textit{poids de blé} \times \frac{4}{5}.$$

Il est équivalent de dire que :

pour 5 parties de blé, il y a 4 parties de farine;

ou encore que le cinquième du poids du blé est égal au quart du poids de farine :

$$\textit{poids de farine} \times \frac{1}{4} = \textit{poids de blé} \times \frac{1}{5}.$$

Pour remonter de la farine au blé, il faut partager le poids de farine en quatre et prendre cinq des parties obtenues :

$$\textit{poids de blé} = \textit{poids de farine} \times \frac{5}{4}.$$

Les fractions $\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{4}$ sont inverses : *chacune est obtenue en renversant l'autre.*

Retrouver un multiplicande quand on connaît le produit, c'est faire l'opération inverse d'une multiplication, c'est-à-dire une division. Avec cette convention, la règle de recherche du multiplicande peut être énoncée de façon plus condensée :

Pour diviser une grandeur par une fraction, on peut multiplier cette grandeur par la fraction renversée.

Exemple (d'après un problème d'examen d'entrée en sixième).

Dans une cuve parallélépipédique, la hauteur du vin est de 1,50 m et le niveau supérieur est aux 2 tiers de la hauteur totale. Quelle est cette hauteur totale ?

L'énoncé indique qu'en multipliant la hauteur totale par $\frac{2}{3}$ on obtient 1,50 m :

$$\text{hauteur totale} \times \frac{2}{3} = 1{,}50 \text{ m}.$$

On obtient la hauteur totale en *divisant* par $\frac{2}{3}$ donc en *multipliant* par $\frac{3}{2}$:

$$\text{hauteur totale} = 1{,}50 \text{ m} \times \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1{,}50 \text{ m} \times 3}{2} = 2{,}25 \text{ m}.$$

La règle comprend comme cas particulier celle qui a déjà été donnée pour une fraction de numérateur égal à 1 :

$$\text{pour diviser par } \frac{1}{2\,500}, \text{ on peut multiplier par } \frac{2\,500}{1} \text{ ou } 2\,500.$$

25 • ÉGALITÉ DES FRACTIONS

On se conformera à l'esprit du *Programme* et des *Instructions* en se bornant à donner les règles suivantes et en les illustrant et les justifiant partiellement par des exemples simples.

On peut multiplier les deux termes d'une fraction par un même nombre entier ou, inversement, diviser ses deux termes par un diviseur (commun)*; la nouvelle fraction est égale à l'ancienne* (voir la condition générale d'égalité, note annexe 40).

On peut remplacer deux (ou plusieurs) *fractions par des fractions égales qui ont des dénominateurs égaux* (ou un même dénominateur); pour cela on peut multiplier les deux termes de chacune des fractions par le dénominateur de l'autre.

On peut commenter et justifier (partiellement) la première règle par un exemple usuel (emprunté aux *Instructions*) qui est au surplus une liaison entre fractions et pourcentages.

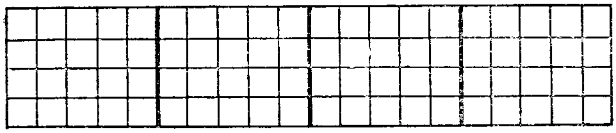
Le blé donne les 80 centièmes de son poids de farine (on dit aussi 80 pour cent ou 80 %), il est équivalent de dire que :

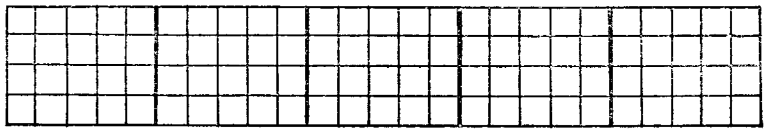
100 parties de blé donnent 80 parties de farine.

Mais 100 et 80 sont tous deux des multiples de 20 (qui est un diviseur commun) :

100 = 5 fois 20 parties; 80 = 4 fois 20 parties.

Le cinquième du poids de blé et le quart du poids de farine sont égaux, puisque tous deux sont composés des mêmes 20 parties.





$$\text{poids de blé} \times \frac{1}{5} = \text{poids de farine} \times \frac{1}{4}.$$

Pour obtenir le poids de farine, en partant du poids de blé, on peut donc indifféremment le multiplier par $\frac{80}{100}$ ou $\frac{4}{5}$:

$$\text{poids de blé} \times \frac{80}{100} = \text{poids de blé} \times \frac{4}{5}.$$

Les fractions :

$$\frac{4}{5} \text{ et } \frac{4 \times 20}{5 \times 20} = \frac{80}{100}$$

sont égales, en ce sens que la multiplication d'une même grandeur (poids de blé) par chacune donne des produits égaux (poids de farine).

La deuxième règle est une conséquence de la précédente. On peut se borner à en faire d'abord de simples exercices d'applications de calcul, du type de :

$$\frac{2}{3} \text{ et } \frac{4}{5} \quad \text{sont égales à} \quad \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \quad \text{et} \quad \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}.$$

On peut illustrer cette transformation par le tracé de 2 rectangles égaux dont on construit les 10 quinzièmes de l'un et les 12 quinzièmes de l'autre, et dont on vérifie qu'il était équivalent de prendre les 2 tiers et les 4 cinquièmes.

On peut encore faire réduire au dénominateur 60 des fractions de dénominateurs : 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 10...

26 • COMPARAISON, ADDITION ET SOUSTRACTION DE FRACTIONS

On peut se borner à énoncer la règle suivante de comparaison ou d'opérations de fractions réduites préalablement au même dénominateur :

On compare, ou on additionne ou on soustrait des (nombres de)

demis..., tiers..., sixièmes...,

comme on compare ou additionne ou soustrait des unités (voir les énoncés généraux, Note annexe. — 41).

Exemple (usuel) de comparaison. *Pour une espèce de betteraves, 5 000 kg ont donné 625 kg de sucre; pour une autre espèce, 350 kg ont donné 50 kg de sucre. Quelle est l'espèce qui, pour un même poids de betteraves, donne le plus de sucre (ou a le meilleur rendement) ?*

Les poids de sucre sont donnés par les fractions (des poids de betteraves) :

$$\frac{625}{5\,000} \quad \textbf{et} \quad \frac{50}{350}.$$

Pour chacune d'elles le dénominateur est un multiple du numérateur; on obtient des fractions égales en divisant, dans chacune d'elles, les deux termes par le numérateur :

$$\frac{625 : 625}{5\,000 : 625} = \frac{1}{8} \qquad \frac{50 : 50}{350 : 50} = \frac{1}{7}.$$

La seconde fraction est plus grande, car en divisant par 7 un poids de betteraves, on obtient un poids plus grand que le quotient du même poids par 8.

On peut réduire ces deux fractions au même dénominateur qui sera le produit : $7 \times 8 = 56$:

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 7}{8 \times 7} = \frac{7}{56}; \qquad \frac{1}{7} = \frac{1 \times 8}{7 \times 8} = \frac{8}{56}.$$

On compare, comme il a été dit, ces 56-èmes : la 2e espèce contient en plus de la première, un 56-ème de son poids de sucre :

$$\frac{8}{56} - \frac{7}{56} = \frac{8-7}{56} = \frac{1}{56}.$$

Pour l'addition et la soustraction, les *Instructions* signalent qu'il est peut-être plus avantageux d'utiliser des nombres entiers proportionnels, qui constituent un support concret, au moins pour remplacer les calculs préalables sur les fractions. Elles traitent un exemple; on additionne et on soustrait d'abord des nombres proportionnels aux quantités données, on en déduit la fraction de la quantité (de viande) à acheter relativement à la quantité utilisable (viande désossée et dégraissée) qui est nécessaire.

Exemple (emprunté à un problème d'examen d'entrée en sixième). *Un élève achète chez un libraire : 5 crayons, 1 porte-plume et 1 compas. Le prix du compas est égal à 3 fois celui du porte-plume et 3 crayons valent autant qu'un porte-plume. L'élève a payé en tout 374 F. Quels sont les prix d'un crayon, du porte-plume et du compas ?*

Pour simplifier l'écriture, numérotons ces prix : 1er prix, celui du crayon; 2e prix, celui du porte-plume; 3e prix, celui du compas. Traduisons les indications de l'énoncé en examinant les 1er et 3e prix au moyen du 2e multiplié par une fraction convenable :

$$3^e \text{ prix} = 2^e \text{ prix} \times 3; \qquad 1^{er} \text{ prix} = 2^e \text{ prix} \times \frac{1}{3}.$$

Les prix des 3 quantités achetées sont :

$$2^e \text{ prix} \times 3; \qquad 2^e \text{ prix} \times 1; \qquad 2^e \text{ prix} \times \frac{5}{3}.$$

Réduisons les fractions ($3 = \frac{3}{1}$ et $1 = \frac{1}{1}$) au même dénominateur qu'on peut prendre égal à 3 :

$$\frac{3 \times 3}{1 \times 3} = \frac{9}{3}; \qquad \frac{1 \times 3}{1 \times 3} = \frac{3}{3}.$$

Additionnons les tiers, la valeur de l'achat était égale à : $9+3+5 = 17$ tiers du 2e prix.

$$2^e \text{ prix} \times \frac{17}{3} = 374 \text{ F}.$$

On obtient le 2e prix en divisant 374 F par $\frac{17}{3}$:

$$374 \text{ F} \times \frac{3}{17} = \frac{374 \times 3}{17} = 66 \text{ F};$$

les 1er et 3e prix sont :

$$66 \text{ F} \times 3 = 198 \text{ F}; \qquad 66 \text{ F} \times \frac{1}{3} = 22 \text{ F}$$

Pour traiter l'exemple en utilisant des nombres entiers proportionnels, on peut remarquer que les indications de l'énoncé ne comportent qu'une division par 3. On peut supposer :

pour le 2e prix : 3 parties (ou 3 F).

Les prix des 3 quantités achetées sont alors :

$$5 \text{ crayons} : 3 \times \frac{5}{3} = 5, \qquad \text{porte-plume} : 3, \qquad \text{compas} : 3 \times 3 = 9;$$

donc pour l'achat complet : $5+3+9 = 17$ parties.

Les fractions du prix total sont donc :

$$1^{\text{er}} : \frac{1}{17} \qquad 2^{\text{e}} : \frac{3}{17} \qquad 3^{\text{e}} : \frac{9}{17}$$

et ces prix sont :

$$374 \text{ F} \times \frac{1}{17} = 22 \text{ F}; \qquad 374 \text{ F} \times \frac{3}{17} = 66 \text{ F}; \qquad 374 \text{ F} \times \frac{9}{17} = 198 \text{ F}.$$

En réalité, l'énoncé donné à l'examen indiquait l'achat de 3 crayons (au lieu de 5). Les fractions à additionner n'étaient par suite que des multiplicateurs entiers :

$$2^{\text{e}} \text{ prix} \times 3; \qquad 2^{\text{e}} \text{ prix}; \qquad 2^{\text{e}} \text{ prix} \times \frac{3}{3} = 2^{\text{e}} \text{ prix}.$$

La solution pouvait être exposée sans faire intervenir des fractions. L'énoncé n'en restait pas moins assez artificiel.

VI. LES POURCENTAGES

27 • FRACTIONS DÉCIMALES

Une fraction est décimale (1) si elle a comme dénominateur une puissance de 10; elle peut être écrite sous la forme habituelle d'une fraction, ou sous la forme d'un *nombre décimal* :

$$\frac{80}{100} \text{ ou } 0{,}8; \qquad \frac{125}{100} \text{ ou } 1{,}25.$$

Ce nombre décimal est, bien entendu, *abstrait*, c'est-à-dire est indépendant des unités choisies. Il ne représente pas une grandeur, mais un « multiplicateur », ou un opérateur, qui transforme une grandeur (quelle que soit l'unité qui sert à la mesurer) en une grandeur de même espèce.

Il y a bien équivalence entre la fraction et le nombre : pour multiplier par 80 un nombre (ou une grandeur) préalablement divisé par 100 (ou partagé en 100 parties égales), on peut multiplier directement ce nombre (ou la mesure de cette grandeur) par 0,80. La forme fractionnaire présente peut-être l'avantage d'une simplification, éventuellement possible :

$$\frac{80}{100} = \frac{4}{5}; \qquad \frac{125}{100} = \frac{5}{4}.$$

(Sous la seconde forme, il est peut-être plus visible que les deux nombres abstraits sont inverses l'un de l'autre; leur produit est égal à 1. Mais on peut se demander

(1) On remarquera que ce terme n'est pas employé, ni dans les programmes officiels (cours moyen, cours supérieur, classe de fin d'études) ni dans les *Instructions*. On peut d'ailleurs se demander si une fraction, égale à une fraction décimale, par exemple 4 cinquièmes, est encore une « fraction décimale », ou seulement une « expression » d'un nombre décimal.

s'il n'est pas plus simple de multiplier ou de diviser par 0,8 plutôt que de prendre les 4 cinquièmes ou les 5 quarts; voir les *Instructions*, IV, 9.)

Il y a des fractions qui ne sont pas égales à une fraction décimale (ou n'ont pas une valeur décimale exacte). On sait que ce sont celles qui, réduites à leur plus simple expression, ont un dénominateur qui contient d'autres facteurs premiers que 2 et 5. Le programme suggère de limiter, dans les exercices et problèmes, l'usage de ces fractions aux tiers et aux soixantièmes, donc aussi aux fractions de dénominateur diviseur de 60.

28 • EXEMPLE DE « POUR CENT »

Une fraction décimale est souvent utilisée sous le nom et la forme de *pour cent*, c'est-à-dire d'un quotient par 100, d'un nombre qui peut être décimal (de sorte qu'en toute rigueur ce quotient n'est pas une fraction; c'est toujours, bien entendu, un multiplicateur abstrait). C'est une notation fréquente et habituelle; mais il ne faut y voir qu'une notation, qui serait, tout aussi correctement et tout aussi clairement, remplacée par un nombre décimal (notamment si le taux est lui-même un nombre décimal) :

$$3{,}35\ \%\ \text{peut être écrit}\ \frac{335}{10\ 000}\ \text{ou}\ 0{,}0335.$$

On peut appeler *taux* le nombre (entier ou décimal) de centièmes (ici 3,35).

L'habitude des pour cent est maintenant très familière; ils sont employés dans un grand nombre de circonstances :

retenue ou majoration sur un traitement ou un salaire; remise, rabais ou ristourne sur un prix de vente; bénéfice ou perte sur un prix de revient; frais ou charges sur un prix d'achat ou de location; subvention sur une dépense exceptionnelle; commission ou honoraires sur un chiffre d'affaires; baisse ou hausse sur des prix de vente; impôt sur un revenu; intérêt rapporté par un capital placé, ou dû sur une dette; escompte...

proportions dans un mélange ou dans une transformation physique ou chimique : eau salée, confitures, recette de cuisine, titres d'un engrais, sucre fourni par des betteraves, pulpe de fruits, crème ou beurre fabriqué avec du lait, farine et pain obtenu avec du blé, vin d'une vendange, perte ou déchet dans un stock, os et graisse dans une viande, métal extrait d'un minerai...

On emploie encore couramment des fractions obtenues en simplifiant les fractions décimales (1). C'est ainsi que :

2 % est 1 cinquantième;	4 % est 1 vingt-cinquième;
5 % est 1 vingtième;	10 % est un dixième;
15 % est 3 vingtièmes;	20 % est 1 cinquième;
25 % est un quart;	50 % est 1 demi;
1 tiers est environ 33 %;	2 tiers est environ 66 %.

Le *Programme* place l'étude des pourcentages avant celle des fractions. En fait, leur calcul en est plus simple, puisque l'écriture des « pour cent » est déterminée alors qu'un nombre fractionnaire a diverses formes possibles et qu'il faut même user de cette diversité pour additionner et soustraire des fractions (en les réduisant au même dénominateur).

On se bornera ici à donner quelques indications sommaires sur l'usage des « pour cent » et la technique de leur calcul; les justifications peuvent résulter de l'étude préalable des fractions (dont les « pour cent » sont des cas particuliers), ou être établies directement. Les *Instructions* se bornent à préciser que les « pour cent » sont des multiplicateurs abstraits (comme les fractions) et à *recommander l'usage de leur forme décimale.*

(1) On sait qu'au XVII[e] siècle, on représentait l'intérêt par une fraction de numérateur égal à 1 : le *denier vingt* était 1 F d'intérêt pour 20 F de capital, c'est-à-dire 1 vingtième ou 5 %. J'ai encore relevé dans des problèmes à l'examen d'entrée en sixième les fractions : 1 cinquième; 1/10; 1/4; 1/20; 1/3 et même 7/13.

29 • MULTIPLIER UNE GRANDEUR PAR UN « POUR CENT »

(Voir *Fractions*, V, 20.) — Les expressions suivantes sont équivalentes :

Sur son traitement brut, un fonctionnaire subit une retenue de 6 % (pour la constitution de sa retraite);

le rapport de la retenue au traitement brut est de $\frac{6}{100}$;

sur chaque centaine de F de traitement brut, on retient 6 F. En conséquence, la retenue est calculée par la règle de trois :

$$\frac{\text{traitement brut} \times 6}{100}$$

Les trois modes de calcul (IV, 15) (1) sont :

on multiplie le traitement brut par 6 et, dans le produit obtenu, on déplace la virgule de deux rangs vers la gauche;

on multiplie 6 F par le traitement brut exprimé en centaines de F;

on multiplie le traitement brut par 0,06 (valeur décimale du %).

30 • DIVISER PAR UN « POUR CENT »

(Voir *Fractions*, V, 24.). — C'est l'opération inverse de la multiplication précédente : on connaît un pour cent et le produit de la multiplication d'une grandeur par ce pour cent; on veut calculer la grandeur :

On veut obtenir un revenu annuel de 30 000 F en plaçant un capital à 4 % d'intérêt annuel. Quel capital faut-il placer?

Le produit (de la multiplication) du capital par 0,04 doit être égal à 30 000 F; le capital est le quotient de la division de 30 000 F par 0,04 :

$$30\,000 \text{ F} : 0{,}04 = 750\,000 \text{ F}.$$

Vérification :

$$4 \text{ F} \times 7\,500 \text{ centaines de F} = 30\,000 \text{ F}.$$

On aurait pu aussi diviser par $\frac{4}{100}$, donc multiplier par $\frac{100}{4}$; c'est un calcul d'une règle de trois (qui peut être simplifiée) :

$$\frac{30\,000 \times 100}{4} = 30\,000 \times 25 = 750\,000.$$

(Ceci revient à remplacer 4 % par 1 vingt-cinquième; on pourra aussi comparer avec la règle bien connue de calcul mental de multiplication par 25.)

31 • DÉTERMINATION D'UN « POUR CENT »

Quand on connaît des nombres (entiers) proportionnels, donc la fraction qui les a pour termes, on obtient le « pour cent » en calculant la valeur décimale de la fraction, c'est-à-dire en divisant les nombres proportionnels. Le taux du « pour cent » est le nombre (entier ou fractionnaire) de centièmes de cette valeur décimale.

Sur une récolte de 9 q de pommes de terre, on a trouvé 34,2 kg de pommes de terre gâtées. Quel est le pourcentage du déchet?

(1) Le maître estimera sans doute que l'une de ces techniques suffit; la dernière est sans doute la plus commode.

On exprime les deux poids avec la même unité, par exemple des kg; on divise le poids du déchet par le poids de la récolte :

$$34{,}2 \text{ kg} : 900 \text{ kg} = 0{,}038; \text{ ou } 3{,}8\ \%.$$

On aurait le même résultat en divisant 0,342 q par 9 q. On verra aisément comment on peut utiliser cette règle dans la solution de problèmes plus complexes, soit qu'ils nécessitent des calculs préalables, soit qu'il faille utiliser le « pour cent » pour répondre à une question complémentaire.

32 • ADDITION ET SOUSTRACTION DE « POUR CENT »

(Voir *Fractions*, V, 26.) — Le sens et l'utilité de l'addition et de la soustraction de « pour cent » résulte encore de la propriété de *distributivité* de la multiplication, relativement à l'addition dans le multiplicateur (qui est cette fois un « pour cent », ou le résultat d'une opération sur les pour cent). On peut résumer comme suit à la fois la technique et l'emploi de ces opérations.

Pour additionner ou soustraire des « pour cent », on fait cette opération sur les taux; il est équivalent de la faire sur les valeurs décimales :

$$6\ \% + 2{,}5\ \% = 8{,}5\ \%; \qquad \text{ou } 0{,}06 + 0{,}025 = 0{,}085.$$

Il est équivalent de multipler une grandeur par une somme (ou une différence) *de « pour cent », ou de multiplier cette grandeur par chacun des « pour cent » et d'additionner* (ou de soustraire) *les résultats.*

Exemples : un traitement brut subit une retenue de 6 %, ou 0,06; le traitement net est obtenu en multipliant le brut par :

$$1 - 0{,}06 = 0{,}94 \qquad \text{ou } 100\ \% - 6\ \% = 94\ \%.$$

Dans une épicerie, le prix de revient d'un tonneau de vin a été de 9 600 F. On veut faire un bénéfice de un quart. Que devra être le prix de vente total?

$$1 \text{ quart est égal à } 1 : 4 = 0{,}25, \qquad \text{ou } 25\ \%.$$

Le pourcentage du prix de vente désiré est : $1 + 0{,}25 = 1{,}25$, ou 125 %. On multiplie le prix d'achat par 1,25 : $9\,600 \text{ F} \times 1{,}25 = 12\,000 \text{ F}$. On aurait pu, aussi bien, multiplier par 5 quarts.

Bien entendu, le problème peut être complété par la recherche du prix de vente du litre, ou de la bouteille de 0,75 l, en tenant compte du volume du tonneau et du déchet.

De nombreux ouvrages appliquent ces considérations et ces calculs à des problèmes d'intérêt, de taux d'un placement, de rentes, d'obligations, d'escompte. Cependant le programme indique seulement « application du pourcentage à l'*intérêt simple* ». Par contre, le programme de la classe de fin d'études comporte des applications plus nombreuses, empruntées toutefois à la vie familiale, au commerce, aux activités agricoles et industrielles.

VII. TEMPS ET DURÉES

33 • MESURE D'UNE DURÉE

Le terme de « *nombres complexes* » n'est ni dans le *Programme*, ni dans les *Instructions*, sans doute pour marquer qu'il n'y a pas lieu d'attacher trop d'importance à cette notion qui n'est plus utilisée que dans les mesures de durées. Il est seulement précisé qu'il faut étudier l'addition et la soustraction des mesures de temps, en heures, minutes et secondes : on peut y ajouter, semble-t-il, quelques problèmes de durées, en jours et heures.

On a déjà indiqué (Cours élémentaire, IV, 12) qu'on mesure un temps, ou plus exactement une durée, par la différence de deux époques, lues sur une horloge (en heures, minutes et secondes), ou sur un chronomètre. La première opération à étudier serait donc la soustraction. Sans insister sur cette considération, on peut admettre qu'on sait évaluer ou prévoir (indicateurs de moyens de communication; calcul avec une vitesse probable) des durées; elles sont données par *une somme*, qui est appelée un nombre complexe, de deux ou trois nombres, indiquant des unités différentes :

nombre d'heures + nombre de minutes + nombre de secondes;

1 mn = 60 s; 1 h = 60 mn = 3 600 s.

Ces relations permettent de supposer que, dans l'expression d'une durée, les nombres de secondes et de minutes indiqués sont, tous deux, inférieurs à 60 (sinon on fait un report (comme il est dit ci-dessus) des soixantaines en trop, en unités d'ordre supérieur).

En plus de ces premiers nombres (complexes), on peut considérer accessoirement :

nombre de jours + nombre d'h + nombre de mn.

Il faut prendre soin de faire utiliser les abréviations légales (circulaire du 13 août 1952), h; mn; s; les signes ' et '', encore conservés pour les angles, ne doivent pas être employés pour les durées.

On pourrait rattacher le calcul des nombres complexes à celui des nombres fractionnaires, à condition d'utiliser aussi ces nombres pour désigner des mesures. Ce serait contraire à l'esprit et à la lettre du programme. Au surplus, la technique ne s'en trouverait pas simplifiée, ni dans sa pratique, ni dans son application.

34 • NOMBRE COMPLEXE ET NOMBRE ENTIER

On passe d'un nombre (ou d'une mesure) décimal à un nombre entier par un changement d'unité et un déplacement de la virgule (ci-dessus, III, 11). C'est un problème analogue, mais moins simple, qui se pose pour un nombre complexe. On change encore d'unité, mais le calcul du nombre avec la nouvelle (ou les nouvelles) unité comporte des multiplications et des divisions par 60 (et éventuellement par 3 600). Toutefois le nombre de cas possibles est plus restreint.

Durée en heures et minutes

On peut passer des deux unités à une seule qui est la minute. Il suffit d'additionner au nombre de minutes, le produit (de la multiplication) de 60 mn par le nombre d'heures :

4 h et 25 mn = 60 mn × 4 + 25 mn = 265 mn.

(Dans le nombre complexe, on met indifféremment et, ou +, ou aucun signe).

Inversement, une durée étant exprimée en mn, on la divise par 60 mn; le quotient est le nombre de h et le reste le nombre de mn, du nombre complexe (avec deux unités) :

$$\text{432 minutes} \left\{ \begin{array}{l} 432 : 60 = 7, \text{ reste } 12 \text{ (inférieur à 60);} \\ 432 \text{ mn} = 7 \text{ h } 12 \text{ mn.} \end{array} \right.$$

(On a ainsi une illustration et une application intéressantes de la division des nombres entiers, avec un reste éventuel.)

Durée en heures, minutes et secondes

On passe de trois unités h, mn, s à deux, mn et s; comme il vient d'être dit, sans changer le nombre de secondes.

Pour passer à trois unités, il suffit d'ajouter au nombre de secondes le produit de 60 s par le nombre de mn, déjà obtenu. On peut faire le calcul, sans intermédiaire, en multipliant 3 600 s par le nombre de h; 60 s par le nombre de mn, et en ajoutant ces deux nombres et celui des secondes :

$$\text{3 h 45 mn 15 s} \left\{ \begin{array}{rr} 3\,600 \text{ s} \times 3 = & 10\,800 \\ 60 \text{ s} \times 45 = & 2\,700 \\ & 15 \\ \hline & 13\,515 \text{ s.} \end{array} \right.$$

Le problème inverse : exprimer en h, mn et s, une durée exprimée en secondes peut se faire avec deux divisions successives par 60 : on extrait le nombre de minutes, en divisant par 60, on obtient la durée exprimée avec deux unités mn et s :

13 315 : 60 = 225, reste 15; 13 315 = 225 mn 15 s.

On exprime ensuite 225 mn en heures et minutes :

225 : 60 = 3, reste 45; 225 mn = 3 h 45 mn.

On pourrait tout aussi bien diviser par 3 600, puis le reste par 60; le premier quotient donne les heures, le second donne les mn et le reste final donne les s.

On calcule de même le passage d'un temps, en jours et heures, à un temps en h; et inversement. On multiplie ou on divise par 24.

35 • ADDITION ET SOUSTRACTION DE NOMBRES COMPLEXES

On peut additionner et soustraire des durées, exprimées avec deux ou trois unités, directement, sans les transformer en des nombres entiers avec une seule unité. On s'inspire de ce qui a été fait pour les nombres écrits dans le système décimal, qu'on peut considérer comme écrits avec autant d'unités (multiples et sous-multiples décimaux) qu'il y a de chiffres. Le mécanisme de la retenue se fait d'une façon analogue avec des soixantaines, au lieu de dizaines. Les ouvrages indiquent ordinairement des dispositions ingénieuses pour illustrer ce mécanisme.

Reports	1h	1mn	
NOMBRES A ADDITIONNER	1h 1h	47mn 33mn	43 s 51 s
1ers totaux	3h	81mn	94 s
RÉSULTATS	3h	1h 21mn	1mn 34 s

5 h - 1h	38 mn 1mn	34 s
	37 mn + 60 mn	34 s + 60 s
4 h — 4 h	97 mn 55 mn	94 s 43 s
0 h	42 mn	51 s

Il y a peut-être quelque intérêt à remarquer que cette technique des opérations sur des nombres avec 3 unités était employée pour les opérations sur les monnaies anciennes. Par exemple, pour la livre de 10 sols et le sol de 12 deniers, je rapporte les conseils d'un auteur d'arithmétique (il s'agit d'une addition de 8 nombres) :

« ... *pour une plus grande facilité à ceux qui apprennent à compter il faut seulement, de 12 en 12 deniers poser un point à côté qui marque un sol, autant de points seront autant de sols qu'il faut retenir et ajouter aux sols qui précèdent...* »

36 • MOUVEMENT UNIFORME

Le mouvement uniforme (sur un chemin qui n'est pas nécessairement une droite) est défini comme celui d'un mobile (voiture, train, piéton, avion...), tel que la distance qu'il parcourt entre deux instants (quelconques) est obtenue en *multipliant un nombre appelé vitesse, par la durée du parcours.* C'est un exemple de proportionnalité, déjà cité dans l'étude de la règle de trois (IV, 17).

La vitesse s'exprime donc en *unités de longueur par unité de temps.* Elle est calculée, s'il y a lieu, en divisant une longueur de parcours par la durée de ce parcours (choisie arbitrairement dans le trajet).

Elle permet de calculer un parcours en la multipliant par la durée du parcours. Inversement, la durée d'un parcours est obtenue en divisant sa longueur par la vitesse. Il convient de préciser exactement les unités employées, par exemple km; h; km par h. Ce sont là des problèmes pratiques et actuels, dont il est bon de faire traiter de nombreux exemples.

Il faut aussi, non pas connaître, mais savoir retrouver aisément les relations entre les unités usuelles (et toutes fréquemment employées) de vitesses :

km par h, ou km/h;	km par mn ou km/mn;
m par mn, ou m/mn;	m par s ou m/s.

(On aura soin d'utiliser une barre, droite ou inclinée, qui indique une division et non un trait, ni un point, ni l'absence de tout signe qui indiquerait une multiplication.)

On remarquera et on fera comprendre aux enfants que les mouvements pratiques ne sont pas uniformes, mais à peu près uniformes (arrêts des trains, passages des voitures dans les villes; irrégularités de marche des piétons). On peut calculer une *vitesse moyenne*, pour un trajet et des conditions précisées; elle peut servir à prévoir des temps approchés de parcours. Il semble que la représentation graphique d'un mouvement par des droites plus ou moins inclinées, coupées de paliers marquant les arrêts, permettrait d'éclairer ces considérations. Ce serait plutôt, semble-t-il, du domaine de la Classe de fin d'études.

On peut compléter, bien entendu, un problème de durée par des recherches d'heures, d'arrivée ou de départ, qui se calculent comme il a été dit par des additions ou soustractions de nombres complexes. Pour cela, il est plus simple de calculer d'abord la durée de trajet avec une seule unité, puis de la transformer, s'il y a lieu, en nombre complexe, pour l'additionner ou la soustraire à l'indication de l'époque. Il existe une méthode de calcul direct d'une durée avec deux ou trois unités; elle nous apparaît nettement contre-indiquée.

Les problèmes de débit se traitent comme les problèmes de vitesse : le volume est obtenu en multipliant la vitesse de débit par la durée.

Les problèmes de débits simultanés (célèbres sous le nom de problèmes de robinets) semblent hors du programme. Pour les résoudre il est commode d'utiliser, au lieu de la vitesse de débit (qui est le quotient du volume rempli — ou vidé — par la durée), l'inverse de ce quotient qui est la durée nécessaire pour remplir — ou vider — l'unité de volume. Des problèmes analogues peuvent être posés pour des machines travaillant ensemble (broyeurs, écrémeuses, excavatrices...).

D'autres problèmes de durée, indiqués par le programme, sont les *placements à court terme*. L'intérêt d'un placement, pour une période évaluée en mois, ou en jours, est obtenu en multipliant l'intérêt annuel par la « fraction d'année » du placement, évaluée en divisant la durée par 12 mois, ou par 360 jours. On peut traiter le problème inverse par des divisions : connaissant l'intérêt pour une durée de placement, en le divisant par la fraction d'année, on obtient l'intérêt annuel; en divisant cet intérêt par le « pour cent » du placement, on obtient le capital.

VIII. **RÉPARTITION MENSUELLE**

Les difficultés rencontrées au Cours élémentaire dans l'élaboration d'une répartition mensuelle sont aggravées au Cours moyen. La proportion, toujours plus forte d'élèves qui affrontent, fin mai, le concours d'entrée en sixième, oblige les maîtres à terminer leur programme de deuxième année le 15 mai au plus tard. En outre, certaines parties du programme : volumes, fractions, intérêt, mouvement uniforme semblent d'une étude difficile en première année.

Nous avons proposé une solution pour une classe, à deux divisions, de Cours moyen, avec des candidats au concours d'entrée en sixième. Les parties indiquées pour la première année sont, en principe, revues pendant le même mois en deuxième année, mais accompagnées de problèmes plus difficiles et de développements nouveaux.

Calcul		Système métrique		Géométrie
1re ANNÉE	2e ANNÉE	1re ANNÉE	2e ANNÉE	1re ET 2e ANNÉE
Octobre				
Résumé de l'étude des entiers. Mesures en nombres décimaux. Addition et soustraction des nombres décimaux.	Problèmes d'addition, de soustraction et de multiplication par un nombre de 1 chiffre. Prix de revient. Prix de vente. Bénéfice. Perte.	Paiements. Longueurs. Poids.	Mesures effectives de longueur et de poids.	Lignes droites. Perpendiculaires. Angles.
Novembre				
Changement d'unité. Multiplication et division par 10, 100... d'un nombre décimal. Multiplicande décimal.	Traitements et salaires. Problèmes d'addition et de multiplication. Factures.	Poids. Capacités.	Balance. Quintal. Tonne. Mesures effectives de capacité. Usage du m^3 et du cm^3 comme mesures de capacité.	Parallèles. Carré. Rectangle.
Décembre				
Division par 2 et 5. Division. Dividende et quotient décimaux. Partages égaux. Divisibilité par 2 et 5.	Diviseur décimal. Partages inégaux (part prélevée). Problèmes d'échelles.	Surfaces. Unités. Surface d'un rectangle.	Problèmes sur les surfaces. Rendement.	Intervalles. Échelles.

		Janvier		
Diviseur décimal. Les deux sens de la division. Problèmes de division. Divisibilité par 3 et 9.	Problèmes de division avec calcul préalable du dividende ou du diviseur. Moyennes. Carrelages et découpages.	Surfaces formées de rectangles.	Unités électriques usuelles. Mesures agraires.	Parallélogramme. Triangle et trapèze rectangle. Tracés.
		Février		
Règle de trois (quotient intermédiaire). Multiplication et division d'une grandeur par une fraction simple.	Les trois calculs d'une règle de trois; simplifications. Division par un quotient. Valeur décimale d'une fraction.	Surfaces d'un triangle rectangle, d'un trapèze rectangle. Unités de volume. Volume d'un parallélépipède.	Triangle et trapèze quelconques. Polygones et champs.	Cercle et circonférence. Cube. Prisme droit.
		Mars		
Partages proportionnels. Pourcentages. Multiplication et division par un pour cent.	Égalité des fractions. Addition et soustraction.	Surface d'un prisme. Poids spécifique.	Volume d'un prisme et d'une couche. Problèmes de volumes.	Mesure des angles. Cylindre.
		Avril-Mai		
Révision et problèmes divers.	Intérêt. Addition et soustraction des pour cent.	Périmètre et surface d'un cercle.	Nombres complexes. Mouvement uniforme.	Polygones réguliers.

IX. NOTE ANNEXE
Théorie sommaire des fractions de grandeur

37 • VOCABULAIRE

Une fraction est un couple de nombres entiers séparés par une barre placée sur la ligne d'écriture. Elle se lit :

$\frac{n}{2}$, n demis; $\frac{n}{3}$, n tiers; $\frac{n}{4}$, n quarts; $\frac{n}{5}$, n cinquièmes; $\frac{n}{d}$, n d-ièmes.

Si le quotient (de la division) du numérateur n par le dénominateur d est un nombre décimal exact, il est appelé *valeur décimale de la fraction*. Si la division ne se fait pas exactement. le quotient arrêté à un chiffre décimal est une *valeur décimale approchée* :

0,33 est la valeur approchée de $\frac{1}{3}$ par défaut, au centième près.

38 • MULTIPLIER UNE GRANDEUR PAR UNE FRACTION

Prendre la fraction $\frac{n}{d}$ *d'une grandeur* A, c'est : partager A en d parties égales et former une grandeur B avec n de ces parties; c'est une grandeur de même espèce que A. La partie est le d-ième de A, la nouvelle grandeur est n fois le d-ième de A (ce qui justifie le nom de la fraction).

Au lieu de « prendre la fraction $\frac{n}{d}$ de la grandeur A », *on convient* aussi de dire qu'*on multiplie la grandeur* A *par la fraction*, ce qu'on exprime avec le signe × :

$$A \times \frac{n}{d} = B.$$

Si la grandeur A est l'unité de cette espèce de grandeurs, on dit que :

B a pour *mesure* la fraction $\frac{n}{d}$, ou encore : *la mesure d'une grandeur* B *est la fraction par laquelle il faut multiplier l'unité pour obtenir cette grandeur* B. Ceci est compatible avec la notion habituelle de mesure décimale : quand on dit qu'une longueur B a pour mesure 1,35 m, on exprime qu'on peut construire B en partageant une longueur de un mètre en 100 parties égales et en portant bout à bout (sur une demi-droite) 135 de ces parties. Avec la convention précédente de la multiplication d'une grandeur par une fraction :

$$1 \text{ mètre} \times \frac{135}{100} = B.$$

Calcul de la mesure

Si la grandeur A a une mesure décimale a (nombre décimal suivi d'un nom d'unité), pour obtenir la mesure b de la grandeur B on peut *diviser* le nombre a par le dénominateur d (ce qui donne la mesure du d-ième de B), puis multiplier ce quotient par le numérateur n. C'est un calcul de règle de trois qui peut être écrit :

$$\frac{a \times n}{d} = b;$$

a et b sont des mesures décimales avec la même unité; n et d sont des nombres entiers, indépendants de cette unité. On peut changer d'unité pour désigner les mesures des grandeurs A et B; on déplace la virgule de la même façon dans a et b.

Pour calculer b qui est le résultat d'une règle de trois on peut :

1. — Diviser a par d, puis multiplier le quotient obtenu par n (c'est la traduction immédiate de l'opération sur les grandeurs) :

$$(a : d) \times n.$$

2. — Multiplier a par n et diviser le produit obtenu par d :

$$(a \times n) : d.$$

3. — Diviser n par d et multiplier a par le quotient obtenu :

$$a \times (n : d)$$

c'est-à-dire encore *multiplier* a *par la valeur décimale de la fraction.* (Ce troisième mode de calcul justifie partiellement le terme de multiplication par la fraction.)

Bien entendu, les résultats de ces trois calculs ne sont strictement égaux que si les divisions ont des quotients décimaux exacts. La preuve de leur égalité résulte alors de la *commutativité* et de *l'associativité* de la multiplication des nombres entiers en même temps que de la définition de la division comme l'opération inverse de la multiplication.

En changeant, s'il y a lieu, d'unité on peut supposer que a, b et les quotients intermédiaires sont tous des nombres entiers. Le *1er calcul* est exprimé par les formules :

$$a = d \times a'; \qquad a' \times n = b.$$

On en déduit en multipliant les deux membres de la première égalité par le nombre entier n :

$$a \times n = d \times a' \times n = d \times (a' \times n) = d \times b;$$

b est égal au quotient de $a \times n$ par d, ce qui est le *2e calcul.*

Dans le *3e calcul* on divise d'abord n par d :

$$n = d \times n'$$

en portant cette valeur dans la deuxième égalité du 1er calcul on obtient :

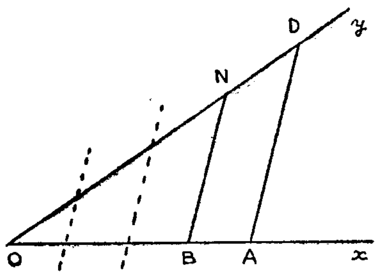
$$b = a' \times d \times n' = (d \times a') \times n' = a \times n';$$

b est égal au produit de a par n', ce qui est bien le 3e calcul.

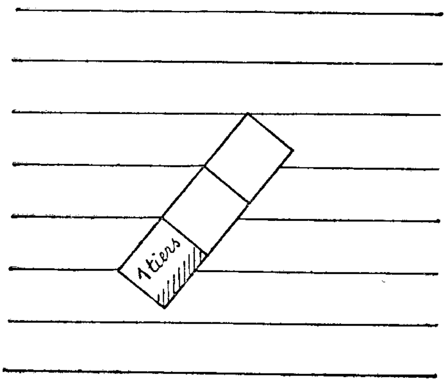
Si les divisions ne se font pas exactement, les nombres obtenus par les 3 calculs sont des approximations qui sont aussi voisines que l'on veut, en prenant suffisamment de décimales.

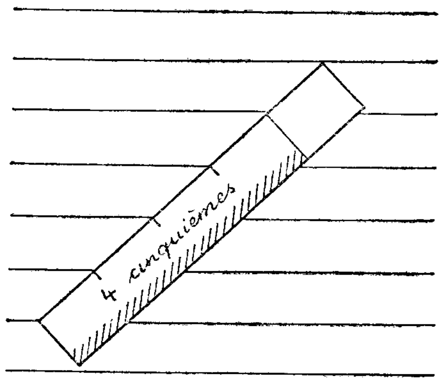
Construction géométrique

Si la grandeur A est une longueur OA, sur une demi-droite Ox, on peut *construire exactement* son produit par une fraction $\frac{n}{d}$. Par O on mène Oy différent de Ox, on porte bout à bout des segments égaux, on forme OD avec d de ces segments et ON avec n. On joint DA et on mène par N une parallèle à DA; elle rencontre Ox au point B cherché. Pour s'en rendre compte, il suffit de mener par les points de division de Oy des parallèles à DA, elles déterminent sur Ox des segments égaux (intersections de bandes égales). OA contient d de ces segments et OB en contient n.



On peut utiliser une variante de cette construction en utilisant un papier ligné en parallèles équidistantes ou en bandes égales.





Cas particuliers

1. — Si une fraction a ses termes égaux, $n = d$, la grandeur B est égale à la grandeur A, la multiplication ne change pas la grandeur. (Dans le langage de l'algèbre on dit que dans ce cas la fraction est un opérateur identique.) Considérée seule il semble qu'une telle fraction soit sans intérêt; elle intervient dans le cas d'addition ou de soustraction; ajouter son tiers à une grandeur c'est ajouter un tiers à trois tiers $(\frac{1}{3} + \frac{3}{3})$.

2. — Si une fraction a un dénominateur égal à 1, la multiplication de A par $\frac{n}{1}$ se réduit à la réunion de n grandeurs égales à A, ou à la multiplication de la mesure a par n. (C'est une justification du terme « multiplier par la fraction ».)

3. — Si une fraction a un numérateur égal à 1, la multiplication de A par $\frac{1}{d}$ se réduit à la recherche du d-ième de A, ou à son partage en d parties égales, ou à la division de sa mesure a par le diviseur d. Cette forme de fraction est notamment utilisée pour exprimer une échelle : $\frac{1}{80\,000}$ ou un 80 000^e signifie que pour obtenir la longueur sur la carte on divise la longueur sur le terrain par 80 000.

On dit parfois que $\frac{1}{d}$ est *l'inverse* du nombre entier d (ou de la fraction $\frac{d}{1}$), il faut entendre par là que « prendre le d-ième d'une grandeur A » (ou multiplier A par $\frac{1}{d}$) est l'inverse de la multiplication par d. On cherche une grandeur X telle que :

$$X \times d = A.$$

4. — La multiplication par une fraction $\frac{n}{d}$ peut être considérée comme la *succession* des deux cas particuliers précédents. On multiplie A par $\frac{1}{d}$, puis on multiplie le résultat obtenu par $\frac{n}{1}$.

5. — Si le dénominateur d'une fraction est une puissance de 10, la fraction est appelée *décimale*. Sa valeur décimale est obtenue en mettant une virgule au numérateur, de façon qu'il y ait autant de chiffres décimaux que de zéros au dénominateur. Il est équivalent de multiplier la mesure d'une grandeur par une fraction décimale ou par la valeur décimale de cette fraction. Les deux opérations se font exactement (voir le paragraphe sur les pourcentages).

39 • DIVISION D'UNE GRANDEUR PAR UNE FRACTION

Le problème inverse de celui qui vient d'être traité est :

Chercher la grandeur X *dont la fraction* $\frac{n}{d}$ *soit égale à une grandeur* B *connue.*

Avec le vocabulaire et la notation indiqués, c'est « résoudre l'équation » :

$$X \times \frac{n}{d} = B \;;$$

c'est encore le problème inverse de la multiplication, on connaît le produit de la multiplication d'une grandeur par la fraction $\frac{n}{d}$; quelle est cette grandeur ?

On obtient la solution en exprimant sous une forme plus symétrique la relation entre X et B :

X est divisée en d parties égales, B est formée de n parties égales et les parties de X et de B sont égales :

Donc X est égale à d fois le n-ième de B.

Ce raisonnement revient à déduire de la construction hypothétique de B au moyen de X, la construction de X au moyen de B, en passant par une égalité intermédiaire :

$$X \times \frac{n}{d} = B \;;$$

est équivalent à : $X \times \frac{1}{d} = B \times \frac{1}{n}$; (d-ième de X$=$$n$-ième de B);

équivalent à : $X = B \times \frac{d}{n}$.

On peut illustrer ce raisonnement en supposant que X et B sont des longueurs.

On peut aussi raisonner avec le calcul des mesures en supposant que les divisions intermédiaires sont exactes, ou que « tout se passe comme si elles l'étaient »... On cherche la mesure x, de la grandeur X telle que :

$$x \times n = b \qquad \text{ou} \qquad (x : d) \times n = b \;;$$

cette égalité est équivalente, d'après la définition de la division (comme opération inverse de la multiplication) à :

$$x : d = b : n \;;$$

donc à :

$$x = (b : n) \times d \qquad \text{ou} \qquad x = b \times \frac{d}{n}.$$

Le problème inverse ainsi traité n'est pas celui de la division de deux fractions (qui n'est pas dans le programme du Cours moyen, voir ci-dessous), mais bien celui de la *division d'une grandeur par une fraction.* Son énoncé et sa solution peuvent être exprimés :

Pour trouver une grandeur dont la fraction $\frac{n}{d}$ est égale à une grandeur B, on prend la fraction $\frac{d}{n}$ (renversée de la première) de la grandeur B;

ou, pour chercher une grandeur dont la multiplication par $\frac{n}{d}$ est égale à B; c'est-à-dire encore pour diviser la grandeur B par $\frac{n}{d}$, on multiplie cette grandeur par la fraction renversée $\frac{d}{n}$.

On remarquera que fraction renversée veut dire qu'on permute le numérateur et le dénominateur. On obtient ainsi la *fraction inverse*. Ce terme est justifié par les égalités :

$$A \times \text{fraction} = A : \text{fraction inverse};$$
$$A : \text{fraction} = A \times \text{fraction inverse}.$$

40 • ÉGALITÉ DES FRACTIONS

Deux fractions $\frac{n}{d}$ et $\frac{n'}{d'}$ sont égales lorsque les produits de la multiplication d'une même grandeur par ces fractions sont égaux :

$$A \times \frac{n}{d} = A \times \frac{n'}{d'}.$$

C'est là une définition de l'égalité de deux fractions considérées comme des opérateurs, on peut dire plus sommairement que les opérateurs sont égaux quand ils ont les mêmes effets. Il en résulte que deux fractions égales à une troisième sont égales entre elles.

Une première conséquence est que : en multipliant les deux termes d'une fraction par un même nombre entier, on obtient une fraction égale :

$$\frac{n}{d} = \frac{n \times q}{d \times q}.$$

Pour diviser la grandeur A en $d \times q$ parties égales, on peut la diviser d'abord en d parties égales entre elles, dont la valeur commune est M; on divise ensuite M en q parties. *Pour prendre* $n \times q$ ou n fois q parties de ces dernières, il suffit de prendre n fois M. Donc :

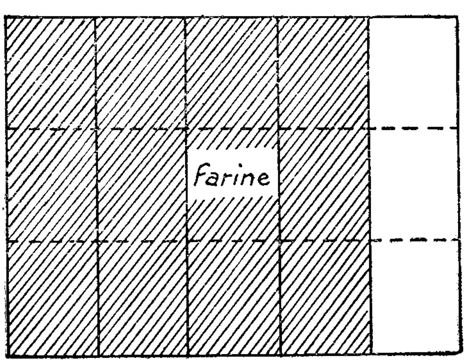
$$n \times q \text{ fois le } (d \times q\text{-ième}) = n \text{ fois le } d\text{-ième}.$$

5 parties de blé donnent 4 parties de farine; partageons ces parties elles-mêmes, chacune en trois parties égales :

$3 \times 5 = 15$ parties de blé donnent $3 \times 4 = 12$ parties de farine.

Il est équivalent de prendre les 4 cinquièmes ou les 12 quinzièmes du poids de blé.

Le raisonnement est plus visible sur un rectangle, représentant un poids de blé, partagé parallèlement à sa largeur, en 5 rectangles égaux, dont 4 représentent le poids de farine. En menant 2 parallèles à la longueur, équidistantes, on partage le rectangle en 15 rectangles égaux, dont 12 représentent le poids de farine.



En calculant sur 1 q de blé, le poids de farine est le même pour 4 cinquièmes ou 12 quinzièmes :

$$1 \text{ q} \times \frac{4}{5} = 0{,}8 \text{ q}; \qquad 1 \text{ q} \times \frac{12}{15} = 0{,}8 \text{ q}.$$

Les valeurs décimales des deux fractions (quotient de 4 par 5 et quotient de 12 par 15) sont égales.

En résumé : la fraction 4 cinquièmes est *égale* à la fraction 12 quinzièmes; $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ on a obtenu une fraction égale en multipliant les deux termes par 3.

Inversement si les deux termes d'une fraction sont divisibles par un même nombre, on obtient une fraction égale en divisant les deux termes par ce nombre. C'est la conséquence inverse de la règle précédente.

On peut illustrer ce raisonnement en prenant pour A et B des longueurs. On peut aussi raisonner sur les mesures.

Cette première propriété (qui est très suffisante pour l'Enseignement primaire) permet de trouver la condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux fractions $\frac{n}{d}$ et $\frac{n'}{d'}$

On forme deux fractions respectivement égales :

$$\frac{n \times d'}{d \times d'}; \qquad \frac{n' \times d}{d' \times d}.$$

Elles ont les mêmes dénominateurs, la condition d'égalité est celle des numérateurs :

$$n \times d' = n' \times d.$$

(On peut l'établir en considérant les produits d'une même grandeur par ces fractions.)

41 • COMPARAISON, ADDITION ET SOUSTRACTION

Comparer, ou additionner, ou soustraire des fractions, c'est comparer, ou additionner, ou soustraire les résultats de la multiplication d'une même grandeur A par les fractions. On remplace d'abord les fractions par des fractions égales de même dénominateur :

$$\frac{p}{m} \quad \textbf{et} \quad \frac{q}{m}.$$

On raisonne sur les produits :

$$A \times \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad A \times \frac{q}{m};$$

ou encore sur :

$$M \times p \quad \text{et} \quad M \times q;$$

en appelant M la m-ième partie de A.

1) $\frac{p}{m}$ est plus grand que $\frac{q}{m}$ si $M \times p$ est plus grand que $M \times q$, donc si p est plus grand que q.

Pour une espèce de betteraves, 25 q donnent 6 q de sucre; pour une autre espèce, 14 q donnent 3 q de sucre. Quelle est l'espèce qui a le meilleur rendement ?

On peut calculer sur un poids de betteraves qui pourra aisément être partagé en 25 parties d'une part et en 14 parties d'autre part. Il en est ainsi du poids $25 \times 14 = 350$ q. On calcule les poids de sucre fournis par 350 q, de chaque espèce :

$$1^{re} \text{ espèce : } 350 \text{ q} \times \frac{6}{25} = 14 \times 6 \text{ q} = 84 \text{ q};$$

$$2^{e} \text{ espèce : } 350 \text{ q} \times \frac{3}{14} = 25 \times 3 \text{ q} = 75 \text{ q};$$

La première espèce est plus avantageuse.

Ce calcul revient à remplacer les fractions $\frac{6}{25}$ et $\frac{3}{14}$, par des fractions égales, de dénominateur 350 :

1re : pour $25 \times 14 = 350$ parties, $6 \times 14 = 84$ parties, ou $\frac{84}{350}$;

2e : pour $14 \times 25 = 350$ parties, $3 \times 25 = 75$ parties, ou $\frac{75}{350}$.

La première fraction, qui a un plus grand numérateur, est plus grande.

2) Quand on réunit les grandeurs $M \times p$ et $M \times q$, c'est-à-dire p grandeurs et q grandeurs égales à M, on obtient $p+q$ grandeurs égales à M, d'où la règle $M \times (p+q)$ ou $A \times \frac{p+q}{m}$.

La grandeur formée par la réunion des grandeurs obtenues en multipliant une même grandeur A par des fractions de même dénominateur est obtenue en multipliant A par la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la somme des numérateurs.

$$A \times \frac{p}{m} + A \times \frac{q}{m} = A \times \frac{p+q}{m}.$$

Cette règle s'étend, bien entendu, à la mesure a de A.

Pour cette raison $\frac{p+q}{m}$ est appelée la somme de l'addition des fractions $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ ou des fractions égales.

A × 1re fraction + A × 2e fraction = A × somme des fractions.

La règle s'étend immédiatement à la soustraction (définie comme inverse de l'addition).

On peut l'exprimer sous une forme imagée et presque correcte en disant que :

on compare, on additionne ou on soustrait des m-ièmes comme on compare, additionne, ou soustrait des collections.

Dans une exploitation de 150 ha, 7 vingtièmes des terres sont ensemencés en céréales; 11 vingtièmes le sont en plantes fourragères; le reste n'est pas cultivé. Quelle est la superficie cultivée ?

Le vingtième de l'exploitation est : 150 ha : 20 = 7,5 ha; on peut calculer les deux superficies cultivées et les additionner :

$$7{,}5 \text{ ha} \times 7 = 52{,}5 \text{ ha}; \qquad 52{,}5 + 82{,}5 = 135 \text{ ha}.$$
$$7{,}5 \text{ ha} \times 11 = 82{,}5 \text{ ha};$$

Mais on peut aussi calculer d'abord la somme des vingtièmes et multiplier par cette somme :

$$7 + 11 = 18 \text{ (vingtièmes)}; \qquad 7{,}5 \text{ ha} \times 18 = 135 \text{ ha}.$$

L'équivalence de ces deux calculs peut être exprimée par l'égalité :

$$\text{surface} \times \frac{7}{20} + \text{surface} \times \frac{11}{20} = \text{surface} \times \frac{7+11}{20}.$$

On additionne deux fractions de même dénominateur en additionnant les numérateurs. Il est équivalent de multiplier une grandeur par une somme de deux fractions, ou de multiplier cette grandeur par chacune des deux fractions et d'additionner les produits (ou résultats).

Cette règle est aussi valable pour la *soustraction;* dans l'exemple envisagé, la différence des superficies de plantes fourragères et de céréales est :

$$11 - 7 = 4 \text{ vingtièmes}; \qquad 150 \text{ ha} \times \frac{4}{20} = 30 \text{ ha}.$$

42 • MULTIPLICATION ET DIVISION DES FRACTIONS

La multiplication de fractions exprime la succession des opérations qu'elles représentent.

La première fraction, qui a un plus grand numérateur, est plus grande.

2) Quand on réunit les grandeurs $M \times p$ et $M \times q$, c'est-à-dire p grandeurs et q grandeurs égales à M, on obtient $p+q$ grandeurs égales à M, d'où la règle $M \times (p+q)$ ou $A \times \frac{p+q}{m}$.

La grandeur formée par la réunion des grandeurs obtenues en multipliant une même grandeur A par des fractions de même dénominateur est obtenue en multipliant A par la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la somme des numérateurs.

$$A \times \frac{p}{m} + A \times \frac{q}{m} = A \times \frac{p+q}{m}.$$

Cette règle s'étend, bien entendu, à la mesure a de A.

Pour cette raison $\frac{p+q}{m}$ est appelée la somme de l'addition des fractions $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ ou des fractions égales.

A × 1re fraction + A × 2e fraction = A × somme des fractions.

La règle s'étend immédiatement à la soustraction (définie comme inverse de l'addition).

On peut l'exprimer sous une forme imagée et presque correcte en disant que :

on compare, on additionne ou on soustrait des m-ièmes comme on compare, additionne, ou soustrait des collections.

Dans une exploitation de 150 ha, 7 vingtièmes des terres sont ensemencés en céréales; 11 vingtièmes le sont en plantes fourragères; le reste n'est pas cultivé. Quelle est la superficie cultivée ?

Le vingtième de l'exploitation est : 150 ha : 20 = 7,5 ha; on peut calculer les deux superficies cultivées et les additionner :

$$7{,}5 \text{ ha} \times 7 = 52{,}5 \text{ ha}; \qquad 7{,}5 \text{ ha} \times 11 = 82{,}5 \text{ ha}; \qquad 52{,}5 + 82{,}5 = 135 \text{ ha}.$$

Mais on peut aussi calculer d'abord la somme des vingtièmes et multiplier par cette somme :

$$7 + 11 = 18 \text{ (vingtièmes)}; \qquad 7{,}5 \text{ ha} \times 18 = 135 \text{ ha}.$$

L'équivalence de ces deux calculs peut être exprimée par l'égalité :

$$\text{surface} \times \frac{7}{20} + \text{surface} \times \frac{11}{20} = \text{surface} \times \frac{7+11}{20}.$$

On additionne deux fractions de même dénominateur en additionnant les numérateurs. Il est équivalent de multiplier une grandeur par une somme de deux fractions, ou de multiplier cette grandeur par chacune des deux fractions et d'additionner les produits (ou résultats).

Cette règle est aussi valable pour la *soustraction;* dans l'exemple envisagé, la différence des superficies de plantes fourragères et de céréales est :

$$11 - 7 = 4 \text{ vingtièmes}; \qquad 150 \text{ ha} \times \frac{4}{20} = 30 \text{ ha}.$$

42 • MULTIPLICATION ET DIVISION DES FRACTIONS

La multiplication de fractions exprime la succession des opérations qu'elles représentent.

On prend la fraction $\frac{n}{d}$ d'une grandeur A, *puis* la fraction $\frac{n'}{d'}$ du résultat obtenu :

$$A \times \frac{n}{d} = B; \qquad B \times \frac{n'}{d'} = C.$$

On peut obtenir, de suite, *le résultat définitif* C *en multipliant la grandeur* A *par la fraction* $\frac{n \times n'}{d \times d'}$, dont les termes sont les produits des termes des fractions primitives.

En effet, pour obtenir B on peut partager A en $d \times d'$ parties égales dont la valeur est M, puis prendre $n \times d'$ de ces parties :

$$A = M \times (d \times d'); \qquad B = M \times (n \times d') = (M \times n) \times d'.$$

Il faut alors partager B en d' parties, chacune contient n fois M. Pour avoir C, il faut prendre n' de ces parties; il est égal à :

$$C = (M \times n) \times n' = (A \times \frac{1}{d \times d'}) \times n \times n' = A \times \frac{n \times n'}{d \times d'}.$$

On convient de dire que la fraction $\frac{n \times n'}{d \times d'}$ dont la multiplication est équivalente aux multiplications successives par $\frac{n}{d}$ **et** $\frac{n'}{d'}$ est le produit de la *multiplication de ces fractions.*

Cette définition (et son interprétation préalable) ne sont pas au programme du Cours moyen. Si on les admet, la division de deux fractions, considérée comme l'opération inverse de deux fractions s'en déduit :

$$\frac{n}{d} : \frac{n'}{d'} = \frac{n}{d} \times \frac{n'}{d'} = \frac{n \times d'}{d \times n'}.$$

Il suffit de vérifier que ce quotient, multiplié par la fraction diviseur redonne la fraction dividende, c'est-à-dire :

$$\frac{n}{d} = \frac{n \times d'}{d \times n'} \times \frac{n \times (d' \times n')}{d \times (d' \times n')}.$$