Michéle Artigue et l'âge du capitaine[1]

- Version 1.1 -

En arithmétique … on ne commence pas par révéler à [l'enfant] les nombres abstraits, leurs rapports et leurs lois…on se sert des sens non pour qu'il y ait recours toute sa vie, mais pour lui apprendre à s'en passer.
La méthode intuitive n'est pas la méthode de tous les âges; c'est exclusivement celle de l'enfance.

Ferdinand Buisson, 1887[2]

Il s'agit ici de comprendre un peu la conception de l'enseignement des mathématiques qui apparaît et devient dominante au moment des maths modernes et va donc construire globalement sa problématique en liaison avec cette réforme c'est-à-dire pour résoudre non pas seulement les problèmes d'apprentissage des mathématiques mais pour résoudre les problèmes posés par l'apprentissage de contenus qui ne peuvent être appris tels qu'ils sont présentés : il s'agit en effet d'enseigner directement " *la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques*" (in *Charte de Chambéry*, 1968). Et l'on peut citer – même si l'on ne peut dire que les auteurs de la

[1] Ce texte est un développement qui précise un certain nombre de points du chapitre
D) De la didactique et des grandeurs : le contrat didactique ou comment éliminer les mathématiques,
tiré de l'exposé *Sur l'enseignement primaire en France* (Université Bocconi, Milan, Avril 2002)
http://michel.delord.free.fr/milan+.pdf

[2] Ou comment le refus des nombres concrets et de l'intuition en 1970 en primaire aboutit au refus et à l'impossibilité de l'abstraction en 2003 à tous les niveaux

Charte sont directement responsables de ce choix - la fameuse définition de la droite graduée qui est tout à fait vraie mathématiquement mais non-enseignable telle quelle et qu'il va bien falloir enseigner "puisqu'elle est au programme"[3] : une certaine *ingénierie du savoir* va alors se mettre en place . Partant à l'origine d'une critique très partiellement juste des contenus antérieurs et chargé de mettre en place des contenus en partie non-enseignables, elle va garder de cette origine une caractéristique qui est de tenter d'analyser et de résoudre ces difficultés en ignorant la problématique qui les a produite et le curriculum dans lequel elles sont inscrites. En somme, elle a tendance à se contenter d'étudier l'application du programme à l'intérieur d'une problématique qui ne permet pas sa remise en cause. Il s'agit bien sûr d'une tendance ce qui veut dire que des contre-tendances existent comme par exemple l'intervention de Rémi Brissiaud sur les projets de programme de 1999[4] ou le texte de Guy Brousseau mis récemment à disposition sur la Tribune Libre de la SMF[5] pour la préparation de la réunion du 11Octobre. Mais cette tendance existe et elle me semble dangereuse.

Pour voir les conséquences de cette problématique, étudions l'article de *Michèle Artigue* "*Mathématiques : les leçons d'une crise*"[6] et notamment la pertinence de l'utilisation du concept de *contrat didactique*.

Vous trouverez tout d'abord de larges extraits de cet article : dans les trois concepts qu'elle se propose d'illustrer, *le long terme des apprentissages, le statut de l'erreur et la notion de contrat didactique*, je me suis contenté de commenter l'étude du dernier, *le contrat didactique*.

J'ai ajouté à la fin de ce texte, à partir de " Quelques éléments sur l'enseignement *des opérations sur les grandeurs",* des compléments qui permettent de mieux comprendre la première partie et retracent un petit peu l'historique depuis 1970 – il vaudrait mieux dire la constance- des positions dominantes sur cette question.

Cabanac, le 26 Septembre 2003

Michel Delord

---

[3] L'exemple de la droite graduée est un exemple qui valide aussi la centralité de l'opposition définissant la transposition didactique comme nécessité absolue puisque l'on bien là une opposition entre un *savoir savant* (la définition de la droite graduée , mathématiquement juste) et un *savoir enseignable* : il s'agit ici même non seulement d'une opposition mais d'un antagonisme puisque ce savoir savant était inenseignable au niveau pour lequel il était prévu.
Sur ce sujet, lire, bien entendu : Rudolf Bkouche, *De la transposition didactique*
http://casemath.free.fr/divers/tribune/didactic.pdf

[4] Je fais référence à sa comparaison entre l'enseignement des opérations et celui des fractions.
http://13.snuipp.fr/quels_savoirs_enseigner.htm

[5] Guy Brousseau, *Les mathématiques à l'école*, Bulletin vert de l'APMEP n°400 de septembre 1995, p. 831-850.
http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/APM95.pdf

[6] *Sciences et Vie Hors Série* N° 180 de Septembre 92, pages 46 – 59.

Mathématiques : les leçons d'une crise

Michèle Artigue

Sciences et Vie Hors Série N°180 de Septembre 92, pages 46 – 59

Extraits

Il y a vingt ans, le système scolaire fut bouleversé par l'irruption de la "modernité" mathématique en son sein. Beaucoup d'encres et quelques larmes ont coulé. Après cette violente crise d'adolescence, l'enseignement des mathématiques se dirige-t-il vers la maturité?

…

La prolongation de la scolarité obligatoire (réforme Berthoin de 1959) donne une nouvelle finalité à l'école: plus qu'elle ne doit préparer directement à la vie active, elle doit former les esprits, donner aux élèves les moyens d'acquérir des connaissances et de s'adapter à un monde en rapide évolution.
Face à ces objectifs, les promoteurs de la réforme considèrent qu'une mathématique des structures est particulièrement bien adaptée :

> "*Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la construction constructiviste, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte "comme un gant", nous permettrons-nous de le dire, à la formation de la jeunesse de notre temps*" (Charte de Chambéry).[7]

Grâce à elle, il doit être possible de rendre l'abstraction mathématique accessible à tous et donc de réduire l'échec scolaire en mathématiques. Grâce à elle, il doit être possible également de mettre en évidence l'applicabilité universelle des mathématiques.

Les mathématiques dites "modernes" ont suscité bien des polémiques

Mais cette rénovation des contenus ne peut porter ses fruits que si elle se double d'une rénovation des méthodes pédagogiques. Priorité doit donc être donnée à l'action de l'élève: on s'appuie notamment sur la théorie constructiviste piagétienne, selon laquelle l'enfant construit ses connaissances en s'adaptant à son environnement par actions réelles ou actions intériorisées. C'est de l'action, de la manipulation que l'élève doit abstraire les structures mathématiques fondamentales, et ceci dès le début de l'école élémentaire.

Soutenue par ces principes et porteuse de ces espoirs, la réforme des mathématiques dites "*modernes*" se met en place au début des années soixante-dix, de l'école élémentaire au lycée. Soulignons qu'il ne s'agit pas d'une réforme improvisée: dès 1959, colloques internationaux et commissions nationales de réflexion s'étaient succédé pour aboutir à la rédaction de la Charte de Chambéry (1968) et à la constitution de la commission ministérielle Lichnérowicz (1967).

Chacun garde le souvenir des polémiques et passions que cette réforme a suscitées. Très vite le décalage entre les idées fondatrices et la réalité des classes, l'inadéquation des choix effectués devient patent. L'enseignement dérive vers un formalisme privé de sens. On passe beaucoup de temps à définir précisément des notions, à introduire du vocabulaire, peu à réellement travailler ou faire fonctionner les notions introduites. Et ce d'autant plus que les enseignants, mal préparés, se raccrochent à ce qu'ils peuvent: les marques extérieures du changement, la forme, au détriment du fond.

On s'aperçoit alors de l'erreur commise : croire que l'outil fondamental du développement des mathématiques au XX^e^ siècle, c'est-à-dire la mise en évidence de structures unifiantes, devait l'être aussi pour l'enseignement, quel que soit son niveau. Une erreur commise en confondant abusivement deux mondes: celui des mathématiques en création et celui de l'enseignement. On savait bien que pour concevoir l'intérêt d'une structure donnée, il ne suffit pas d'avoir rencontré deux ou trois situations qui peuvent lui être rattachées, mais qu'il faut que cette structure apparaisse comme permettant un gain: qu'elle organise, unifie, rende plus cohérentes et efficaces des connaissances déjà présentes, ou qu'elle autorise un regard nouveau et performant sur des situations en un sens déjà familières. A l'époque, on découvre que l'enseignement primaire et secondaire est loin de pouvoir faire vivre une pareille problématique. On découvre aussi que les structures les plus générales, les premières qui soient enseignées dans une perspective avançant logiquement du simple au complexe, sont rarement porteuses de problèmes à la fois mathématiquement intéressants et accessibles aux débutants.

[7] Nous avons publié la Charte de Chambéry : http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/chambery.htm

La reforme initiée dans les années soixante-dix a manqué son objectif

Très vite, les militants de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), les enseignants travaillant dans les IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques), les promoteurs eux-mêmes de la réforme s'émeuvent des dérapages du système. Rapidement des aménagements de programmes sont mis en place pour essayer d'atténuer les effets les plus pervers de la réforme et contrer l'influence de manuels qui ont plutôt renforcé ses tendances formalistes. Mais la régulation du système lancé sur les rails de la réforme prendra du temps.

Menée au nom de principes généreux, la réforme des mathématiques modernes aura finalement manqué ses objectifs : dix ans après ses débuts, la société n'est pas réconciliée avec les mathématiques. Certes, elles auront pris une place centrale dans le système d'enseignement, mais comme instrument de sélection plus que de formation. Les jeunes se sentent obligés d'en faire, davantage pour s'assurer une réussite scolaire globale que par goût de la discipline.

L'enseignement de la décennie suivante est marqué par de nouvelles réformes qui entérinent le rejet sans appel des options épistémologiques sous-jacentes à la réforme des mathématiques modernes. Rejet de la conception structurelle des mathématiques, rejet de la vision des mathématiques comme un langage, fusse-t-il celui universel de la rationalité. La problématique se déplace sur le **sens des mathématiques**. Elle conduit à mettre l'accent sur le caractère humain de l'activité mathématique, sur son historicité, et le rôle des problèmes dans la conceptualisation et la théorisation : problèmes issus d'autres secteurs scientifiques ou nés des nécessités du développement interne des mathématiques.

Privilégier l'initiative personnelle, l'expérimentation et la découverte

En revanche, comme dans les programmes précédents, on affiche la volonté de rendre les mathématiques plus accessibles aux élèves, de former en plus grand nombre des scientifiques. On persiste à placer l'activité de l'élève au centre de l'apprentissage et l'on insiste sur le fait qu'accéder à la culture mathématique, ce n'est pas simplement apprendre des résultats et des techniques, c'est s'initier à une démarche. On met particulièrement en avant le caractère quasi expérimental de cette démarche faite d'explorations, d'élaboration de conjectures et de justifications, plus que son caractère logique et structuré. Ces extraits de programmes des collèges et des lycées (1985) témoignent de ces choix :

> "*Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations: il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes*" (Introduction aux programmes de mathématiques du collège).

> "*Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement; mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit il: sa tâche principale est d'entraîner les élèves à la réflexion et à l'initiative personnelle et l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes... En effet la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion sur tes démarches suivies et les résultats obtenus. C'est pourquoi aussi le cours doit être bref: son contenu doit se limiter aux notions et aux résultats essentiels. Sa conception ne doit pas s'identifier au déroulement d'une suite bien ordonnée de nations et de théorèmes; la présentation de contenus nouveaux doit être articulée avec l'étude de situations assez riches...*" (programme de seconde).

Séduction des textes... Mais que vivent les élèves dans la réalité des classes aujourd'hui ? Est-ce réellement cette initiation à la démarche mathématique, cette conceptualisation par le biais de problèmes porteurs des sens et des techniques d'un champ conceptuel donné ? Comment gère-t-on dans les classes l'articulation entre l'activité des élèves sur des problèmes riches et (institutionnalisation des connaissances exigibles qui sont, elles, plus réduites? Comment s'articulent les aspects conceptuels et les aspects plus techniques du travail mathématique ?A quelles difficultés se heurte l'enseignant qui veut faire vivre ces principes dans le quotidien de sa classe ? Les enseignants y sont-ils réellement préparés ? Est-on à l'abri des perversions ? Ne risque-t-on pas, par exemple, vu l'insistance mise sur l'exploration, l'expérimentation, de vair le jeu mathématique perdre son sens en dérivant vers un simple bricolage?

Aurions-nous posé ces questions il y a vingt ans, si ces mêmes principes avaient guidé la réforme des mathématiques modernes? Probablement pas... S'il semble naturel de les poser aujourd'hui, c'est en grande partie à elle que nous le devons.(page 46 à 50)

…

La réforme des mathématiques modernes fut aussi, indirectement, une cause essentielle du développement rapide de la recherche en didactique des mathématiques, en France comme à l'étranger : d'une part du fait de l'intérêt brutalement porté à l'enseignement de cette discipline, à la volonté affichée de la rendre accessible à tous, d'autre part du fait des déceptions engendrées par la réforme et des besoins de rationalité qu'elle a ainsi nourris.(page 51 –52)

…

Mais ne rentrons pas plus avant dans cette polémique chère au "microcosme" mathématique, et tentons de faire le point sur la recherche didactique, ses acquis actuels et les problèmes auxquels elle se heurte.

Le didacticien s'intéresse aux rapports entre enseignement et apprentissage, qu'il considère comme non transparents. Identifier des phénomènes didactiques, les expliquer, pouvoir éventuellement les prévoir, voire les provoquer, construire les structures conceptuelles et théoriques qui permettent d'organiser et de capitaliser les résultats obtenus, c'est en quelque sorte le pain quotidien du chercheur "pur". Mais je n'ai jamais rencontré de didacticiens qui soient seulement des chercheurs "purs". Tous ont certes l'ambition d'améliorer directement l'enseignement des mathématiques, mais ils sont également persuadés que cette amélioration nécessite un détour, une distanciation par rapport à l'action: bref, un "pas de côté" par rapport à la position d'enseignant que, généralement, ils occupent par ailleurs. La recherche a débuté à l'école élémentaire où les conditions expérimentales étaient plus faciles, s'intéressant en particulier aux apprentissages numériques avant d'élargir son champ d'action à d'autres domaines et d'autres niveaux (jusqu'aux premières années de l'enseignement supérieur). Sans prétendre â l'exhaustivité, je m'attarderai sur trois points majeurs : le long terme des apprentissages, le statut de l'erreur et la notion de contrat didactique. (page 53)

…

La notion de contrat didactique

Arrivée plus tard sur la scène didactique, au début des années quatre-vingt, elle en est devenue l'un des concepts clefs, lié à la notion de contrat pédagogique, introduite en sciences de l'éducation par J. Filloux. Si le contrat pédagogique est ce qui fixe explicitement, mais surtout implicitement, les attentes et devoirs respectifs de l'enseignant et des élèves dans une situation d'enseignement donnée, le contrat didactique est grossièrement la part de ce contrat qui concerne le contenu mathématique. Mais cette spécification par le contenu conduit à des interrogations et des travaux sensiblement différents de ceux menés en sciences de l'éducation.

La notion de contrat conduit à s'interroger sur le sens des comportements et réponses de l'élève. En quoi sont-ils conditionnés par les mathématiques en jeu dans la situation et par ses propres connaissances mathématiques ? En quoi sont-ils liés à d'autres facteurs ? Par exemple, sa perception, à travers divers indices, des attentes de l'enseignant, des us et coutumes mathématiques de la classe dans laquelle il se trouve ? Les interprétations purement cognitives que nous pourrions donner de ces mêmes comportements sont ainsi très relativisées.

Il faut une certaine sensibilité à ces questions pour repérer en quoi le contrat didactique conditionne le quotidien mathématique d'une classe. En revanche, les phénomènes de contrat deviennent brutalement visibles lorsque, pour une raison ou une autre, il y a transgression. C'est le cas par exemple dans les problèmes dits d'âge du capitaine. Expliquons-nous. Dans la quasi-totalité des problèmes scolaires, d'une part toutes les données nécessaires à la résolution sont fournies, d'autre part toutes les données fournies sont utiles. Les élèves intègrent très vite cette donnée du contrat et l'exploitent au mieux, choisissant entre telle et telle solution, pour des raisons qui ne sont pas toujours les raisons mathématiques attendues. Parfois, des enseignants, énervés par ce fonctionnement, sèment la perturbation en introduisant subrepticement une donnée inutile.

On a volontairement posé des problèmes "idiots "aux élèves

Des animateurs de l'IREM de Grenoble, il y a une dizaine d'années, osèrent aller plus loin dans la rupture du contrat usuel, posant à des élèves de l'école élémentaire des problèmes idiots comme:

"*Dans une classe, il y a 4 rangées de 8 places, quel âge a la maîtresse ?*" ;
"*Dans une classe, il y a 15 garçons et 14 filles, quel est l'âge de la maîtresse ?*" ;
"*Un berger a trois chiens et 120 moutons, quel est l'âge du berger?*".

Et, scandale ! on s'aperçut que les élèves de l'école élémentaire s'appliquaient dans leur grande majorité, comme si de rien n'était, à résoudre ces problèmes, ne choisissant même pas au hasard les opérations: la maîtresse était créditée de 32 ans dans le premier cas, de 29 dans le second, le berger de 40 ans... Quitte, pour les plus âgés des élèves, à reconnaître que ces problèmes étaient effectivement un peu bizarres ! Cette aventure, popularisée par la suite par Stella Baruk, est certes caricaturale, mais elle a le mérite de montrer jusqu'à quel point peut peser sur le fonctionnement cognitif de l'élève le poids du contrat didactique, et l'intérêt qu'il y a à être sensible au rôle qu'il joue explicitement, et surtout implicitement.

Les travaux sur le contrat didactique ont permis aussi de montrer que, s'il existe des caractéristiques du contrat relativement stables (l'âge du capitaine en est une pour les contrats usuels), un certain nombre sont en évolution permanente au cours de l'apprentissage. Cette évolution continue ou discontinue est d'ailleurs la marque de l'avancée de l'apprentissage. L'enseignant peut jouer sur les premières, en instituant dans sa classe, plus ou moins durablement, tel ou tel type de contrat associé à des pratiques de travail en groupe, de problème ouvert, de débat scientifique, par exemple, et les utiliser comme levier pour agir positivement sur le rapport aux mathématiques de ses élèves. En revanche, en ce qui concerne les secondes, il est contraint de faire avancer le contrat, de provoquer en permanence des micro-ruptures : chaque phase de l'apprentissage modifie en effet l'attente du maître vis-à-vis de l'élève.

L'enseignement n'est plus vu comme une simple transmission du savoir

Dans une perspective de l'apprentissage où l'on considérerait l'enseignement comme une simple transmission, le savoir passant d'un émetteur (l'enseignant) au récepteur (l'élève), ces considérations pourraient paraître absurdes. Là, les rôles sont clairement attribués : à l'enseignant de bien expliquer le contenu du cours, de donner les bons exercices, de montrer par ses corrections les productions attendues, à l'élève d'apprendre son cours, de faire les exercices demandés. Si chacun remplit bien son rôle et si l'élève n'est pas inapte aux mathématiques, il doit apprendre. Mais on le sait, les choses ne sont pas si simples.
Peut-on garantir que les connaissances anciennes vont nécessairement suffire à l'apprentissage des nouvelles ? De plus, l'élève interprète chaque situation qu'il vit en fonction de ses propres références, scolaires et autres. Ce ne sont pas celles de l'enseignant. Comment affirmer dans ces conditions que s'il apprend, il apprendra justement ce qu'il est censé apprendre ? L'enseignement, même lorsqu'il se veut simple transmission, n'est en fait pas dupe de l'irréalisme de cette position. G. Brousseau, dans plusieurs textes, a identifié certains paradoxes du contrat didactique : l'élève, censé avoir les moyens de produire une réponse, ne la produit pas et il faut pourtant, pour que la relation didactique perdure, arriver à ce qu'il la produise. Le plus simple de ces paradoxes est sans aucun doute ce qu'il a appelé l'effet "Topaze", par analogie avec la dictée du texte de Marcel Pagnol.(Pages 56 à 58)

Analyse dimensionnelle et/ou Contrat didactique

Michèle Artigue, dans l'article cité, tire les leçons de la crise des maths modernes qui est exactement le contexte qui m'intéresse. Elle en profite pour expliquer ce qu'est le contrat didactique qu'elle présente comme "*concept clé*". Il est donc judicieux de s'intéresser à ce concept et l'utilisation qui en est fait. Elle s'intéresse pour cela aux problèmes dits *"d'âge du capitaine"* posés à l'école élémentaire dont elle donne plusieurs exemples :

" *Dans une classe, il y a 4 rangées de 8 places, quel âge a la maîtresse ?*
Dans une classe, il y a 15 garçons et 14 filles, quel est l'âge de la maîtresse?
Un berger a trois chiens et 120 moutons, quel est l'âge du berger ? ".

Et elle ajoute : " *Et scandale ! On s'aperçut que les élèves de l'école élémentaire s'appliquaient dans leur grande majorité, comme si de rien n'était, à résoudre ces problèmes, ne choisissant même pas au hasard les opérations : la maîtresse était créditée de 32 ans dans le premier cas, de 29 dans le second, le berger de 40 ans …Cette aventure … est certes caricaturale, mais elle a le mérite de montrer jusqu'à quel point peut poser sur le fonctionnement cognitif de l'élève le poids du contrat didactique, et l'intérêt qu'il y a à être sensible au rôle qu'il joue explicitement, et surtout implicitement*".

Dix ans après sa publication, ce texte n'a toujours pas été critiqué et l'on peut donc considérer qu'il a une valeur centrale car son auteur est une spécialiste renommée des problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui présente un concept qu'elle considère comme central de celle-ci. Suivons donc l'analyse de M. Artigue : l'erreur des élèves vient du poids du " *contrat didactique* " qui serait dans ce cas défini - consciemment ou inconsciemment- par le fait que " *dans la quasi totalité des problèmes scolaires, d'une part toutes les données nécessaires à la résolution sont fournies, d'autre part toutes les données fournies sont utiles* ".

Or, si l'on analyse les résultats donnés par les élèves

- dans le premier cas, ceux-ci ont multiplié un nombre de rangées par un nombre de places et ont trouvé un âge : 4 rangées × 8 places = 32 ans
- dans le deuxième cas, ils ont ajouté un nombre de garçons et un nombre de filles et ont trouvé un âge : 15 garçons + 14 filles = 29 ans
- dans le troisième cas, ils ont divisé un nombre de moutons par un nombre de chiens et ont trouvé un âge : 120 moutons : 3 chiens = 40 ans

C'est à dire que, dans les trois cas cités, il y a incohérence du point de vue de l'analyse dimensionnelle, c'est-à-dire une incohérence entre les unités utilisées dans l'opération et celle du résultat obtenu. Prenons le deuxième problème : le fait d'écrire 15 garçons + 14 filles = 29 ans prouve simplement que l'on n'a pas appris à l'élève ce qu'est une addition.

Le *sens de l'addition* [8] : 15 garçons + 14 filles = 29 ans

En effet, quelle est la propriété de l'addition envisagée du point de vue de l'analyse dimensionnelle, qui sont les mêmes que celles de la soustraction ? C'est-à-dire : "Quel devrait être le résumé du contenu d'un cours sur cette question ?"

Propriété : On ne peut additionner que des grandeurs de même nature et on ne peut effectuer l'opération que lorsque les termes sont exprimés dans la même unité.

Exemples :

On ne peut pas écrire 3 km + 5 kg car une distance et un poids ne sont pas des grandeurs de même nature.

On peut par contre écrire 3 km + 5 hm car 3 km et 5 hm sont des distances c'est-à-dire des grandeurs de même nature mais comme elles ne sont pas exprimées dans la même unité, on ne peut pas effectuer 3+5 = 8. Par contre si l'on veut exprimer 3 km + 5 hm sous la forme d'une grandeur (c'est-à-dire d'un nombre suivi d'une unité), on doit écrire, par exemple :

3 km + 5 hm = 30 hm + 5 hm = 35 hm.

On pourrait discuter assez longuement des justifications de chaque mot de ce cours de niveau primaire et notamment de la définition de ce qu'est une grandeur : outre qu'elle est, à l'heure actuelle, tout à fait conforme à un cours classique d'analyse dimensionnelle de première année de physique à l'Université car

- elle s'appuie nommément sur James Clerck Maxwell[9] :

"L'expression d'une grandeur est le produit de deux facteurs dont l'un, qui est une grandeur de même nature prise comme repère, s'appelle son unité, et dont l'autre, qui est le nombre de fois que l'unité est contenue dans la grandeur, s'appelle sa valeur numérique"

- elle fait partie de ce qui est reconnu par les organismes de normes internationales , c'est-à-dire qu'elles font partie d'un langage universel – qui devrait intéresser ceux qui ne parlent que de communication – par exemple dans la norme NF X02-003 de Décembre 1995 qui cite nommément Maxwell :

---

[8] Je reprends à dessein l'expression " Sens de l'opération " qui était la première partie du cours sur chaque opération jusqu'aux années 30 (la deuxième étant « technique de l'opération »), qui disparaît peu à peu dans les années 50 à 60, les *maths modernes* donnant la justification théorique de cette disparition en présentant cette évolution comme l'élément central de la reforme.

[9] James Clerck Maxwel, *A treatise on electricity and magnetism,* Oxford, 1873, page 1.

"*Normes fondamentales* - *Principes de l'écriture des nombres, des grandeurs, des unités et des symboles"*

Résumé :

Le présent document définit les principes de l'écriture des nombres, des grandeurs, des unités et des symboles.

Une grandeur s'exprime, comme il est indiqué à l'article 6, par le produit d'un nombre (valeur numérique) et d'une unité. Une telle expression permet :

-- de former les noms et les symboles des unités composées par l'application des règles de l'algèbre ;
-- d'utiliser des formules entre grandeurs qui évitent toute erreur, malgré l'emploi éventuel d'unités diverses
.
À côté des principes relatifs à l'écriture correcte des nombres entiers ou décimaux et des nombres fractionnaires et à l'emploi des signes d'opération, le présent document énonce les règles de formation des noms d'unités composées et de leurs symboles, à partir de l'équation de définition ou de l'équation aux dimensions, définissant ainsi, en quelque sorte, les règles de grammaire des notations scientifiques et techniques.[10]

Cette parenthèse justificatrice fermée, on peut dire que l'on doit apprendre à l'élève cette propriété de l'addition en lui faisant remarquer que lorsqu'il a fait un calcul il doit s'assurer de la cohérence dimensionnelle de celui-ci : en primaire cela prendra plutôt la forme du traditionnel " *On n'ajoute pas des serviettes et des torchons*" ou *"On n'ajoute pas des vaches et des cochons*" bien que ces formules classiques, qui sont, quand elles existent, les seuls restes d'analyse dimensionnelle dans la pédagogie du primaire sont extrêmement mal choisies car elles superposent deux niveaux, celui du non sens de l'écriture d'une somme et celui de l'impossibilité d'effectuer l'addition car les unités ne sont pas identiques; en s'appuyant sur des objets qui peuvent être considérés comme "de même nature" car les vaches et les cochons sont des "animaux". Il vaudrait beaucoup mieux deux phrase du type :

- " *On ne peut ajouter des mètres et des litres* " car les unités choisies font partie du SI et on ne peut pas développer sur un tel exemple toute une philosophie aléatoire pour savoir si l'on a le droit ou non d'écrire 3 vaches + 2 cochons suivant que l'on considère si ces délicats animaux sont ou non de "même nature", et l'on a autant d'arguments pour dire que oui (car ce sont des mammifères ou des quadrupèdes) ou non (car l'un est un ruminant l'autre pas, l'un a des cornes et l'autre pas).

- *"On ne peut effectuer l'opération que si les deux termes sont exprimés dans la même unité*".

[10] http://www.boutique.afnor.fr/Boutique.asp?url=NRM%5Fn%5Fhome%2Easp&lang=French&btq=HOM&cookie%5Ftest=1

Une logique certaine

Mais revenons en à un des exemples analysé par Michèle Artigue : une fois cette propriété de l'addition enseignée et acquise, un élève a tout à fait les moyens de ne pas écrire "15 garçons + 14 filles = 29 ans ", c'est-à-dire qu'il a une arme pour contrer le contrat éducatif tel qu'il est décrit par M. Artigues. Il est bien entendu que l'introduction du calcul sur les grandeurs et l'enseignement des rudiments du calcul dimensionnel ne permet pas de résoudre tous les problèmes car *il n'y a aucune "méthode" qui permet de penser entièrement les rapports entre la réalité, sa perception dans la langue maternelle et sa traduction dans un langage mathématique (dans le cas contraire, on pourrait planifier la recherche!).* L'introduction du calcul dimensionnel permet, dans de nombreux cas, en particulier ceux cités et ce n'est déjà pas si mal, et dans la totalité des cas où l'on est dans la cadre du SI, de donner des indications sur les opérations à utiliser pour résoudre un problème et d'éliminer un certain nombre de fausses solutions.

Mais la question n'est pas là mais dans un fait très précis : Michèle Artigue, qui est une des plus renommées parmi les représentants de la didactique des mathématiques, choisit d'illustrer, dans un article intitulé "*Mathématiques, les leçons d'une crise*" consacré à une question fondamentale, le bilan "des maths modernes" ce qu'elle appelle elle-même un concept central, "le contrat didactique", par l'analyse d'exemples de résolutions de problèmes censés particulièrement bien démontrer l'efficacité de ce concept. Nous avons donc toutes les garanties nécessaires pour que les exemples traités soient exemplaires : or il se trouve que les élèves n'auraient pas fait les erreurs signalées si on leur avait appris une notion qui est non seulement interdite depuis la mise en place des maths modernes mais dont l'interdiction a été considérée comme le point le plus important dans la mise en place de cette réforme pas par n'importe qui mais par l'APMEP qui en a été le plus vibrant porte parole notamment dans le numéro spécial de sa revue consacré justement à sa mise en place[11].

Or

1) dans le bilan qu'elle fait de la réforme des mathématiques modernes, Michèle Artigue ne parle pas de cet aspect de la réforme considéré comme fondamental pour ses promoteurs

2) pour analyser un exemple qu'elle considère elle–même comme exemplaire, elle oublie précisément de mentionner les rapports que ces exercices entretiennent avec l'interdiction formulée à l'époque des maths modernes, dont dix ans après son article on n'est pas revenu (voir les programmes de primaire adoptés en février 2002).

C'est donc un euphémisme que de dire que cela porte un certain ombrage à la validité de cette utilisation du concept de "contrat didactique" et au bilan des maths modernes qui est fait dans l'article. Mais il faut reconnaître une certaine logique à cette position : elle naît comme problématique associée à la naissance des maths modernes et reste fidèle à ses origines en refusant d'intégrer dans ses analyses les pans du savoir qu'elle a supprimé.

[11] Voir infra "Quelques éléments sur l'enseignement des *opérations sur les grandeurs'*

L’ordre de grandeur sans les grandeurs

Mais Michèle Artigue fait une remarque supplémentaire qui est importante puisqu'elle dit que les élèves "*ne choisissent même pas au hasard les opérations* ". Il est tout à fait vrai que les élèves expriment par-là le besoin de cohérence qu'on leur refuse *et ils vont justement le chercher dans le seul renseignement sur lequel on insiste à n'en plus finir qui est "de vérifier l'ordre de grandeur". N'ayant d'autre renseignement sur la nature de l'addition comme outils de modélisation, ils utilisent ce qui est disponible.* On voit donc que l'introduction de l'ordre de grandeur sans les grandeurs n'est pas seulement un manque (parler de ce point de vue, c'est parler du point de vue de celui qui connaît ce qui manque) qui n'existe pas pour l'élève, mais le fait d'inciter l'élève à utiliser des outils pour un usage pour lequel ils ne sont pas conçus.

Un document américain intitulé *A Student's Misguide to Problem Solving* montre, bien qu'il soit humoristique, le type de stratégies employées par les élèves pour "trouver la bonne opération". Le voici :

> *Rule 1: If at all possible, avoid reading the problem. Reading the problem only consumes time and causes confusion.*
>
> *Rule 2: Extract the numbers from the problem in the order they appear. Be on the watch for numbers written in words.*
>
> *Rule 3: If rule 2 yields three or more numbers, the best bet is adding them together.*
>
> *Rule 4: If there are only 2 numbers which are approximately the same size, then subtraction should give the best results.*
>
> *Rule 5: If there are only two numbers and one is much smaller than the other, then divide if it goes evenly--otherwise multiply.*
>
> *Rule 6: If the problem seems like it calls for a formula, pick a formula that has enough letters to use all the numbers given in the problem.*
>
> *Rule 7: If the rules 1-6 don't seem to work, make one last desperate attempt. Take the set of numbers found by rule 2 and perform about two pages of random operations using these numbers. You should circle about five or six answers on each page just in case one of them happens to be the answer. You might get some partial credit for trying hard.*

On retrouve bien là la stratégie que j'ai vue employée par la majorité des élèves arrivant en collège, élèves à qui on n'a pas donné de définition des opérations qu'ils utilisent et qui n'ont été habitué qu'à résoudre des problèmes en une étape : si un problème comporte deux données numériques, ils tapent à la machine les 5 opérations possibles pour eux (puisqu'ils font, pour les meilleurs, la division dans les deux sens) et choisissent le *bon résultat* en fonction de l'ordre de grandeur qui semble compatible avec la nature du résultat.

Intermède : ordre de grandeur et calcul approché

On peut même rajouter un commentaire supplémentaire sur ce sujet. Le sujet central de l'article *"A Coherent Curriculum : The Case of Mathematics*"[12], dont les conclusions peuvent s'étendre à d'autres domaines que les mathématiques, est de donner, à partir de l'enquête internationale TIMMS quelques caractéristiques que partagent les nations qui obtiennent les meilleurs résultats à ces tests et qui les opposent à celles qui réussissent le moins bien. Or de hautes performances sur calcul approché, dont le calcul sur les ordres de grandeur n'est qu'une partie, ne caractérisent pas du tout une excellence quelconque au niveau mathématique puisque les USA excellent en calcul approché. Il est bien sûr possible de transformer ce qui n'est pas un critère de réussite en un succès en prétendant que c'est cela qui est important :

> *«Aujourd'hui, on demande aux élèves de comprendre ce qu'ils font et plus seulement d'être experts dans une technique»,* souligne Claude Deschamps, professeur au lycée Louis-le-Grand, membre de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques du Conseil national des programmes (CNP). A la question *«combien fait 28 divisé par 5?»*, les élèves de CM2 sauront répondre *«5 et il reste 3»*. L'important, explique-t-on, est de comprendre que *«ça ne tombe pas pile»*.[13]

Ce qui est un peu ridicule est l'affirmation que les directives de l'école du début du siècle recommandait seulement « *d'être experts dans une technique*», c'est-à-dire *d'apprendre sans comprendre*, par un membre d'une génération qui a justifié la suppression de la partie « Sens de l'opération » dans l'apprentissage de celles-ci.

Ce qui est par contre le comble du ridicule est de présenter comme un progrès par apport au passé et une *innovation* que les élèves de CM2 "sauront" répondre " *5 et il reste 3*" à la question "Combien fait 28 divisé par 5?" . C'est le comble du ridicule parce que

---

[12] "A Coherent Curriculum : *The Case of Mathematics"[12]*, by William Schmidt, Richard Houang, and Leland Cogan in American Educator , Eté 2002.
http://www.aft.org/american_educator/summer2002/curriculum.pdf

[13] in *Opération pour sauver la division*, par Emmanuel Davidenkoff, Alain Auffray, in Libération, jeudi 10 janvier 2002.

i) Il s'agissait d'une recommandation précise des directives pédagogiques des années 20 qui conseillaient *de savoir par cœur les tables de multiplication "à l'envers '" et "quand ça ne tombe pas juste"*[14],

ii) Cette directive ne s'adressait pas au CM2 mais au CE2 . On en trouve une trace très précise dans le manuel de l'élève de neuvième (c'est-à-dire CE2) datant des années 1920 et encore employé par l'institution Hattemer à Paris où il est dit textuellement dans la leçon de la page 69 (consacrée *entièrement* à la manière d'apprendre les tables de multiplication) :

Comment on révise la table de multiplication ?

Les élèves de neuvième ne doivent pas savoir simplement la table de multiplication dans l'ordre des chiffres , comme les tout-petits.

Ils doivent non seulement pouvoir répondre très vite quand on leur demande combien font 3×7? …8 fois 6 ?… dans n'importe quel ordre; mais il faut encore que la table de multiplication leur permette de faire sans peine les exercices suivants :

1° Dites très vite, en commençant par le plus petit, quels sont les nombres qui figurent dans les tables des 7, des 4, des 9…

[…]

6° Dites de combien 45 dépasse le nombre qui s'approche le plus de lui dans la table des 7? Des 6 ? des 8?

Exemple : 45 dépasse de 3 le nombre 42 qui représente 6 fois 7.

Même question avec 29 par rapport à la table des 4? …des 5? […]

Poursuivre ce dernier exercice avec d'autres nombres. Qui saura bien le faire effectuera sans peine les divisions les plus difficiles[15].

iii) On la trouve encore dans les IO de 1945 … toujours celles de cours élémentaire mais dans une forme abrégée qui signifie qu'elle suffisait pour être comprise . Le fait de détailler les directives sur le sujet dans les commentaires actuels signifie au contraire que ceux qui ont participé à la destruction de ce savoir sont obligés maintenant de le repréciser :

> *Quotient et division d'un nombre à un chiffre. Il faut savoir reconnaître que le quotient n'a qu'un chiffre, trouver ce chiffre et le reste. Il faut pour cela connaître les tables de multiplication et savoir y placer de mémoire les nombres intercalaires.*

Il faut souligner enfin que cette mise en avant officielle de l'enseignement des ordres de

[14] Pour plus de précisions, voir : Michel Delord, *Evaluation cinquième : le niveau monte…*, page 14. http://michel.delord.free.fr/eval5.pdf

[15] Jacques Bertin, *Livre de calcul pour la neuvième*, Imprimerie de Montligeon, Montligeon, Orne.

grandeurs effectuée dans le contexte de non enseignement du calcul sur les grandeurs – avec tous les effets pervers signalés - est un point central de la doctrine officielle. En effet, pour Claude Thelot et Philippe Joutard, c'est la nécessité de l'utilisation des calculettes qui détermine celle de la maîtrise des ordres de grandeurs, ce qui fait que la pratique des opérations sur les nombres entiers n'est pensée qu'en fonction de cette maîtrise. Tout un programme qui promet d'autres effets pervers :

> *En mathématiques, il faut préciser pourquoi on souhaite, si on le souhaite, continuer à enseigner des choses que les calculatrices savent, et surtout sauront faire dans les années et les décennies futures*[16]*. Pourquoi, par exemple, tenons-nous à ce que les élèves sachent faire les quatre opérations de base, alors qu¹il suffit pour les faire de savoir pianoter sur les calculatrices ? Est-ce parce que la maîtrise des ordres de grandeur - indispensable pour un bon usage des calculatrices - requiert nécessairement celle des opérations ? Nous pensons personnellement que oui et c'est la raison pour laquelle la baisse récente de la maîtrises des opérations sur les nombres entiers à l¹issue de l¹école primaire nous inquiète.*[17]

Apprendre à résoudre des problèmes en résolvant des problèmes qu'on ne peut pas résoudre ?

On vient de voir comment l'utilisation exclusive du concept de contrat didactique dans l'analyse d'une situation permet de masquer l'influence du curriculum et de la progression sur la situation étudiée[18].

On pourrait montrer de la même manière que l'utilisation de tous les concepts introduits depuis les années 60/70 pour penser l'enseignement des mathématiques, lorsqu'ils sont utilisés en dehors de la référence à la logique des contenus enseignés, ne sont que des fausses oppositions qui ne prennent corps que dans la mesure où elles répondent à des difficultés provoquées par une conception fausse des progressions et des méthodes d'enseignement : ces concepts ne sont donc pas des *concepts-clés* et ces conceptions se comportent alors comme des réponses aux maladies nosocomiales du système qu'elles ont elles-mêmes en partie ou grandement provoquées. Mais le plus grave n'est pas qu'elles soient basées sur de fausses oppositions mais l'effet lui même de ces fausses oppositions sur l'enseignement lui-même : ce sont de fausses réponses à des vrais problèmes (car un élève qui essaie

---

[16] Outre son caractère utilitariste qui ne définit pas du tout les contenus enseignés en fonction des besoins de la connaissance scientifique mais en fonction de la capacité d'utiliser des objets techniques sans en comprendre le fonctionnement, la thèse *On peut commencer à supprimer tout de suite dans l'enseignement ce qui sera peut-être inutile plus tard* a déjà une triste histoire puisqu'elle a déjà servi de multiples fois et, entre autres, à négliger l'utilisation de la mémoire humaine puisque les mémoires informatiques devaient y suppléer.

[17] P. Joutard et C.Thélot, *Réussir l'école, Pour une politique éducative*, Le Seuil, septembre 1999, page 179.

[18] Il n'est pas étonnant que ceux qui mettent en œuvre ce type d'analyse disent *les programmes, ce n'est pas tout* – ce qui est plus que vrai – car justement ils n'en voient pas l'influence.

de résoudre un problème d'arithmétique en s'appuyant sur un enseignement des *nombres purs* a de vrais problèmes) qui, ce faisant, contribuent à les aggraver et à créer ainsi un *besoin de conceptualisation fermé dans la même problématique* dont la réalisation ne peut qu'aggraver encore la situation.

Reprenons l'exemple basée sur le traitement présenté par M. Artigue des problèmes " d'âge du capitaine " : une méthode efficiente pour traiter la question de *ces "problèmes infaisables* "[19] est de prendre du temps pour donner des méthodes pour résoudre les problèmes scolaires et faisables et notamment de donner les rudiments du calcul dimensionnel qui permettent de supprimer un certain nombre de solutions qui sont incohérentes par rapport aux choix des unités. Ceci permet une compréhension plus effective de ces questions et, par différence, permet de voir le caractère infaisable des problèmes " d'âge du capitaine " : cette méthode n'est pas absolue mais celles qui prétendent l'être sont à priori fausses.

Tout au contraire, dans la mesure où la vision pointe exclusivement comme explication des échecs des élèves le fait que *" dans la quasi totalité des problèmes scolaires, d'une part toutes les données nécessaires à la résolution sont fournies, d'autre part toutes les données fournies sont utiles ",* la conséquence va être de minimiser l'importance et de diminuer le temps passé à résoudre les problèmes classiques[20] (c'est une composante importante de la disparition des problèmes de mélanges, de crédit, de proportionnalité inverse, etc.… ce qui fait que ces types de problèmes deviennent *eux aussi* des problèmes réellement infaisables pour tous les élèves) tout en leur faisant faire un plus grand nombre de problèmes type " âge du capitaine "[21], le résultat en étant de diminuer encore les capacités à résoudre des problèmes et à reconnaître les problèmes infaisables : un ami prof en IUFM me signalait qu'une des grandes modes actuelles est justement de conseiller aux instituteurs stagiaires de faire faire aux élèves un maximum de ce type de problèmes, le tout étant soutenu par l'édition pédagogique qui sort actuellement des recueils dont le titre est du type : 1000 problèmes infaisables.

Pertinence du contrat didactique et transmission des savoirs

Une double remarque pour finir :

---

[19] En tenant compte du fait qu'il n'existe pas de méthodes absolues sur le sujet : on ne peut guère aller plus loin que ce que disait Lebesgue : il y a même des domaines où *il y a des nombres* et où l'arithmétique "ne s'applique pas" : si l'on *ajoute* 3 liquides miscibles , on trouve 1 liquide.

[20] Ce débat pourrait déborder sur la question du rapport entre les *problèmes scolaires* et les *problèmes non-scolaires.* La mise en avant des Olympiades ou du concours du Kangourou me semble une excellente chose à condition toutefois qu'elle ne serve pas d'excuse à la présence d'un curriculum scolaire déficient.
Pour un débat sur la nature des *Word Problems* , voire les positions notamment d'*Andréi Toom* (textes sur mon site) et la critique qu'il fait des positions de *Morris Kline*.

[21] Dans le cadre de ce court texte, je ne m'étends pas – et cela peut fausser le sens de ce que j'affirme si l'on ne tient pas compte de cette remarque - sur la différence entre les différents types de problèmes en partant de ceux où *toutes* les données sont excédentaires puisque la question posée n'entretient aucun lien avec les données pour aller jusqu'à ceux où il manque simplement des données où à ceux il y a les données nécessaires accompagnées de données surabondantes.

i) *Pertinence du contrat didactique* . Je ne nie pas, même si l'on employait ce que je recommande, qu'il existerait des élèves - certes beaucoup moins nombreux- qui considéreraient que faire un problème, c'est essentiellement utiliser tous les nombres donnés dans l'énoncé. Ce qui signifie que le concept de contrat didactique n'est pas strictement non pertinent, la question de savoir s'il s'agit d'un *concept clé* étant une autre question, mais que sa pertinence relative ne pourra être établi que lorsque l'on l'aura validé dans des situations d'apprentissage où, pour le dire vite, tous les prérequis nécessaires auront été enseignés à la population que l'on étudie.

Ce que je nie par contre c'est que la solution essentielle pour résoudre ce type de difficultés soit la réponse mécaniste à la *forme* de la question qui consiste principalement à leur faire résoudre des problèmes où il ne faut pas utiliser tous les nombres de l'énoncé.

iii) *L'enseignement n'est plus vu comme une simple transmission des savoirs* . C'est le chapeau (page 58) sous lequel Michèle Artigue montre la *nouveauté* et justifie la pertinence de la conception de l'enseignement usant du contrat didactique. Je cite :

"*Dans une perspective de l'apprentissage où l'on considérerait l'enseignement comme une simple transmission, le savoir passant d'un émetteur (l'enseignant) au récepteur (l'élève), ces considérations*[i.e. les problématiques touchants au contrat didactique MD] *pourraient paraître absurdes. Là, les rôles sont clairement attribués : à l'enseignant de bien expliquer le contenu du cours, de donner les bons exercices , de montrer par ses corrections les productions attendues, à l'élève d'apprendre son cours, de faire les exercices demandés. Si chacun remplit bien son rôle et si l'élève n'est pas inapte aux mathématiques, il doit apprendre. Mais, on le sait les choses ne sont pas si simples. Peut-on garantir que les connaissances anciennes vont nécessairement suffire à l'apprentissage des nouvelles?…*"

La première difficulté dans ce passage est la description d'une conception de l'enseignement sous la forme d'une *perspective de l'apprentissage où l'on considérerait l'enseignement comme une simple transmission, le savoir passant d'un émetteur (l'enseignant) au récepteur (l'élève):* quelle conception vise-t-elle parmi les grandes conceptions historiques de la pédagogie sur les deux derniers siècles?

Elle n'est, à mon sens[22], caractéristique que de la méthode scolastique : dans son combat pour la méthode intuitive qui est l'axe des directives de la pédagogie de la troisième république, c'est la conception critiquée par *Ferdinand Buisson* dés 1887 sous la caractérisation de *rôle de l'abstraction*

[22] C'est-à-dire parmi les grandes conceptions de la pédagogie. Il se peut que l'auteur vise précisément une tendance mineure que je ne connais pas.

dans la méthode déductive[23] définie par le fait de "*faire apprendre aux élèves ces définitions, puis en déduire les règles ou formules, et continuer ainsi en construisant définition après définition, chapitre par chapitre, tout l'édifice théorique de la science, sauf à leur en faire ensuite les applications sous forme d'exercices, de problèmes, d'exemples"*. En effet, toute conception de l'enseignement destinée à l'enfance[24] qui part de la volonté d'enseigner d'abord l'abstrait, que ce soit en faisant découler la vérité de toutes choses des mystères de la Trinité ou même à partir d'une position constructiviste, est bien obligé d'être une stricte transmission puisqu'elle part de prémisses que l'enfant ne peut pas connaître. Elle peut donc également viser par sa définition même la pédagogie des maths modernes[25] et les didacticiens qui ont participé à la promotion de cette pédagogie mais je ne pense pas que ce soit le cas.

On est donc amené à penser que la conception de l'enseignement réduit à la transmission des savoirs telle que mise en avant par M. Artigue n'a pour fonction que de créer un opposant fictif construit *ad usum* pour qu'il puisse justifier la thèse contraire.

La deuxième difficulté, qui est un véritable paradoxe est que M. Artigue se sert de l'exemple d'analyse des problèmes d'âge du capitaine à l'aide du contrat didactique pour minimiser le rôle de la transmission des savoirs dans l'enseignement … alors que, très précisément, son analyse pêche par un manque d'attention à la transmission des savoirs. Ce qui porte donc non seulement un coup à la pertinence du contrat didactique mais également aux attaques contre une conception de l'enseignement le définissant comme transmission des savoirs.

Bien sûr, et ça ne sera une surprise pour personne, j'ai tendance à penser que le rôle central de l'école *doit être* (je n'ai pas dit : *est*) la transmission des savoirs . Ceci ne signifie aucunement a) qu'elle n'a pas d'autres rôles que ce rôle central b) que ce rôle central considéré comme processus se réduise à un transfert vers l'élève qui ne serait qu'un réceptacle au début vide, l'apprentissage n'aboutissant qu'à une augmentation quantitative de son stock de connaissances. C'est d'ailleurs ce que je disais le 5 avril 2000 dans un message sur le Forum SMF intitulé "*Survol : sciences de l'éducation*" :

---

[23] Références : Ferdinand Buisson, articles sur l'abstraction et la méthode intuitive

[24] J'ai bien dit à l'enfance et pas l'adolescence, c'est-à-dire que le rôle de l'intuition si il est quasiment exclusif dans l'enfance doit servir le plus tôt possible comme base de l'introduction de l'abstraction. Ce qui ne signifie pas non plus qu'une fois que l'on peut s'appuyer sur la pensée abstraite, celle-ci devient autosuffisante et n'a pas en permanence besoin de l'intuition pour la stimuler : consulter F. Buisson. Par contre ceci implique que ma critique des mathématiques modernes n'implique pas le contenu mathématique de celles-ci mais simplement la volonté d'enseigner en primaire et dés le début de celui-ci un contenu abstrait défini, par exemple, par ce qu'avance la Charte de Chambéry. Et il me semble , mais c'est une autre histoire que je ne développerai pas ici bien qu'ayant pas mal d'éléments factuels et d'analyses sur cette problématique, qu'il aurait été possible d'enseigner les bases d'un véritable contenu des mathématiques modernes au lycée (par exemple, notion de groupes, d'espace vectoriel...) si l'on n'avait pas tenté de l'enseigner au primaire.

[25] Ce qui fait que cette pédagogie qui s'est présentée comme *irruption de la modernité* [*J'emprunte ce terme à Michèle Artigue : première page de son article , page 46*] représentait en fait, en tant que théorie pédagogique, une régression sociale et historique, véritable retour en arrière non pas vers ce qu'elle prétendait critiquer, i.e. les thèses pédagogiques "d'avant 60", mais à une pédagogie réellement moyenâgeuse et antérieure à Jean Jacques Rousseau. Une conséquence en est que la nouveauté, l'innovation, le progrès en général ne peuvent plus se prévaloir *a priori* du soupçon de régression sociale lorsque l'on passe de la découverte scientifique à sa mise en œuvre comme ingénierie sociale.

"Si l’on s’en tient à l’affirmation que les enfants construisent leurs savoirs en l’opposant à la conception de “l’apprenant” comme “un sac vide”, il est bien évident qu’elle est vraie puisque l’intégration d’une nouvelle connaissance signifie simultanément une intégration de la nouvelle connaissance à la connaissance précédente. ... Une nouvelle connaissance n’est donc pas un simple ajout mais une réorganisation plus ou moins complète de la structuration de leurs systèmes de pensée qui se reconstitue en fonction de cette “découverte”"

Je pense que le rôle central de l'école doit être la transmission des savoirs dans l'absolu et que c'est cet aspect qui doit de plus être souligné au moins depuis une quinzaine d'années parce que, justement, la tendance est à la disparition de ce rôle[26]. Dans ce contexte , les critiques contre l'école conçue comme un *simple* (?) lieu de transmission des savoirs sont aussi pertinentes que celles qui mettent en garde, d'ailleurs depuis la même époque, contre les risques de *virtuosité excessive en calcul* dans un contexte de non-maîtrisé généralisée de celui-ci.
.

[26] Dans le cadre du "grand débat", le premier ministre souhaite qu'à l'issue du débat, le ministère de l'Education nationale "*devienne, par volonté commune de la Nation, plutôt une véritable maison d'éducation qu'une machine à instruire*". C’est vrai qu’elle instruit encore trop.

Quelques éléments sur l'enseignement des *opérations sur les grandeurs*

Enseignement des *opérations sur les grandeurs* et enseignement des *grandeurs*

Le titre de ce "chapitre" est explicite et ne veut pas traiter de l'enseignement des grandeurs en général mais de l'enseignement *des opérations sur les grandeurs*. Car c'est ce qui est considéré comme central par l'APMEP au moment de la réforme des maths modernes et pas n'importe où mais dans le numéro spécial que consacre cette organisation au BO des *programmes transitoires du primaire*[27] qui a représenté la plus grande avancée de cette réforme, article paru plus deux ans après la parution du BO, ce qui donnait un temps de réflexion critique.

> « *L'abandon des " opérations sur les grandeurs " est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire*»
> Marguerite Robert, *Un nouvel état d'esprit*, page 17.[28]

Cet abandon du calcul sur les grandeurs dans le BO n'est pas argumenté en tant que tel mais figure sous la forme suivante :

> *«Les phrases telles que 8 pommes +7 pommes = 15 pommes n'appartiennent [pas] au langage mathématique».*[29]

Ceci est bien sûr une absurdité certes pédagogique mais surtout mathématique puisque dès 1968, soit deux ans avant la publication du B.O. et quatre ans avant le commentaire de l'APMEP, le grand géomètre Hassler Whitney – c'est-à-dire que ses articles ne pouvaient pas être ignorés [30] - publiait un article qui donne un cadre mathématique axiomatique, "moderne", au calcul sur les grandeurs. Il s'agit de *The Mathematics of Physical Quantities*[31]. Il y déclare notamment – et démontre en donnant une structure mathématique sous-jacente - qu'il est tout à fait "mathématique" d'écrire :

5 cakes + 2 cakes = (5+2) cakes = 7 cakes ou bien *2 yd = 2 (3 ft) = 6 ft*

Le conteste de l'introduction montre même qu'il vise explicitement les maths modernes en dénonçant notamment l'absurdité des obligations langagières du type *On ne dira pas un segment de 5 cm mais un segment de mesure 5 cm* puisqu'il y dit explicitement :

---

[27] BOEN, N° 5, Jeudi 29 Janvier 1970

[28] In *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris, Supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages.

[29] BOEN, page 355.

[30] Marcel Berger fait référence par exemple récemment à sa notion de *courbe stable* dans *La taxonomie des courbes*, in *Pour La Science*, Juillet 2002, pages 56 à 63.

[31] The Mathematics of Physiscal Quantites
Part I: Mathematical Models for Measurement, February 1968
Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, July 1968
In American Mathematical Monthly. Vol. 75.
J'ai publié l'introduction qui se trouve à : http://michel.delord.free.fr/h_whitney.pdf

The fact that "2 yd" and "6 ft" name the same element of the model enables us to say they are equal; there is no need for such mysterious phrases as "2 yd measures the same as 6 ft."

Ceci prouve entre autres que la pratique du calcul sur les grandeurs est bien plus "moderne" que la réduction du calcul au calcul sur les nombres purs.

L'APMEP : justifications

On peut montrer également que la critique faite par l'APMEP vise bien ce que je dénonce *supra*, c'est-à-dire pas seulement le non-enseignement général des grandeurs mais bien la référence à l'analyse dimensionnelle dans l'enseignement des opérations et de la résolution des problèmes puisque dans le même numéro spécial de l'APMEP, on trouve le paragraphe suivant :

Commutativité

La multiplication est une opération commutative.

Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de "nombres concrets". Cette expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication[32]*. Il n'y a pas à distinguer multiplicande et multiplicateur ; si on les distingue souvent, c'est parce qu'on pense plus à ces "nombres concrets", 3 sacs de 7 oranges, 15 barriques de 228 litres, qu'à des nombres. L'emploi de ces mots ne se justifie pas (l'emploi des mots soustractande et soustracteur se justifierait ; on s'en passe aisément d'ailleurs).*

"Quelle est l'unité du multiplicande ? " Les litres. "Du multiplicateur ? " Les barriques. "Le produit a la même unité que le multiplicande" déclare la maître. Puis, se ravisant à cause de cette curieuse unité barrique, injustement éliminée, et se souvenant de ses cours de Physique du Lycée : "En fait, c'est 228 litres par barrique". Cette nouvelle unité, le litre-par-barrique, ou l/ba lui fait peur et il interrompt sa lancée. Il fallait l'interrompre, bien sûr. La sagesse, même si c'est une petite révolution dans nos classes, c'est de considérer que la multiplication agit sur les naturels, que les naturels sont 15 et 228, et non 15 barriques et 228 litres.

Une pédagogie ancienne, mais pas disparue, fait dire : "Si tu veux trouver des litres, il faut que tu commences par des litres". C'est peut-être de tels dogmes, un tel arbitraire, de tels entraînements mentaux, qui empêchent les enfants de comprendre. En voici d'autres : quand on divise des francs par des francs, on ne doit pas trouver des francs ; quand on divise des litres par des vases, on trouve des litres.

*Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts * 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts * 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges * 3 ou aussi bien 3 oranges * 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3* 7,ou 7*3 ,ou 21.*

La commutativité de la multiplication n'est pas évidente chez les enfants. Ils la découvrent quand, disposant des objets en 3 rangées de 7, ils découvrent 7 rangées de 3 ; et c'est bien là l'idée la plus simple. On peut aussi leur proposer d'envisager un produit cartésien d'ensembles ; ces mots savants ne sont rien d'autre que ceci : 3 fruits distincts, une pomme, une poire, une banane, posés de toutes les façons possibles sur 7 assiettes de couleurs distinctes, à raison d'un fruit sur une assiette comme au restaurant ; en remplissant les cases d'un tableau, ils voient, là encore, 3 colonnes de 7 cases ou 7 lignes de 3 cases.

Des situations trop concrètes, 3 sacs de 7 oranges, risquent de rendre la. commutativité moins claire. De même pour les adultes : si un pain vous nourrit 3 jours, vous mangerez 7 pains en 3 semaines puisqu'une semaine dure 7 jours ...

Tout de même, beaucoup de chemin parcouru depuis que les Instructions de 1945 déclaraient

[32] On n'a jamais eu une seule preuve de cette affirmation et on n'a jamais rencontré une portion statistiquement significative d'élèves des années 20 qui ne savaient pas que la multiplication est commutative même s'ils n'employaient pas ce mot.

que la commutativité de la multiplication devait être apprise aux élèves non par une preuve théorique (que serait une preuve théorique ?) mais "par des constatations faites plus ou moins méthodiquement dans la table d'abord, ensuite sur des opérations".

L'apprentissage par cœur primait la compréhension. La table de multiplication, toute faite, observée comme on observe une Renoncule, et la technique opératoire, toute élaborée, enseignée dogmatiquement, servaient d'arguments, sans qu'on vît dans ce cercle vicieux une mauvaise nourriture pour les enfants. Ce qu'on lit dans la table y a été mis quand on a étudié les propriétés de la multiplication, et les techniques qui permettent d'obtenir le produit de deux naturels supérieurs à 10 résultent de cette étude[33].

J'ai déjà critiqué en partie ce texte – c'est-à-dire sur le problème des *3 sacs de 7 oranges* et en montrant la continuité avec les orientations actuelles - et je reproduis cette critique *infra* (*Multiplicateur et multiplicande : des notions inutiles voire nuisibles ?*) : je pourrais montrer que P. Jacquemier s'appuie à plaisir sur certains défauts réels de l'enseignement des rudiments du calcul dimensionnel tel qu'il a pu être pratiqué – mal certes - mais qu'il ne s'en sert pas pour l'améliorer (ce que je fais par exemple en montrant les faiblesses d'expression telles que *On n'ajoute pas des vaches et des cochons*) et se sert pour cela d'exemples les plus difficiles et situés à la limite des compétences de l'enseignement primaire (d'il y a un certain nombres d'années, à l'époque où on enseignait *toutes* les opérations sur *toutes* les fractions à l'école primaire).

Par exemple , lorsqu'il donne l'exemple des litres par barriques :

i) Face à ce problème[34], il y a une explication simple qui est de reconnaître la différence entre le multiplicateur et le multiplicande en reconnaissant celui qui , dans la situation donnée, représente la répétition du nombre de fois et le nombre concret qui représente la quantité répétée, c'est-à-dire de se placer dans le cas dans lequel l'on peut *toujours* se ramener pour une multiplication qui est le produit d'un nombre pur (nombre de fois) par un nombre concret.
Dans ce cas, l'opération correspondante est bien : 15×228 litres et pas 228×15 barriques.

Lorsque je dis que l'on peut toujours s'y ramener, c'est que l'on doit enseigner l'identité canonique

$$a\,\mathbf{u} \times b\,\mathbf{v/u} = a \times b\;\; \mathbf{v} \quad (= b\,v/u \times a\,u),$$

mais que la compréhension de celle-ci est à la limite du primaire, suppose une bonne maîtrise de la solution précédente, et suppose d'avoir dépassé, en ayant compris ce dépassement, la règle tout à fait justifiée dans les débuts de l'apprentissage de la multiplication qui est de systématiquement placer le nombre concret avant le nombre abstrait, c'est-à-dire *nombre concret × nombre pur* en le formulant par exemple *Si tu veux trouver des litres, tu commences par des litres*. Bien évidemment, la formulation plus abstraite et à mon avis tout à fait accessible dés le CE est : le produit a la même unité que le multiplicande .

ii) La position de P. Jacquemier, tout au contraire, face à une difficulté de l'enseignement du calcul des grandeurs, difficulté réelle et qui ne peut être surmonté par des *trucs pédagogiques*, mais dont le dépassement permet une bien meilleure maîtrise de la résolution des problèmes , notamment des problèmes de physique (mais je ne crois pas que c'était son souci) est d'éviter la difficulté et de dire : " *La sagesse, même si c'est une petite révolution* [!!! MD] *dans nos classes, c'est de considérer que la multiplication agit sur les*

---

[33] P. Jacquemier, *Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent,* in *La mathématique à l'école élémentaire,* Paris, Supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages. Pages 59 - 74

[34] Le but de ce texte n'est pas d'apporter bien sûr des solutions pédagogiques mais de dégager un espace théorique en combattant un certain nombre de positions, ce qui seul permettra que ces solutions pédagogiques, ne soient pas perçues comme des trucs. Mais je suis bien obligé de donner ici un certain nombre de positions pédagogiques positives.

naturels, que les naturels sont 15 et 228, et non 15 barriques et 228 litres." Car le multiplication des nombre purs ne posent effectivement aucun de ces problèmes parce qu'elle est plus facile : et l'on a là le début, probablement au corps défendant de l'auteur, des raisonnements absurdes sur l'allégement des programmes qui seraient censés améliorer la compréhension.

Lorsque je dis *probablement au corps défendant de l'auteur*, je devrais même dire *sûrement au corps défendant de l'auteur* car il faisait partie d'une génération qui souhaitait véritablement un fort niveau en mathématiques et les programmes souhaités pour le secondaire à l'époque le montrent bien. Le moteur de son attitude n'était donc pas la démagogie ambiante actuelle mais une erreur théorique dont je voudrais donner le schéma, schéma que j'ai appris lors de conversations avec des partisans des maths modernes à l'école pour le primaire à cette époque mais dont je n'ai pas trouvé jusqu'à maintenant une explicitation complète sous forme de traces écrites.

La logique était alors de considérer que l'ordre chronologique de développement intellectuel de l'enfant était celui de l'axiomatique : or, dans ce cadre venait d'abord les nombres entiers sur lesquels reposait tout le reste de l'édifice. Or, quel que soit la justification mathématique/axiomatique que l'on donne au calcul sur les grandeurs, il était impossible dans cette problématique de penser l'écriture du nombre concret (2 mètres ou 2 m par exemple) avant l'écriture du nombre pur 2 puisque, au minimum , le cadre dans le quel pouvait être pensé "2 m" était un espace vectoriel de dimension 1, qui ne pouvait être *au début* puisque la notion d'espace vectoriel venait après celle de nombre entier. Cette même remarque vaut *a fortiori* pour les opérations sur le grandeurs où des opérations comme $2m \times 3m^2 = 6m^3$ font appel, pour celui qui veut suivre une stricte axiomatique – et c'était bien le désir affiché dans la Charte de Chambéry – à des structures encore plus complexes.

Retour bref dans le passé : méthode intuitive et abstraction chez F. Buisson

Si l'on fait maintenant un petit retour dans le passé, on peut chercher les justifications de l'enseignement direct des nombres concrets avant même celui des nombres purs dans la *méthode intuitive* et sa liaison avec l'*abstraction* qui est la base théorique pédagogique de l'enseignement de toutes les matières à partir de 1880. Nous le prendrons dans un de ses meilleurs théoriciens qui est Ferdinand Buisson dont nous prendrons quelques articles dans le volumineux – 4 fois 1300 pages - *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire* dont il a rédigé la rédaction et qui a été la référence pédagogique au moins jusqu'aux années 30 du XX^ème siècle.[35]

Je me contenterai de quelques citations sans commentaire si ce n'est celui-là : au lieu de traiter l'enseignement *ancien* de mécanique, les réformateurs des années 70 auraient bien fait de relire Buisson qui semble avoir prévu leur refus de l'intuition pour arriver à l'abstraction.

L'abstraction (1887) [36]

> *Son rôle pédagogique.* — Le rôle de l'abstraction et des idées abstraites dans l'éducation intellectuelle est un des points controversés de la pédagogie théorique, un des problèmes délicats de la pédagogie pratique. Dans l'ancienne école ou, pour mieux dire, dans toutes les anciennes écoles, c'est par l'abstraction qu'on débutait invariablement, c'est de l'abstraction qu'on faisait le véhicule de l'enseignement à, tous les degrés. Depuis le

---

[35] Mais ce retour vers le passé n'est pas l'apologie du passé car on peut trouver chez Buisson (outre les analyses purement politiques que nous n'abonderons pas ici) un passage des années 1880 aux années 1920 de la défense d'un enseignement mettant en avant la culture générale sans la couper de l'utile à un utilitarisme qui ne voit plus dans l'école qu'une préparation au métier . Voire la deuxième version de l'article *Education* dans le *Dictionnaire abrégé de pédagogie de 1922*, article qu'il co-signe ce coup-ci avec Durkheim.

[36] Ferdinand Buisson, *Article Abstraction*, *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, Hachette, 1887. Tome 1 de la première partie , pages 9 à 11.
http://michel.delord.free.fr/fb_abstr.pdf

commencement de ce siècle, en particulier sous l'influence des idées de Rousseau, une vive réaction s'est faite contre l'abus de l'abstraction, et on est allé jusqu'à prétendre l'exclure de l'enseignement élémentaire. Nous croyons qu'il y a là un malentendu ; essayons de le dissiper en nous rendant compte avec plus de précision de l'un et de l'autre système ; puis nous donnerons les règles qui nous semblent déterminer l'usage légitime de l'abstraction dans l'enseignement populaire.

L'abstraction dans l'ancienne méthode (méthode déductive).

…

Ainsi, dans ces diverses branches, telle a été la tendance primitive de la pédagogie ; et c'est celle de tous les maîtres au début de leur carrière : partir de l'idée générale de la science à enseigner, la décomposer logiquement en un certain nombre de notions abstraites, définir chacune de ces notions, faire apprendre aux élèves ces définitions, puis en déduire les règles ou formules, et continuer ainsi en construisant définition après définition, chapitre par chapitre, tout l'édifice théorique de la science, sauf à leur en faire faire ensuite les applications sous forme d'exercices, de problèmes, d'exemples.

Avantages et inconvénients de ce système.

….

En un mot, l'enfant part du concret, et son maître veut qu'il parte de l'abstrait, parce que l'abstrait est plus simple. Or cette marche du simple au composé, du général au particulier, est aussi peu naturelle à l'enfant qu'elle est rationnelle pour l'homme. En présence de cette discordance établie par la nature entre les instincts intellectuels de l'enfant et ceux de l'adulte, que faut-il faire? Lequel des deux doit se plier aux procédés qui conviennent à l'autre? La réponse n'est pas douteuse, c'est au maître de marcher du pas de l'élève. Pour les débuts de l'éducation, cette condescendance n'est pas seulement convenable, elle est nécessaire sous peine de tout fausser, de tout compromettre. Faire abstraire prématurément, c'est faire abstraire passivement, machinalement, sans profit pour l'intelligence. C'est cette considération qui a fait de nos jours le triomphe de la méthode dite *intuitive*.

L'abstraction dans la nouvelle méthode (méthode intuitive).

…

Avantages et inconvénients. — Si légitime que soit cette réaction contre l'abus des procédés abstractifs et déductifs, il ne faudrait pas la pousser jusqu'à les bannir de l'enseignement. Il ne faut même pas reculer trop tard le moment où l'on fera de l'abstraction la forme et la condition de tout l'enseignement : trouver pour chaque élève et pour chaque étude le moment précis où il convient de passer de la forme intuitive à la forme abstraite est le grand art d'un véritable éducateur. Un enfant qu'on habituerait à ne jamais faire cet effort d'intelligence qu'exigé l'abstraction, puis la généralisation, risquerait de prendre une sorte de paresse d'esprit, une lourdeur ou une difficulté de conception
extrêmement fâcheuse, (Si l'on en veut un exemple, V. *Boulier*.)

….

Règles pédagogiques pour l'emploi de l'abstraction dans l'enseignement. — Reconnaissant que l'abstraction est une faculté naturelle dont le développement ne saurait être impunément négligé ni même ajourné, nous ramenons aux deux règles suivantes les conditions à remplir pour donner à l'abstraction son rôle légitime dans l'éducation intellectuelle.

La première est que l'abstraction dans tout enseignement, dans tout exercice, ait toujours été *précédée de l'intuition* et n'en soit que le résumé.

….

La première règle a en quelque sorte son critérium dans une expérience toujours facile à faire. Toutes les fois qu'une notion abstraite est donnée à l'enfant, vous reconnaîtrez qu'il n'était pas mûr pour cette notion, s'il n'est bas capable de lui donner une expression différente de celle que vous lui avez fait apprendre par cœur. S'il ne trouve pas aisément d'autres mots, d'autres exemples, d'autres applications de la même idée ou de la même formule, c'est qu'il ne se l'est pas assimilée, et que cette abstraction est prématurée.

…

Conclusion. — Les explications qui précèdent nous semblent de nature à faire comprendre et tout le bien et tout le mal qu'on a pu dire de l'abstraction. Faite trop tôt, faite à contre sens, au rebours de ce que veut la nature, commençant par le général, c'est-à-dire par l'abstraction à sa plus haute puissance, pour descendre de là au particulier, l'abstraction est un désastreux procédé d'enseignement.

Mais si le terme général ne se présente que quand l'intelligence de l'enfant l'appelle en quelque sorte pour lui servir à résumer plusieurs noms abstraits, et si ces noms abstraits eux-mêmes désignent des qualités que l'enfant a préalablement saisies dans le vif de la réalité, alors l'abstraction n'a que des bienfaits : elle est claire, facile, naturelle, presque spontanée ; c'est un secours pour la mémoire, une satisfaction pour l'intelligence, une ressource inappréciable pour le langage. En un mot, pour qu'elle profite à l'esprit, il faut que l'esprit s'y exerce graduellement et par lui-même ; il faut attendre par conséquent qu'il se soit familiarisé avec la réalité concrète avant de la lui faire transfigurer pour ainsi dire en conceptions logiques ; il faut s'astreindre à ne demander à chaque âge que le mode et le degré d'abstraction dont cet âge est capable.

Intuition et méthode intuitive (1887)[37]

On pourrait presque dire qu'il y a deux logiques: celle de l'enfant et celle de l'adulte, l'une qui est toute naturelle et intuitive, l'autre plus savante, plus réfléchie, plus méthodique. C'est une grande tentation pour le maître de suivre cette dernière voie, parce que c'est la seule rationnelle, la seule qui satisfasse son esprit à lui, son besoin d'enchaînement et de déduction régulière: c'est celle qui est vraiment naturelle à l'homme fait. Elle va du simple au composé, du principe à la conséquence, de la règle à l'exemple. Et c'est justement ce qui fatigue et rebute l'enfant.

…

Et les anciennes méthodes étaient inexorables au nom de la logique sur la nécessité de ces interminables préliminaires.

…

Tout cela était-il absurde, illogique, déraisonnable? Nullement. C'était la marche d'un esprit mûr qui, sachant réduire en idées abstraites la science qu'il doit étudier, prend tout d'abord les plus simples et les enchaîne graduellement en combinaisons de plus en plus complexes et toujours rigoureusement subordonnées les unes aux autres. Tout autre est la marche de l'esprit enfantin qui veut aller vite et joyeusement du connu à l'inconnu, du concret à l'abstrait, du facile au difficile, plutôt par bonds que pas à pas.

…

La méthode intuitive, telle qu'elle s'applique aujourd'hui à toutes les matières de l'enseignement primaire, n'a pas d'autre objet que de tenir compte de ce besoin de spontanéité, de variété et d'initiative intellectuelle de la part de l'enfant.

En lecture, au lieu de lui faire passer en revue toutes les lettres et toutes les syllabes vides de sens, on lui donne, dès qu'il sait deux ou trois lettres, de petits mots qui occupent sa pensée, satisfont son imagination, aiguisent sa curiosité pour les leçons suivantes, chaque leçon portant pour ainsi dire sa récompense en elle-même: l'ordre logique peut en souffrir, et il faut que l'enfant plus d'une fois supplée par une sotte de divination ou d'intuition à ce qui lui manque rigoureusement pour être en état de déchiffrer le mot, mais c'est là précisément qu'est le plaisir pour lui; l'obstacle est franchi, il a le sentiment de la conquête qu'il vient de faire; il n'est pas encore à l'âge où l'on tient à se rendre compte

---

[37] Ferdinand Buisson, *Article intuition et méthode intuitive*, *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, Hachette, 1887. Tome 2 de la première partie , pages 1394 à 1397.
http://michel.delord.free.fr/fb_intuit.pdf

minutieusement et consciencieusement des procédés qu'on a suivis, et il ne demande qu'à poursuivre. On aura le temps plus tard de lui faire analyser ce qu'il saisit à présent d'un coup d'œil juste, mais trop rapide.
…

En arithmétique, on ne commence pas par lui révéler les nombres abstraits, leurs rapports et leurs lois: c'est sur les objets concrets qu'on exerce d'abord son attention, et l'on se sert des sens non pour qu'il y ait recours toute sa vie, mais pour lui apprendre à s'en passer : le moment ne tarde pas où l'on peut lui faire faire de tête et par intuition des opérations qu'il ne pourra rigoureusement raisonner que bien des années après. Il n'y a pas d'enfant qui ne puisse faire mentalement et sans efforts des soustractions, des multiplications, des divisions sur les dix premiers nombres, voire même sur les fractions, longtemps avant de soupçonner même le nom des quatre règles.
…
La méthode intuitive n'est pas la méthode de tous les âges; c'est exclusivement celle de l'enfance.

Retour vers le présent

Où en sommes-nous ?

Dans la réalité des classes, depuis 73, date de mon entrée dans l'enseignement, je n'ai vu *aucun* élève sur les près de 2000 que j'ai pu avoir arrivant en sixième écrivant $2m\times5m^2=10m^3$ et même $2\times3m=6m$[38] et je n'ai vu qu'un nombre minime, de l'ordre d'une dizaine au maximum, utilisant des raisonnements dimensionnels, raisonnements qu'ils m'ont tous dit avoir appris en dehors de l'école.

Les positions officielles – c'est-à-dire du BO aux auteurs reconnus en passant par des organismes comme la commission Kahane) vont de la reprise à l'identique des positions de 70 (par exemple les commentaires de troisième cités *infra*) à la reconnaissance de la nécessité de l'enseignement des grandeurs mais sans jamais évoquer les opérations sur les grandeurs (et les règles de leur écriture) et encore moins l'analyse dimensionnelle sous-jacente qui permet d'en comprendre le sens et comme outil de résolution des problèmes.

Petit inventaire :

Ceux qui sont restés strictement dans la ligne de 1970 – sans l'ambition mathématique de l'époque - : parmi eux les rédacteurs anonymes de l'actuel *Document d'accompagnement des programmes de troisième*[39] reproduisent l'antienne des *mathématiques pures* , mais dans un contexte de programmes vraiment très allégés : «*En mathématiques, on ne travaille pas sur les grandeurs*». Ce qui est une interdiction absolue du calcul sur les grandeurs.

D'un autre coté , on *reparle* des "grandeurs et de la mesure" mais hors de l'histoire puisque n'a pas été intégré le fait que l'enjeu essentiel de 70 était le calcul sur les grandeurs et sa liaison avec les rudiments de l'analyse dimensionnelle et que ce manque continue d'agir inconsciemment, sans compter que la richesse pédagogique de l'enseignement des opérations sur les grandeurs a été perdu ce qui fait que, au contraire, il devrait être développé en détail.

---

[38] Ce qui se passe plutôt est qu'ils me disent systématiquement "*Notre maître nous a interdit d'écrire comme ça*" lorsque j'écris $2\times3F=6F$. Ceci n'est pas foncièrement étonnant car la disparition de l'écriture des unités dans les opérations se fait dans les manuels dés la fin des années 50 et les IO de 45 sont déjà très prudentes sur le sujet puisqu'elles recommandent l'écriture des unités sur une ligne au dessus de l'écriture en nombres purs.

[39] http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/acc_prg3/acc_prg3_maths.pdf

Par exemple, sans être exhaustif parmi les diverses voix qui ont du poids – je mets à part Rémi Brissiaud dont je parle dans l'annexe - :

- Yves Chevallard ne parle ni du calcul sur les grandeurs ni de sa liaison avec l'analyse dimensionnelle[40] mais dans *Les Grandeurs en mathématiques au collège : une Atlandide oubliée*[41], il semble oublier qu'il a aidé à oublier cette Atlantide et que l'on ne peut l'utiliser en collège que si les élèves du primaire ont été habitués à raisonner et à calculer en termes de grandeurs, ce qui n'est pas le cas puisqu'ils ont été habitués à raisonner et calculer strictement en termes numériques de "nombres purs".

- Les programmes et commentaires de la commission Joutard qui se vantent pourtant d'être exhaustifs dans les détails des commentaires ne mentionnent ni la nécessité du calcul sur les grandeurs ni ne donnent quelque élément que ce soit sur la manière d'aborder le calcul dimensionnel à l'école primaire.

- Le rapport sur le calcul de la commission Kahane mentionne la question des grandeurs et parle de "réduction au numérique" mais ne parle pas du calcul sur les grandeurs et encore moins d'analyse dimensionnelle.[42]

- L'article de Rémi Duvert, *Faut-il mettre des unités dans les calculs?*[43], est probablement l'article le plus intéressant écrit sur la question, ce qui fait que je m'étendrai un plus pour en critiquer les faiblesses. Il remarque que les théorisations des maths modernes ne sont pas mortes puisque non seulement on n'écrit bien sûr pas les unités dans les opérations mais on refuse même d'écrire des *nombres concrets* : "*Quelques instituteurs s'interdisent d'écrire 4 m = 400 cm, et utilisent une flèche : 4 m -> 400 cm*". La première faiblesse de son texte est de poser la question d'abord sous un angle technique *Faut-il mettre des unités dans les calculs?* alors que la véritable question est *Doit-on enseigner le calcul sur les grandeurs ?*. La deuxième en découle puisqu'il pose cette question sans faire la différence entre les niveaux scolaires alors que la véritable difficulté n'est pas de donner une théorisation axiomatique de cette question (peu importe que le professeur puisse se rassurer du fait que 2×3m est bien une écriture mathématique parce que c'est une action de groupe ou un espace vectoriel puisque l'on sait depuis Hassler Whitney que c'est bien mathématique) mais de présenter une progression pédagogique, y compris les formes que doit prendre l'analyse dimensionnelle en fonction de l'âge de l'élève. La difficulté est, si l'on prend l'exemple de la multiplication, d'expliquer comment on lie d'abord l'enseignement de la multiplication des grandeurs *basique* (i.e. écriture 2×3m = 6m) et la multiplication des nombres purs au début de l'enseignement primaire , ce qui suppose d'ailleurs une définition de la multiplication qu'il ne donne pas, aux autres formes de cette multiplication (2l×3F/l, 2m×3m, 2m×3m^2, ….) qui ne peuvent que s'apprendre plus tard. Et, dans ce contexte, comment donner d'abord une formulation intuitive puis de plus en plus rationnelle à l'analyse dimensionnelle sous-jacente pour qu'elle soit, à chaque niveau, un outil utilisable par l'élève pour la résolution des problèmes.

---

[40] <u>Ajout du 15 février 2005</u> : ce texte a été écrit très rapidement pour la réunion de la SMF et non revu : je viens de le relire. Lorsque j'écrivais :" *Yves Chevallard ne parle ni du calcul sur les grandeurs ni de sa liaison avec l'analyse dimensionnelle*", je visais, pour le seul public qui m'intéresse vraiment, c'est-à-dire formé des enseignants du primaire qui ont à enseigner, justement ce niveau primaire. Et je visais à ce niveau la non-défense d'une progression pour le calcul des grandeurs, la non-référence à la nécessité absolue i) d'une définition des opérations en termes de grandeurs et d'analyse dimensionnelle ii) de l'apprentissage des formes élémentaires des raisonnements d'analyse dimensionnelle pour la résolution de problèmes.

[41] Yves Chevallard et Marianna Bosch, *Les Grandeurs en mathématiques au collège : une Atlandide oubliée,* Callimaque Revues, 1997.

[42] La commission Kahane peut dire qu'elle n'a pas à en parler au vu de ses missions. Mais alors, qui doit en parler?

[43] in Bulletin de l'APMEP, n° 436, p. 603-609.

Mais en fait le problème central de la restauration du calcul sur les grandeurs est non pas la restauration d'un cours général sur les grandeurs (grandeurs-quotients, grandeurs-produit…etc, qui peut être cependant utile pour la formation des enseignants) mais la mise en place en primaire de cours spécifiques sur les calculs sur les différentes grandeurs : cours sur la densité, les mélanges, les alliages, les vitesses, le calcul d'une dimension d'un solide quand on connaît les autres et le volume, etc… C'est par une pratique soutenue des problèmes sur ces différents chapitres, au lieu de les présenter comme exemple de *gestion de données* d'entités mathématiques comme *LA proportionnalité*, que l'on obtiendra non seulement la possibilité de la restauration du calcul sur les grandeurs[44] mais une réelle compréhension de l'arithmétique, base de la compréhension des mathématiques, de la physique et de l'algèbre.

Mais cette optique (Pensez-donc, refaire des cours *convenus* permettant de traiter des problèmes aussi *convenus* sur le prix de revient, les trois types de problèmes sur les vitesses…) remet tellement en cause les habitudes acquises depuis que l'on a dit qu'il n'était pas mathématique d'écrire 2m+3m=5m et que l'on a décidé que l'on enseignait d'abord des valeurs mathématiques générales en 70 pour les appliquer et maintenant pour en faire des exemples de gestion de données, qu'elle n'est peut être pas abordée parce que, même avec toute la bonne volonté du monde pour réintroduire le calcul sur les grandeurs, elle remettrait en cause les programmes. Sans compter – horreur - la question également centrale du rôle des unités de longueur comme base de l'apprentissage des nombres décimaux qui est également antagonique avec l'esprit de tous les programmes depuis 30 ans. Programmes dont il est de bon ton de dire qu'ils ne sont pas importants mais de les défendre bec et ongles dés qu'on les attaque.

Donc, tout va bien et la France s'ennuie.

[44] Je crains fort que, si les programmes actuels sont maintenus et si on les saupoudre de grandeurs et même de *calculs sur les grandeurs avec écriture des unités dans les opérations* pour faire bien, on n'aboutisse très rapidement à des discussions de précieuses sur le fait de savoir dans l'absolu s'il vaut mieux écrire 2×3m ou 3m×2, ce qui serait bien dans la tradition des querelles d'écriture du type doit-on dire *La mesure du segment AB est égale à 3cm* ou *AB=3cm* qui occupe encore les listes de discussion.

Multiplicateur et multiplicande : des notions inutiles voire nuisibles ?

1) Une définition du "sens la multiplication" dans un "vieux" manuel

Tiré de :
Brouet et Haudricourt Frères, *Arithmétique et système métrique Cours Moyen*, Librairies-Imprimeries réunies, Paris, 1912.

Sens de l'opération

La multiplication est une opération par laquelle on répète un nombre appelé multiplicande autant de fois que l'indique un autre nombre appelé multiplicateur.
Le résultat se nomme produit.
[…..]
70. - Le multiplicande et le multiplicateur se nomment les facteurs du produit.

71. - La multiplication s'indique par le signe × (multiplié par) qui s'écrit entre les nombres à multiplier :
8 × 5 (8 multiplié par 5).

72. - La multiplication n'est qu'une addition abrégée.

73.- Le multiplicande est toujours un nombre concret, c'est-à-dire qui exprime des objets déterminés, comme des arbres, des mètres, des francs, etc.

74.- Le multiplicateur est un nombre abstrait, qui indique seulement combien de fois on répète le multiplicande.

75.- Le produit exprime toujours des unités semblables à celles du multiplicande

Technique de l'opération

Je ne cite pas textuellement le cours mais, ici, le mot multiplicande désigne, lorsque l'on pose l'opération, le nombre que l'on place en haut tandis que le mot multiplicateur désigne celui que l'on place en bas. La notion de commutativité était introduite dans ce premier but pour montrer que, dans le cas de la multiplication de 4567 par 34, il était plus rapide de poser l'opération :

		4	5	6	7
		*		3	4
	1	8	2	6	8
1	3	7	0	1	
1	5	5	2	7	8

que l'opération :

				3	4
	*	4	5	6	7
			2	3	8
		2	0	4	
	1	7	0		
1	3	6			
1	5	5	2	7	8

2) Multiplicateur et multiplicande : des notions inutiles voire nuisibles ?

Au vu de l'importance fondamentale de cette question, j'y reviendrai dans un autre texte. Mais, il me semble utile de montrer ici que M. Brissiaud défend, encore en l'an 2000, la position des maths modernes[45].

A la page 30 du Livre du maître CE1[46] , il écrit, critiquant l'enseignement de la multiplication telle qu'elle était enseignée avant 70[47], c'est-à-dire basée sur le calcul sur les grandeurs qui permet de distinguer le multiplicande du multiplicateur : *"Les réformateurs de 1970 ont critiqué avec raison ce choix ; en effet il fait obstacle à la compréhension de la propriété de la multiplication qu'on appelle la «commutativité»".*

D'une part, jusqu'aux années 50, la commutativité était enseignée même si le «mot» lui-même n'était pas toujours prononcé car la première propriété de la multiplication donnée, juste après sa définition, était : "*Le produit de deux nombres ne change pas si l'on intervertit l'ordre des facteurs*". La tendance au "tout numérique" qui sera justifié théoriquement par les maths modernes se manifeste dés les années 60 par l'abandon de la définition de la multiplication en termes de grandeurs[48].

D'autre part, on peut dire que ce n'est pas l'enseignement du calcul sur les grandeurs qui était un obstacle à la compréhension de la commutativité, mais au contraire la réduction au numérique et l'insistance absolue sur la commutativité qui ont été un obstacle essentiel à la compréhension de la

---

[45] Les réformes centrales des années 50 à 70 (ces dates varient suivant les pays) ont été formellement abandonnées mais il en subsiste des pans importants qui en sont d'ailleurs les éléments les plus contestables
- c'est vrai pour les mathématiques modernes, surtout en France et en Israël mais beaucoup moins aux USA
- c'est également vrai pour la méthode globale de lecture dont les responsables prétendent qu'elle a disparu alors qu'elle continue à exister sous des désignations différentes. Lire : "*Whole Language Lives On*", rapport pour la *Fordham Foundation* de *Louisa Cook Moats* (http://www.edexcellence.net/library/wholelang/moats.html)

[46] Rémi Brissiaud, Pierre Clerc, André Ouzoulias, *Livre du maître CE1*, Edition Retz, Nathan, octobre 2000.

[47] Il définit d'ailleurs le "*changement de 70*" d'une manière étriquée qui lui permet de justifier son raisonnement : " *La solution adoptée par les réformateurs de 1970 fut radicale : ils préconisèrent de ne plus introduire la multiplication comme addition réitérée et de ne plus utiliser le mot " fois "*". En fait, cet aspect descriptif et partiel de la réforme vise à masquer le fait que les mouvements pédagogiques partisans des maths modernes (APMEP par exemple) présentèrent comme aspect principal et positif de cette réforme la suppression de tout calcul sur les grandeurs en prétendant "*qu'il n'était pas mathématique*".
Voir, par exemple :
- *Sur l'enseignement primaire en France (pages 9 et 10)*
i) Le calcul sur les grandeurs est interdit depuis 1970
ii) Cette interdiction a encore été confirmée officiellement récemment
ftp://ftp2.sauv.net/sauv/textes/milan+.pdf
ou
Compléments à" *Toujours moins de mathématiques à l'école*", Pour la science, Mai 2002
http://www.pourlascience.com/index.php?ids=lwjKiYVHRAvZqZMubPkV&Menu=Pls&Action=3&idn3=1465

[48] Et même, ensuite, en fait de toute définition explicite de la multiplication car l'essentiel est que "*l'élève en ait une image mentale*", forme savante du "*penser sans mots* " et *des "théorèmes en acte*"; pour vous en convaincre, demandez à une personne de moins de 40 ans de donner une définition de la multiplication.

multiplication renforcé ensuite par l'utilisation des calculettes qui ne savent faire – mal d'un point de vue pédagogique- que du calcul numérique.

Enfin, dans son texte, Rémi Brissiaud reprend sous une forme modernisée la matrice même des arguments éculés des années 70 contre l'enseignement du calcul sur les grandeurs. Mais reprenons d'abord l'argument de 70 développé par P. Jacquemier dans le numéro spécial[49] de la revue de l'APMEP consacré au soutien du B.O.E.N. introduisant les maths modernes à l'école primaire :

"***La multiplication est une opération commutative***.

Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de "nombres concrets". Cette expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication. Il n'y a pas à distinguer multiplicande et multiplicateur ; si on les distingue souvent, c'est parce qu'on pense plus à ces "nombres concrets", 3 sacs de 7 oranges, 15 barriques de 228 litres, qu'à des nombres. L'emploi de ces mots ne se justifie pas (l'emploi des mots soustractande et soustracteur se justifierait ; on s'en passe aisément d'ailleurs). [….]

Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5doigts 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts * 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges * 3 ou aussi bien 3 oranges * 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3*7 ou 7*3 ou 21."*

Rémi Brissiaud n'est pas le seul à reprendre mot pour mot les arguments de 70 qui sont restés quasiment intacts car la contre-réforme suivant les mathématiques modernes s'est passée de manière particulièrement bureaucratique, c'est-à-dire sans que soient discutées sérieusement les véritables bases théoriques de la réforme précédente : l'argument sur la soustraction m'a été servi tel quel l'an dernier sur la plus grande liste de discussion d'instituteurs … ce qui n'empêche qu'il est négatif d'un point de vue pédagogique.

En effet, P. Jacquemier centre le débat[50] sur la nécessité de donner des noms différents aux deux nombres de départ d'une opération et pense que ce serait justifié pour la soustraction. La seule raison valable, qu'il n'avance pas ici explicitement, mais qui était donnée à l'époque était qu'il était judicieux de donner deux noms différents aux deux nombres de départ d'une opération lorsqu'elle était commutative et de ne pas donner de noms différents lorsqu'elle ne l'était pas. Ainsi, la logique de P. Jacquemier est la suivante

- l'addition et la multiplication sont commutatives (2+10=10+2 et 2*10=10*2), on doit donc donner le même nom aux nombres de départ : les termes et les facteurs. Et il est effectivement dans l'usage courant de dire *"2 et 10 sont les termes de la somme 12*" et "*2 et 10 sont les facteurs du produit 20*".
- la soustraction et la division ne sont pas commutatives (10-2=8 mais 2-10=-8 ; 10:2=5 mais

---

[49] *Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent* par P. Jacquemier *in* La mathématique à l'école élémentaire, Paris, supplément au bulletin APMEP n°282, 1972, 502 pages. Pages 59 - 74

[50] Je ne traite pas ici la question de l'intérêt de l'emploi de la notion de "*nombre concret*" . La solution trouvée par Stella Baruk qui hérite des maths modernes le refus de l'emploi de l'opposition nombre concret/ nombre pur propose d'appeler *nombre* le nombre pur et *nombre de* le nombre concret. Comme toute distinction purement langagière, celle-ci n'est pas pertinente puisque
i) un nombre pur quelconque est lui-même un *nombre de* puisqu'il est par définition un nombre <u>de</u> fois 1
ii) dans la multiplication 2×3m, 2 , qui doit être appelé *nombre* dans la vision de SB pour l'opposer à *nombre de,* représente le *nombre <u>de</u> fois 3m.*

2:10=0,2), on doit donc donner des noms différents aux nombres de départ de l'opération. On distingue dans l'usage courant le dividende du diviseur pour la division. Mais on ne distingue pas le soustractande du soustracteur et il est logique de se demander pourquoi P. Jacquemier introduit ces notions dont il admet lui-même que "l'on s'en passe aisément"…

Si, dans l'analyse d'une opération, on met exclusivement en avant le caractère commutatif ou non de cette opération[51], cette position est cohérente et même intéressante lorsque que l'on ne s'intéresse qu'à la structure logique des opérations. Mais il y un double hic :

- il faudrait prouver que se placer de ce point de vue est justifié dès les débuts de l'enseignement

- l'usage courant (et même par des mathématiciens) est contraire à cette logique puisqu'il y a deux noms différents (multiplicateur et multiplicande ; dividende et diviseur) pour deux opérations dont l'une est commutative et l'autre pas tandis qu'il y a qu'un seul nom (terme) pour une opération qui est commutative (addition) et l'autre pas (soustraction).

Mais, tout au contraire si l'on se place non pas du strict point de vue numérique et logique mais du point de vue du sens des opérations lorsque qu'il s'agit de les apprendre comme outil de base de modélisation du réel c'est-à-dire comme base de résolution des problèmes, on peut comprendre par contre pourquoi la situation est ce qu'elle est (c'est-à-dire que l'on n'utilise ni soustractande ni soustracteur) :

- Comme on ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même nature (cela n'a aucun sens d'additionner ou soustraire des mètres et des secondes), il est naturel que, de ce point de vue, les deux nombres ne soient pas distingués et que l'on utilise simplement termes pour addition et soustraction. Si l'on fait une addition ou une soustraction où les deux termes sont des mètres (c'est-à-dire une distance), le résultat sera toujours des mètres (c'est-à-dire une distance).

- Par contre la multiplication et la division peuvent faire intervenir des grandeurs de natures différentes[52], c'est-à-dire qu'il n'y a pas de symétrie générale du point de vue dimensionnel entre les nombres qui interviennent, il est donc logique dans ce cas là que les noms désignant les deux nombres de départ soient différents. C'est à dire que lorsque l'on divise des mètres par des secondes, on trouve une vitesse tandis que lorsque l'on divise des secondes par des mètres, on trouve le temps mis pour

---

[51] C'est-à-dire lorsque c'est plutôt l'aspect logique/axiomatique des opérations qui est au premier plan, aspect qui n'est pas négligeable mais qui ne doit pas avoir une position centrale pour l'enseignement primaire.
Pour plus de détails, voir :

- *Sur l'enseignement primaire en France* - Page 11 et suivantes
C) *Aspect logique / aspect intuitif des mathématiques : le rôle des grandeurs. L'enseignement de l'ordre de grandeur … sans grandeur*
ftp://ftp2.sauv.net/sauv/textes/milan+.pdf

- de manière plus générale et plus approfondie:
Ferdinand Gonseth ,*Les mathématiques et la réalité : essai sur la méthode axiomatiqu*e, Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard,Paris,1936, réed.1974.
Deux extraits :
CHAPITRE IV : LE DOUBLE VISAGE DE L'ABSTRAIT (page 75-93)
http://michel.delord.free.fr/gonsethg.pdf

CHAPITRE VI :LA NATURE DU NOMBRE ENTIER (page 127-139)
http://michel.delord.free.fr/gonsethn.pdf

[52] C'est à dire qu'elles peuvent *aussi* faire intervenir des grandeurs de même nature : 6m : 3m = 2, 6m*3m = 18m²…

parcourir un mètre, c'est-à-dire une durée qui n'est pas une vitesse. Autre exemple : si l'on divise des Francs par des mètres dans un problème où l'on connaît le prix en Francs de 20 m de tissu, on trouve un prix (qui est le prix d'un mètre de tissu) alors que si l'on divise des mètres par des Francs, on obtient la longueur de tissu que l'on peut obtenir pour 1 Franc.

Enfin, dernier argument de P. Jacquemier : "*Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts * 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts * 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges * 3 ou aussi bien 3 oranges * 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3* 7, ou 7*3 ,ou 21".*

Il est tout à vrai, *<u>en général et numériquement</u>*[53], que si l'on utilise l'unité **u** et les nombres a et b, on a bien a*b**u** = b*a**u**[54]. Mais la faiblesse centrale de l'argument est double :

- l'exemple est choisi *ad usum delphini* car l'on voit bien sur l'exemple des sacs et des oranges qu'il n'est pas extensible alors que l'auteur veut en montrer la valeur générale : s'il est tout à fait vrai qu'il y a autant d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges que dans 3 sacs de 7 oranges, en serait-il de même pour 1 323 000 <u>sacs</u> de 423 oranges (ce qui peut exister) et 423 <u>sacs</u> de 1 323 000 oranges dont l'existence est assez aléatoire ?

- l'auteur se place d'un point de vue descriptif dans une situation qui l'arrange, mais pas du point de vue de l'élève qui cherche à résoudre un problème et cherche donc l'opération qu'il doit employer pour résoudre CE problème, ce qui correspond à modéliser mathématiquement UNE situation, celle qui est décrite dans LE problème :

- si le problème est : "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges ?*", la formulation mathématique correspondante est : 3 oranges * 7 = 21 oranges

- si le problème est : "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 3 sacs de 7*

---

[53] Si Carrefour achète à un papetier 2 537 500 de cahiers à 3,20€, le prix payé serait effectivement le même que s'il achetait 3,20 cahiers à 2 537 500€ l'un mais, justement, il ne peut pas acheter 3,20 cahiers à 2 537 500€ pièce. On confond aussi ici ce qui était nettement distingué dans les cours des années 50 :

- le calcul - c'est-à-dire l'aspect numérique - doit s'effectuer en prenant 3,2 comme multiplicateur, c'est-à-dire en ce sens celui qui est "en bas" dans la multiplication,

- mais ceci correspond à la multiplication 3,20€ *2 357 500 en terme de grandeurs qui traduit la situation à modéliser. En ce sens, le multiplicateur, "nombre pur" qui indique le nombre de fois est 2 357 500 et le multiplicande, " nombre concret " est 3,20€.

[54] Ou a(bu)=b(au), mais ceci ne relève pas en général de la commutativité puisqu'il s'agit en fait de aT(b*u)=bT(a*u) ou T est une "opération" externe et * une "opération" interne (que l'on pense en terme d'espace vectoriel ou en terme d'actions d'un groupe). Il y a plusieurs possibilités d'axiomatisations de cette situation : pour cela, on peut consulter par exemple, soit

- celle donnée par *Hassler Whitney* en 1968 dans *The Mathematics of Physical Quantities,* http://michel.delord.free.fr/h_whitney.pdf

-soit celle donnée par Nicolas Rouche en 1992 dans "*Le sens de la mesure: Des grandeurs aux nombres rationnels, Collection* Formation, Edition Dider Hatier, 1992..

Mais l'on pourrait aussi fonder axiomatiquement la multiplication sur une action de groupe. Ce choix n'a d'ailleurs aucune importance du point de vue de l'enseignement direct de l'opération en primaire. Le croire serait se placer encore une fois dans la problématique piagétienne qui identifiait le développement intellectuel de l'enfant et la logique de l'axiomatique. Les raisons qui fondent la nécessité d'enseigner le calcul sur les *nombres concrets* – c'est-à-dire centralement les grandeurs qui font partie du SI – tiennent beaucoup plus de la pédagogie intuitive chère à Ferdinand Buisson. Lire, de cet auteur :

1) LA MÉTHODE INTUITIVE , extrait du Rapport sur l'instruction primaire à l'Exposition universelle de Vienne en 1873,
INTUITION ET MÉTHODE INTUITIVE, Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire, Hachette, 1887.
http://michel.delord.free.fr/fb_intuit.pdf

2) Les deux articles ABSTRACTION du Dictionnaire Pédagogique (en rajoutant les coupures faites dans la seule édition disponible, celle de Pierre Hayat, Edition Kimé)
http://michel.delord.free.fr/fb_abstr.pdf

oranges ?", la formulation mathématique correspondante est : 7 oranges * 3 = 21 oranges

Or, en nous plaçant dans la situation de référence qui est l'apprentissage de la multiplication du CP au CE2, que doit découvrir un élève qui a comme problème à résoudre "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges ?*": il doit découvrir quelle est l'opération (addition, soustraction, multiplication, division) qu'il doit effectuer pour trouver la réponse. Sans utiliser toute l'argumentation méthodique basée sur les bases du calcul dimensionnel qui doit être enseignée en primaire mais que je ne peux développer ici, il doit remarquer, <u>en utilisant la définition de la multiplication qui la particularise du point de vue de l'analyse dimensionnelle par rapport aux autres opérations</u>, que l'opération utile dans ce cas est bien une multiplication dans laquelle

- le nombre qui se répète, c'est-à-dire le multiplicande, est "le nombre concret" 3 oranges.
- le multiplicateur, c'est-à-dire le nombre fois, est le "nombre pur" 7.

C'est-à-dire qu'il a d'abord à résoudre UN problème et le fait qu'il en résolve deux à la fois est assez anecdotique et est ici avancé strictement pour présenter la commutativité comme propriété centrale de la multiplication dans des exemples spécialement construits à cet effet et qui n'ont aucune valeur.

En effet, si l'on y réfléchit, l'emploi du même mot "sac" dans les deux problèmes ne sert qu'à faire illusion sur le fait qu'il représente dans les deux cas la même chose puisque dans le cas "1 323 000 <u>sacs</u> de 423 oranges et 423 <u>sacs</u> de 1 323 000 oranges", on voit que la communauté de sens sur les deux emplois du mot "sac" se distend très nettement. Mais on peut aller beaucoup plus loin dans l'absurdité d'un tel raisonnement[55] puisque lorsqu'un élève résout le problème "*Combien il y a-t-il d'oranges dans 7 sacs de 3 oranges ?*", on peut effectivement prétendre qu'il résout simultanément l'infinité des problèmes suivants une fois que l'on a admis que les mots employés n'ont plus de sens précis: "Quel est le prix de 7 pains à 3€ l'un ?", "Quel est le prix de 3 pains à 7€ l'un ?", "Quelle est l'aire d'un rectangle qui a pour longueur et largeur respectivement 3m et 7m ?"… Il me suffirait – car c'est cela qui est indispensable à ce stade - que l'on apprenne aux élèves à résoudre UN problème à la fois d'autant plus que l'insistance unilatérale sur les liens entre les phénomènes réels pensés seulement au travers de liens exclusivement numériques s'appelle … la confusion entre déterminisme physique et coefficient de corrélation ou mieux : numérologie. Que déduirez-vous du fait que, si je soustrais 49 qui est le millésime de ma date de naissance à 53 qui est mon age, je trouve 4 qui est le numéro de mon adresse ?

Revenons-en à M Brissiaud : il exhibe exactement le même type de problème que P. Jacquemier en 1972 :

> *" Considérons ces deux problèmes de “ Recherche du résultat d'un ajout réitéré ”*
>
> *Combien coûtent 2 cahiers à 17 F l'un ?*
> *Et*
> *Combien coûtent 17 cahiers à 2 F l'un ?"*

On peut donc faire les mêmes remarques : c'est l'emploi du même mot "cahier" alors qu'il ne désigne pas la même chose puisque, *a priori*, un cahier à 2 F n'a pas grand chose à voir avec un cahier à 17F qui crée une impression de ressemblance et qui tend à faire croire que la similitude des résultats numérique tiendrait aux caractères physiques de l'objet cahier. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la remarque *infra* de R. Brissiaud dans le cas où les deux problèmes seraient : "*Combien coûtent 2 cahiers à 17 F ?" et "Combien coûtent 17 crayons à 2 F* ?"

Mais nous allons voir que Rémi Brissiaud cependant innove sur un point:

> *L’enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3ème niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant 17 * 2.*

---

[55] Négatif à ce niveau d'enseignement mais lorsque l'on écrit 2 X+ 3Y ou 2X*3Y, on effectue bien des opérations sur des choses qui *n'ont pas d'autre sens* que celui que l'on a défini. Je reviendrai sur cette question qui est en fait celle du lien (c'est-à-dire à la fois ce qui lie et oppose) le calcul numérique, le calcul sur les grandeurs et le calcul algébrique.

Mais considérons le cas d'un enfant qui n'a pas encore étudié la multiplication. II peut seulement résoudre ces problèmes au 1er ou au 2ème niveau. Il calculera donc 2 fois 17, (17 + 17) dans un cas et 17 fois 2 (2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2) dans l'autre. Rien ne peut lui laisser prévoir qu'il trouvera le même nombre. Si, dans le premier cas, il calcule 17 + 17 et si, dans l'autre cas, il compte de 2 en 2 en levant successivement 17 doigts (2, 4, 6, 8...), on ne voit pas ce qui lui permettrait d'anticiper qu'il trouvera le même résultat.

L'équivalence de ces deux gestes mentaux (je vais calculer 2 fois 17 dans un cas, 17 fois 2 dans l'autre) n'a donc rien d'évident a priori *et pourtant c'est elle qui* fonde *la multiplication en tant qu'opération arithmétique.*

L'innovation consiste donc à dire que c'est la "commutativité" qui "*fonde la multiplication en tant qu'opération arithmétique*". L'argument serait puissant s'il n'était pas douteux *a priori* puisque a) si la commutativité fonde quelque chose, ce ne peut être que ce qui est commun à toutes les opérations qui le sont et pas seulement la multiplication b) le fait que la multiplication est commutative provient de la définition de la multiplication et, en ce sens là, se déduit logiquement de la nature de la multiplication[56]. Il y a quand même de grands risques, bien que le vrai puisse être logiquement déduit du faux, que la volonté de défendre encore maintenant ce qui était une absurdité mathématique en 1972 entraîne le fait de proférer des fautes mathématiques encore plus grandes aujourd'hui. Et s'il y a une réelle difficulté dans l'apprentissage des mathématiques comme outil des modélisation du réel, ce n'est certes pas ce type de raisonnement qui va le faciliter.

[56] Je n'ai pas dit que c'était à démontrer en primaire.

Compléments : Commutativité et associativité

<u>Commutativité</u>

Citation supplémentaire du texte de Marguerite Robert

"5) La multiplication dans N

Traditionnellement, elle était présentée à partir des "grandeurs". Il s'agissait de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe.

Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que

6F 3 = 18 F. ou   6m * 3= 18m*

3 6F = 18 F ou   3*6m = 18m*

Nous savons, en effet, que le signe "=" ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs". Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une "grandeur") et de multiplicateur (nombre de "grandeurs", nombre de "fois").

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante:

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}$$

Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d'écrire le naturel douze sous la forme :

*4*3 ou 3*4*

que nous appelons produit des naturels 4 et 3.

Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d'aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles.

Nous pouvons tout de suite, avec ces nouvelles écritures de douze, former des égalités :

$$\begin{array}{cc} 3*4 = 4*3 & 4*3 = 3*4 \\ 12 = 3*4 & 3*4 = 12 \\ 12 = 4*3 & 4*3 = 12 \end{array}$$

Par ailleurs, notre nouvelle situation de base n'est pas sans lien avec la précédente. Il suffit de modifier le dessin […]pour retrouver l'écriture de douze sous forme de somme 4+4+4 ou […] pour obtenir la somme 3+3+3+3

Nous pouvons donc passer de l'écriture d'un naturel sous forme de produit à deux écritures de ce naturel sous forme de somme de termes égaux.

Ainsi le naturel 5 × 2 peut s'écrire 2+2+2+2+2 ou 5+5

$5\times2=2+2+2+2+2$ $\quad$ $5\times2=5+5$

De même nous pouvons écrire une somme de naturels égaux sous forme de produit.

$7+7+7$ s'écrira 7×3 ou 3×7

$$7+7+7 = 7\times3$$
$$7+7+7 = 3\times7$$

Nous pouvons encore, par le passage implicite au produit, remplacer une somme de naturels égaux par une autre somme, par exemple :

$7+7+7$ par $3+3+3+3+3+3+3$

$$7+7+7 = 3+3+3+3+3+3+3$$

Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant :

$$5\times3$$

nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3."[57]

Quelques remarques :

a) *Nous savons, en effet, que le signe "=" ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs"* : il s'agit bien d'une ânerie mathématique , ce qui est un comble pour ceux qui se réclamaient de *la mathématique* contre le bricolage et écrasaient les autres de leur supériorité mathématique. Les erreurs des maths modernes tiennent bien au contenu enseigné recommandé par le mouvement "de la base" pour cette réforme et pas seulement à des excès dont auraient été responsables la bureaucratie ou je ne sais qui (bien que cet aspect ait existé) : si j'ai gardé le BO du primaire de 70 c'est qu'il nous avait été distribué justement en 73/74 à une réunion de CPR présidé par l'IPR …. qui nous l'avait donné comme preuve du fait qu'il n'y avait pas eu d'excès.

Cet aspect de la reforme des mathématiques modernes est évoqué par M. Artigue (mais sans indiquer bien sûr qu'elles posaient un problème de contenu mathématique) mais sous une forme qui prête à rire :

"On découvre aussi que les structures les plus générales, les premières qui soient enseignées dans une perspective avançant logiquement du simple au complexe, sont rarement porteuses de problèmes à la fois mathématiquement intéressants et accessibles aux débutants."

Elle prête à rire pour deux raisons :

- elle est inconséquente car elle ne fait pas le lien avec Piaget (la critique de Piaget semble encore pour le moins sommaire puisque la CREM le cite encore positivement tandis qu'elle démolit Dieudonné)

- surtout lorsqu'elle dit " *On <u>découvre</u> aussi* …" ce qui est réel mais ridicule pour une tendance qui a dit pis-que-pendre sur la pédagogie de la III[ème] république en traitant ceux qui leur faisaient des critiques de réactionnaires. Il suffisait d'avoir lu F. Buisson au lieu de le critiquer sans l'avoir lu :

> "C'est que l'esprit adulte, en pleine possession de ses facultés d'attention, de comparaison et de raisonnement, prend plaisir à suivre l'enchaînement des idées : il lui semble que le meilleur moyen d'apprendre, comme la meilleure manière d'enseigner, est, suivant une formule célèbre, *d'aller du simple au composé*. Mais le simple, c'est l'abstrait. Dans la réalité, dans la nature, il n'existe pas de choses simples, il n'existe rien qui ne soit complexe, rien qui n'ait des aspects nombreux, des attributs divers. Le réel ou le concret n'est jamais simple. Plus une idée est simple, plus elle est générale et partant éloignée de ce qui tombe sous les sens."[58]

---

[57] Op. cit., page 33 à 35.

[58] Article *Abstraction*, op. cit..

b) Marguerite Robert nous dit :

Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une "grandeur") et de multiplicateur (nombre de "grandeurs", nombre de "fois").

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante:

```
*   *   *   *
*   *   *   *
*   *   *   *
```

Là aussi, voyons la profondeur de la "nouvelle situation" :

"*On montrera sur un tableau analogue à celui-ci :*

```
•   •   •   •   •   •
•   •   •   •   •   •
•   •   •   •   •   •
•   •   •   •   •   •
```

qu'un produit de deux facteurs est indépendant de l'ordre de ces facteurs; et l'on utilisera cette propriété pour faire la preuve de la multiplication."
In *Henri Sonnet*, Article *Arithmétique* du *Dictionnaire Pédagogique*, Tome 1 de la première partie , 1887, pages 114 à 118.

L'erreur supplémentaire que fait M. Robert – et pas elle seule - , ou du moins qu'elle laisse entendre et ce sera compris ainsi par la grande majorité, est de croire que l'image qu'elle donne de la multiplication est plus abstraite que le fait d'écrire 4×3 oranges , c'est-à-dire que le tableau des points cités représente plus la nature *axiomatique* des nombres entiers. Mais, en fait, *l'image mentale* associée à 4×5 n'est pas 4×5 mais un tableau de 5 taches d'encre sur le papier disposés géométriquement de manière non anodine.

La preuve en est qu'il n'est pas disposé de la manière suivante :

```
        *   *   *   *
    *   *   *   *
*   *   *   *
```

qui suggère entre autres l'égalité 4 + 4 + 4 = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1

ou la disposition suivante

```
                *   *   *   *
        *   *   *   *
*   *   *   *
```

qui, elle, suggère, 4 + 4 + 4 = 1 + 1 + 2 + 2 +2 + 2 + 1 + 1

c) M. Robert écrit :

"Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes"

La grande nouveauté est que la notion d'*image mentale* va remplacer celle de *définition,* conception toujours existante. Alors vaut-il mieux mathématiquement et pédagogiquement l'*image mentale de la multiplication des entiers* donnée ou la définition de la multiplication donnée *supra* page 28.

Associativité

Reprenons P. Jacquemier :

"A*ssociativité*

Une grande dame, . souvent ignorée à l'école élémentaire. On pourra se reporter à un article du Bulletin (N° 263, pages 333-336) où j'ai essayé de montrer la place que devrait avoir à l'école primaire cette importante propriété de l'addition et de la multiplication."

Je n'ai pas cet article mais , même si le terme n'était pas employé, on trouve en 1887 :

"11. On aura à démontrer que *multiplier un nombre par un produit de deux facteurs revient à multiplier successivement par chacun de ces facteurs*. On connaît la démonstration. Pour faire voir, par exemple, que multiplier 5 par 12 revient à multiplier 5 par 4, et le produit par 3, on forme le tableau suivant:

5	**5**	**5**	**5**
5	**5**	**5**	**5**
5	**5**	**5**	**5**

qui renferme 3 lignes contenant chacune 4 fois le nombre 5, ou 4 colonnes renfermant 8 fois ce même nombre ; le résultat doit rester le même de quelque façon que l'on fasse l'addition."[59]

Ceci – qui n'est qu'un aspect de l'associativité de la multiplication - est proposé pour le niveau cours moyen : le niveau me semble approprié car la notion d'associativité ne devient vraiment utile et compréhensible lorsque l'on peut montrer que les propriétés qui permettent de définir la notion d'anneau représente bien le nombre minimum de propriétés de l'addition et de la multiplication qui permettent d'en déduire toutes les autres.

Avant , et cet avant est indispensable pour comprendre l'après, il faut enseigner l'ensemble des rapports non pas entre deux opérations - + et × - mais entre 4 opérations[60].

[59] *H. Sonnet*, article *ARITHMETIQUE*, partie consacrée au *Cours Moyen*, Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire, Hachette, 1887. Tome 1 de la première partie , pages 114 à 118.

Dans ce cadre, l'associativité de la multiplication est en lien / opposition directe avec la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction, c'est-à-dire que l'on peut énoncer ces propriétés sous la forme :

i) Pour multiplier un produit par un nombre, il suffit de multiplier un facteur du produit par ce nombre (un exemple en est : pour multiplier l'aire d'un rectangle par un nombre, il suffit de multiplier une de ses dimensions par ce nombre)
qui s'oppose à

ii) Pour multiplier une somme (ou une différence) par un nombre, il faut multiplier chaque terme de la somme par ce nombre,

Ces propriétés sont en relation avec les suivantes (liste non exhaustive) :

iii) Pour diviser une somme par un nombre, il faut diviser chaque terme de la somme par ce nombre

iv) Pour multiplier un quotient par un nombre, on peut
- *soit multiplier le dividende par ce nombre*
- *soit diviser le diviseur par ce nombre*

v) Pour diviser un quotient par un nombre, on peut
- *soit diviser le dividende par ce nombre*
- *soit multiplier diviseur par ce nombre*

vi) Si l'on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par un nombre, le quotient ne change pas.

Ces propriétés sont en elles mêmes extrêmement importantes puisque la iv), v) et vi) sont des introductions au calcul fractionnaire tandis que la vi) est la justification de base de l'algorithme de la division des décimaux : mais pour quoi l'enseigner puisque cet algorithme n'est plus au programme, que ce soit du primaire ou du collège.

---

[60] Bien sûr, ces règles doivent être données d'abord dans la langue maternelle et non sous forme d'égalités numériques. En effet, tant que l'élève n'a pas les moyens de comprendre que l'égalité est symétrique – ce qui un résultat demandant un fort niveau d'abstraction -, on doit considérer que l'égalité n'est pas symétrique. Ceci signifie que l'on ne s'autorise qu'un membre gauche représentant une opération et le membre droit son résultat avec comme exception générale l'addition car c'est une opération dont l'algorithme peut additionner plusieurs nombres en une fois. Pour un nouveau programme, il conviendrait de discuter d'autres exceptions, comme l'écriture 23 = 7× + 2 ou l'égalité de deux opérations simples comme 4+4+4=3×4, mais l'on doit s'interdire la définition générale de l'égalité comme "séparant deux écritures d'un même nombre " tant que sa signification ne peut pas être comprise. Le cas contraire, c'est-à-dire la volonté d'enseigner dés le primaire les règles algébriques de priorité opératoire n'aboutit qu'à des écritures du type 2+3×5= 15=15+2=17 que les élèves considèrent comme justes. D'autant plus que nombres d'enseignants du primaire - dont des formateurs- prétendent que lorsque ce type d'écriture est employé en classe, elle ne pose aucun problème :

" Voici ce que j'ai vu à diverses reprises sur quelques tableaux de CM:
100+70=170+40=210+60=270
et personne (ni le maître, ni les élèves) ne pouvait être suspecté de croire que 100+70=270 et personne n'était choqué par cette écriture.
On ne peut pas dire à priori ce qui a du sens ou n'en a pas. Dans le cas présent, je ne crois pas qu'on puisse dire que cette écriture va être un obstacle - fatal - pour les élèves concernés parce que leur mémoire ne contient pas ces signes, cette écriture, ce contexte." (Extrait d'une liste de discussion)

Le résultat en est, ensuite, que l'on doit déshabituer les élèves de cette écriture, c'est-à-dire que, comme d'habitude, la volonté d'introduire directement l'abstraction est un obstacle à son introduction lorsqu'elle peut être saisie. En soi, il y a des sauts que l'on ne peut éviter mais l'introduction de ce type d'écriture, trop précoce, ne présente aucun intérêt, surtout lorsque cela sert à oublier, maintenant au nom de la valorisation excessive des *procédures personnelles*, que l'écriture mathématique – celle-là au moins - est universelle.

D'une manière plus générale, et la question de l'associativité de la multiplication en est un bon exemple, on a fait d'abord beaucoup de bruit pour enseigner des notions qui étaient inenseignables au moment ou elles étaient proposées, et pas seulement parce que les enseignants n'étaient pas assez formés : la conséquence en est que maintenant , elles ne sont plus proposées à l'enseignement au moment où elles seraient un outil puissant . La commutativité de la multiplication en est un autre exemple actuel où ses restes – hors du contexte cohérent qui existait en 70- servent à justifier la fausse problématique des cours de Brissiaud tandis que ne figure plus nulle part au niveau lycée ce qui y serait à sa place , c'est-à-dire la démonstration de la commutativité de la multiplication à partir d'une définition de celle-ci .

Vous avez dit *définition* ? Ce sont des mathématiques d'avant la *société de l'image, de l'oral et de la communication*…