I) LES CHEMINS DE LA RAISON : LA MÉTHODE INTUITIVE

« *La méthode est une condition nécessaire du succès, … Ce qui est certain, c'est qu'en tout genre d'opérations pratiques, toutes choses égales d'ailleurs, celui qui procède rationnellement a sur celui qui vit d'expédients, au jour le jour, trois grands avantages pour le moins :*

- *ayant commencé par bien fixer son but, il risque moins de le perdre de vue et de faire fausse route;*
- *ayant médité sur les moyens dont il dispose, il a plus de chances de n'en omettre aucun bon et de prendre toujours le meilleur;*
- *enfin, sûr à la fois du but et des moyens, il ne tient qu'à lui d'aller aussi vite que possible : « Un boiteux dans le droit chemin, disait Bacon, arrive avant un coureur qui s'égare.* »

Article *Méthode* du Dictionnaire pédagogique, rédigé par M. Marion.

*

*   *

*

*   *

« *L'âme de tous les programmes et le principe inspirateur de l'enseignement primaire* », ainsi Ferdinand Buisson qualifie-t-il la méthode intuitive dans son *Rapport sur l'instruction primaire à l'Exposition universelle de Vienne en 1873* En quoi consiste cette *méthode intuitive*, qui touche au point clef en pédagogie qui n'est pas l'enseignement réduit au concret des utilitaristes mais l'utilisation de l'intuition enfantine dans l'accès gradué à l'abstraction, c'est ce que le lecteur découvrira par lui-même dans les articles du DP rassemblés dans cette première partie.

Nous nous contenterons ici de montrer, à partir de deux exemples inégalement développés, l'apprentissage du calcul et un aspect de l'expérimentation scientifique en primaire, que son rejet par la contre-réforme de 1970 a constitué non seulement un recul pédagogique majeur mais un retour aux formes rudimentaires à la fois dogmatique et empiriste de l'enseignement qui prévalait avant l'Instruction Publique. Mais il importe d'abord de donner quelques éclaircissements sur la question des méthodes et des contenus.

Méthode intuitive, programmes et abus des méthodes

Puisqu'il est question de méthodes et en particulier de méthode intuitive, il est judicieux de commencer cette présentation par la critique que fait Ferdinand Buisson de *l'abus du mot méthode dans l'instruction primaire* et en particulier de la dégénérescence désastreuse, pendant le début du XIX^{e} siècle de la notion même de méthode intuitive. Nous le citerons longuement pour prévenir les nombreux contre-sens provenant d'une lecture a-historique :

> L'*intuition* fut introduite [en Allemagne] dans tous les programmes. Mais de telles réformes ne s'improvisent pas, et, tant que l'esprit nouveau n'a pas fait à son image les intelligences et les institutions, rien n'est changé ; sous les noms nouveaux, c'est la vieille routine qui se perpétue. C'est ainsi que, par une apparente contradiction qui a souvent étonné les observateurs superficiels, les exercices d'intuition et de pensées imaginés, comme le mot l'indique, pour développer les sens, le jugement, la raison, étaient devenus en Allemagne et en Suisse, aussitôt après la mort du maître [Pestalozzi]et même en ses dernières années, une puérile et mécanique récitation de formules abstraites.
>
> Un tel résultat n'était pas évidemment celui que Pestalozzi avait rêvé : c'était plutôt le contraire. Aussi de 1815 â 1840, les systèmes s'accumulent pour arriver à donner quelque vie à ces exercices. Les uns essaient d'y mettre beaucoup d'ordre, d'y suivre une marche régulière; ils ne parviennent qu'à rendre ces leçons de choses de plus en plus sèches et de

> moins en moins intuitives; les autres entreprennent de les régénérer en ajoutant à la simple connaissance des objets matériels une sorte d'intuition morale et religieuse, qui éveille le sentiment du beau, du bien, l'amour du divin ; ... D'autres subdivisent l'intuition en autant de branches qu'il y en a dans le cours d'études primaires, et en deux degrés : le premier spontané et concret, l'autre abstrait et réfléchi.
>
> En dépit de tout, cette méthode, qui avait tant promis, n'était plus qu'une branche d'enseignement, et une des plus stériles : il y avait des leçons d'intuition comme des leçons de lecture et d'arithmétique. Ce qui devait être un esprit et animer toute la vie de l'école s'était matérialisé, jusqu'à devenir un bagage de plus pour la mémoire et un surcroît de routine; on faisait mécaniquement des exercices d'intuition où rien ne manquait plus que l'intuition. ... Ces différents efforts [de Dinter, Overberg, Diesterweg] n'avaient pas régénéré les exercices d'intuition et de pensée, et les meilleurs esprits se rencontraient pour souhaiter la suppression de ce « verbalisme méthodiquement ennuyeux »[1].

On a là, au sortir et pour échapper au dogmatisme moqué aussi bien par Comenius que Rabelais ou Montaigne, un des premiers exemples de dégénérescence de la méthode qui, pensant échapper à la scolastique, la reproduit en réduisant l'enseignement à de la stricte méthodologie au mauvais sens du terme. Cet exemple est central. Cette évolution s'est répétée à un niveau plus général encore au XX^{e} siècle, marqué en tout domaine par la domination d'une pensée atomisée, à la fois formelle et utilitariste. Le domaine scolaire n'y échappe pas : on constate une première forme de cette dérive formaliste bien analysée par Alain dans les années 30 :

> "Si les pédagogues ne sont pas détournés vers d'autres proies, il arrivera que les instituteurs sauront beaucoup de choses, et que les écoliers ne sauront plus rien du tout" (1932)[2]

suivie en France , à partir des années 80 par une nouvelle étape dans laquelle le primat de la méthode sert à la négation de la transmission du savoir, époque bien représentée par la mise en avant de *l'Apprendre à apprendre* contre le fait d'apprendre (Voir *infra*), dans laquelle la pédagogie du vide remplit l'esprit de l'élève d'un fatras de compétences incohérent. Un des effets non secondaires de cette dégénérescence est l'opposition à toute pédagogie, explicable mais non justifiable par l'expérience massive de générations complètes d'enseignants qui n'ont connu comme pédagogie que des thèses dont le rôle central est de ne pas instruire. Il importe donc de déterminer, sans en exagérer l'efficacité hors d'un combat de tous les jours, quels sont les facteurs qui évitent au maximum cette dégénérescence des méthodes et de la pédagogie vers le formalisme et les recettes. Nous chercherons une réponse justement chez

[1] F. Buisson *Rapport sur l'instruction primaire à l'Exposition universelle de Vienne en 1873*
Extraits à http://michel.delord.free.fr/fb-intuit.pdf

[2] Alain, *Propos sur l'Education*, Propos XXXVI, PUF,1965, page 70.

ceux qui ont su dépasser cette première dégénérescence de la méthode intuitive vers une "puérile et mécanique récitation de formules abstraites". Nous le chercherons en particulier chez Gabriel Compayré dans son *Cours de Pédagogie* aux écoles normales supérieures de Fontenay-aux-Roses et de Saint-Cloud.

> **Les méthodes d'enseignement.** — Dans un sens plus précis et plus particulier, *méthode* désigne tout ensemble de procédés raisonnés, de règles, de moyens que l'on pratique et que l'on suit, dans l'accomplissement d'une œuvre quelconque.
> De même que, pour découvrir la vérité, il y a des méthodes que la logique étudie, il y aura, pour communiquer, pour enseigner la vérité, d'autres méthodes dont l'étude constitue la pédagogie pratique.
> Ces méthodes varieront avec la nature des objets de l'enseignement. On enseignera la géographie autrement que la grammaire, les mathématiques autrement que la physique. Elles varieront aussi avec l'âge de l'enfant : il n'est pas possible de présenter l'histoire aux élèves du cours élémentaire sous la même forme qu'aux élèves du cours supérieur. Elles varieront par suite avec les divers degrés de l'enseignement : elles seront autres à l'école primaire et à l'école normale ; autres dans l'enseignement primaire en général, et dans l'enseignement secondaire.
> En d'autres termes, les méthodes d'enseignement devront toujours se conformer et s'adapter à ces trois principes généraux : 1° les caractères propres des connaissances que l'on communique à l'enfant ; 2° les lois de l'évolution mentale aux divers âges de la vie ; 3° le but propre et l'étendue de chaque degré d'instruction.[3]

Revenons sur *ces trois principes généraux* :

> *1° les caractères propres des connaissances que l'on communique à l'enfant* : les méthodes sont bien déterminés par les contenus d'enseignement (les éléments des programmes). Une remarque cependant pour éviter toute analogie a-historique : il convient de plus d'indiquer que, contrairement à la situation actuelle, quelles que soient les divergences entres les différentes pédagogies, il s'agit de différences de méthodes mais qui reposent sur un accord complet sur les contenus des programmes entre partisans du savoir et de l'Instruction, qui représentent tout l'éventail politique d'une société encore « à la Condorcet » pour laquelle l'instruction est une valeur en elle-

[3] Gabriel Compayré, *Cours de pédagogie théorique et pratique*, 1897, Librairie classique Paul Delaplane. Partie *Pédagogie pratique* : Leçon I : *Les méthodes en général* http://michel.delord.free.fr/comp-pp-01.pdf

même[4]. Laisant le répétera plusieurs fois mais le premier énoncé est du linguiste Michel Bréal, précédemment évoqué :

> *On devine que sur la matière de l'enseignement il ne peut guère y avoir de désaccord : les exigences de la vie sont si manifestes qu'en tout pays et quelle que soit la tendance générale de l'école, le programme des leçons est à peu prés le même*. (Michel Bréal, *Quelques mots sur l'instruction publique en France*, Hachette, 1872).

2° le but propre et l'étendue de chaque degré d'instruction : la structuration des programmes c'est-à-dire la conception des progressions de chaque discipline et les rapports de ces progressions entre elles

3° les lois de l'évolution mentale aux divers âges de la vie ; même si F. Buisson dit explicitement que la méthode intuitive est précisément "*la méthode même de l'enseignement primaire … et de l'enseignement populaire*", sont ici visées les différentes applications, suivant les âges, de la méthode intuitive en tant qu'inspiratrice d'un "*plan d'éducation [avec] pour caractère essentiel de substituer l'observation des choses à l'étude des mots, le jugement à la mémoire, l'esprit à la lettre, la spontanéité à la passivité intellectuelle*".

Ce primat du contenu, toujours bon à rappeler dans une période où toutes les théories pédagogiques prétendent avoir dépassé les débats sur les programmes et dénoncent le *syllabusitis*,[5] est encore rappelé par Compayré en conclusion du Chapitre sur les méthodes :

> **Esprit général d'une bonne méthode.** — Toutes les considérations qui précèdent n'ont d'autre utilité pratique que d'obliger le maître à réfléchir sur les principes mêmes de l'enseignement, sur la nécessité de tenir compte à la fois, et de la nature des enfants auxquels il s'adresse, et de la nature des connaissances qu'il communique. Qu'on n'aille pas s'imaginer qu'il suffit, pour bien enseigner, de connaître les distinctions abstraites de la pédagogie. La première condition pour être un bon professeur, ce sera toujours de posséder à fond la science qu'on est chargé de professer. Un pédagogue anglais, M. Laurie, le fait observer avec raison :
>
> « Un maître dont l'intelligence est cultivée, et dont la volonté est fortifiée par l'expérience, par la raison, par la religion, peut être en état de produire chez les autres les qualités qu'il

[4] Éventail que traduit par la diversité de sa composition l'équipe des contributeurs du premier Dictionnaire Pédagogique.

[5] Michel Artigue reprend positivement cette notion du projet Danois KOM (www.nvfaglighed.emu.dk) :
« Les raisons d'un tel choix: lutter contre la « syllabusitis »
Syllabusitis : Penser que la maîtrise d'un domaine peut être identifiée à celle des contenus d'un programme. »
In *Exposé de Michèle Artigue*, Conférence à l'IUFM de Grenoble le 17 mars 2004.

> possède lui-même, et d'adapter *inconsciemment* les procédés qu'il emploie à une méthode exacte[6]. »

Mais si G. Compayré donne toute son importance aux méthodes à la condition expresse qu'elles ne soient pas séparées du contenu à enseigner, c'est-à-dire des programmes et progressions, il en dénonce aussi l'abus dans des termes extrêmement modernes :

> **Abus de l'étude des méthodes.** — Mais, pour convaincu que nous soyons de l'utilité des méthodes, nous ne pensons pourtant pas qu'il faille s'attarder dans l'étude des généralités abstraites qui les dominent. Si l'on n'y prend garde, les pédagogues de notre temps se laisseront aller à construire une sorte de scolastique nouvelle, toute hérissée de formules savantes, de divisions subtiles, de termes pédantesques. Ils en viendront à faire d'une étude toute simple, toute pratique, une logique d'une nouvelle espèce, d'un aspect vraiment rébarbatif, où les grands mots succèdent aux grands mots, où les choses réelles sont oubliées[…] On a cru pendant longtemps qu'il était impossible de bien raisonner sans connaître les catégories et les règles du syllogisme. N'allons pas nous imaginer, par une illusion analogue, que, pour bien enseigner, il faille avoir chargé sa mémoire de tout ce fatras pédagogique, de ces nomenclatures aussi vaines que prétentieuses.

Signalons simplement la modernité de ce texte lorsque G. Compayré fait allusion à la scolastique "*qui prétendait qu'il était impossible de bien raisonner sans connaître les catégories et les règles du syllogisme*". N'est-ce pas exactement

- ce que René Thom reproche aux mathématiques modernes :

> "Tout l'argument moderniste repose en définitive sur le postulat suivant : En rendant conscients, explicites, les mécanismes implicites de la pensée, on facilite ces mécanismes. Or on soulève là un grand problème de la psycho-pédagogie, qui n'est nullement particulier aux mathématiques. […]
>
> De plus, ce transfert de l'implicite vers l'explicite, souvent inutile, peut être néfaste. Parfois l'élève ne peut pas faire le joint entre une activité mentale déjà présente dans son esprit et la description symbolique abstraite qu'on lui en offre (particulièrement si cette présentation est imprégnée d'esprit formaliste) ; en ce cas, cet enseignement restera pour lui lettre morte. Parfois, l'enfant soupçonne le joint, sans arriver à le concevoir clairement. En ce cas, la connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes. Enfin, il ne

[6] M. Laurie, *Primary Instruction in relation to Education,* Edimbourg 1883, p.27.

faudrait pas croire que la connaissance des structures standards en mathématiques épuise la Mathématique; bien au contraire, elles n'en représentent que les aspects les plus superficiels"[7]

- le prolongement de cette thèse, par l'enseignement de la "métacognition" à l'ensemble de la didactique des matières bien résumée par : "*Être métacognitif c'est être à la fois celui qui fait et celui qui surveille ce qu'il fait* ". Il s'agit donc bien de descendre du vélo pour apprendre le vélo, seule réalisation possible pour être simultanément sur le vélo et se voir pédaler. Nous n'exagérons en rien et *Anne-Marie Doly*, Maître de conférence en Sciences de l'Education à l'IUFM d'Auvergne, nous dit bien :

> Rappelons d'abord que, selon le sens de la métacognition (Doly 1998, 1999), il s'agit bien dans ce travail de conduire les élèves à construire des connaissances métacognitives (ou métaconnaissances) concernant à la fois des connaissances et des procédures, de telle sorte qu'elles soient réutilisables et pour cela, elles ont été construites de façon métacognitive, c'est-à-dire en mettant en œuvre des processus de contrôle de l'activité - anticipation/prévision, autorégulation, évaluation (qu'a t'on appris) - par prises de conscience régulières. Être métacognitif c'est être à la fois celui qui fait et celui qui surveille ce qu'il fait afin de le faire de façon plus efficace et transférable et pour cela, de savoir ce que l'on fait et ce que l'on sait."[8]

[7] René Thom, *Mathématiques modernes et mathématiques de toujours*, in " Pourquoi la Mathématique?" Edition 10/18, 1974. Disponible à http://michel.delord.free.fr/thom74.pdf

[8] Anne-Marie Doly, *Métacognition et transfert des apprentissages à l'école*, Cahiers pédagogiques n°408, nov. 2002. http://www.cahiers-pedagogiques.com/article.php3?id_article=979

Brèves remarques sur l'enseignement scientifique

Le sujet traité dans ce livre est l'enseignement des bases calcul et de la lecture, nous n'aborderons que très secondairement la question de l'enseignement des sciences, y compris de la fameuse leçon de choses, comme nous n'avons pas abordé un sujet tout aussi important qui est le rôle qui devrait être dévolu au travail manuel ou le rôle du dessin, rôle pourtant fondamental à la fois pour l'apprentissage de l'écriture et de celui du calcul[9]. Mais il importe cependant de préciser quelques points nodaux que sont la notion d'expérimentation scientifique, ce que l'on peut en dire pour l'école primaire et la critique des thèses de la redécouverte.

L'expérimentation scientifique a été nommée OHERIC, en attribuant cette conception à Claude Bernard, comme acronyme de la succession *Observation, Hypothèse, Expérience, Résultats, Interprétations, Conclusions,* par les spécialistes de la didactique dans les années 70 notamment pour « dépasser » l'enseignement des sciences tel qu'il était vu par les fondateurs de 1880 puisque les réformateurs des années 70 pensent leurs nouvelles théories comme une « véritable révolution ».

Mais la démarche scientifique ne commence pas par « l'observation » mais par la maîtrise antérieure d'un corpus scientifique sans lequel on ne peut absolument rien observer. Ce qui était connu dés la fondation de l'Instruction Publique il y a 120 ans. Pour s'en convaincre, il suffit de citer l'article *Observation* du Dictionnaire Pédagogique qui a été relu de plus par Claude Bernard :

> *Deux personnes se promènent dans la campagne à la recherche d'insectes; l'une d'elles est un naturaliste; il est myope; l'autre a de bons yeux; mais ce ne sont pas des yeux d'entomologiste; lequel pensez-vous qui trouvera le plus d'insectes dans l'herbe ou dans le feuillage? C'est le myope. Il les reconnaît si instantanément, qu'il parait les deviner. L'observation doit donc toujours être éclairée par les prévisions de l'observateur; l'idée de la forme et du fait possibles nous rend seule perceptible la forme et le fait réels : il faut qu'une attente définie de l'esprit imprime aux sens une direction déterminée pour que leur activité soit fructueuse. On l'a très bien dit : le savant qui ne sait pas ce qu'il cherche ne comprend pas ce qu'il trouve ou plutôt ne trouve rien : trouver, c'est choisir et choisir c'est discerner, c'est deviner, pour tout dire, c'est déjà comprendre.*

Une fois ceci admis se pose une seconde question : comment, en primaire, enseigner les débuts de l'expérimentation scientifique ?

---

[9] «*S'il est possible, dit M. Gréard, de commencer presque en même temps le calcul [et l'écriture lecture], c'est parce que l'épellation et la numération, le tracé des lettres et celui des chiffres sont des exercices de même degré et à peu près de même nature.*» Gabriel Compayré , *Cours de pédagogie théorique et pratique,* op.cit..

Si l’on veut tenter, comme compréhension de la relation de cause à effet, une véritable expérimentation scientifique à l’école primaire, c'est-à-dire en la rattachant à un corpus de connaissances qui permet l’observation et une participation active de l’élève, on ne peut utiliser que très modérément toutes les situations dites *concrètes* ou *réelles* car elles portent sur des objets qui sont par essence trop complexes et dans laquelle la multiplicité des interactions rend impossible que l’élève par lui-même perçoive les lois physiques qui sont en jeu.

Par contre le calcul et la géométrie sont des domaines privilégiés de cette expérimentation car les réalités mathématiques, parce que plus abstraites que les réalités physiques (dans lesquelles il y a toujours des « frottements » et plus « d’impuretés ») sont justement plus simples.

Or ceci n’est pas une grande découverte et faisait partie du corpus pédagogique connu depuis la fin du XIXème siècle, corpus effacé par les réformes des années 70. Citons Alain dans ses *Propos sur l’Education*. En voici un extrait significatif :

> *On me demande quelquefois : « Comment comprenez-vous les leçons de choses, qui ont pour fin de donner aux enfants une première idée de la nécessité extérieure ?» J'ai à répondre ceci, que les leçons de choses doivent être arithmétiques et géométriques. Dans le fait c'est par la géométrie que toutes les sciences ont commencé ; et je comprends à peu près pourquoi. Les choses peuvent nous instruire par les circonstances de nombre et de grandeur. Dès qu'un enfant a remarqué un certain rapport entre le rayon et la circonférence d'une roue, il peut faire autant de mesures qu'il voudra, sur des cercles de diverses grandeurs, qu'il tracera lui-même soit sur la terre au moyen d'un piquet et d'un cordeau, soit sur le papier, au moyen d'un compas. Les plus profondes études sur le cercle, les angles et les cordes ne seront que la suite de cette investigation directe, et qu'un perfectionnement de cette méthode d'observation qui ne laisse rien à deviner ni à supposer. C'est ici que trouve à s'appliquer la forte maxime de Confucius : « La science a pour fin de connaître l'objet ; quand l'objet est connu, la science est faite. » Et si quelqu'un doute si deux et deux font quatre, c'est qu'il ne sait pas bien ce que c'est que deux, trois et quatre. Que l'on considère des noix, des osselets, des petits cubes de bois, ou des points sur le papier, on arrivera vite à connaître le contenu de ces nombres, à les faire et à les défaire, sans qu'il y reste rien de caché. C'est pourquoi je disais que la mathématique est la meilleure école de l'observateur.*
>
> *C'est même la seule. Hors des nombres et des figures, il n'y a point d'observation au monde qui ne nous trompe, et qui ne veuille être redressée… Il faut donc se délivrer maintenant, car les dieux changent, de ce préjugé scolaire d'après lequel les sciences mathématiques sont les plus difficiles de toutes ; car ce sont les plus faciles, au contraire, et les seules qui conviennent à l'enfance.*
>
> Alain, *Propos sur l’éducation*, 1932. Propos LXII

Cette expérimentation peut exister d'ailleurs sous deux formes

- une qui correspond aux normes des programmes du primaire: on peut expérimenter de manière très simple la conjecture : *la somme de deux nombres impairs est paire* et en donner une démonstration, qui n'est certes pas axiomatique mais qui est une vraie démonstration correspondant au niveau de progression atteint en calcul. On peut montrer aussi la non équivalence des propositions «*La somme des deux entiers n et m est paire* » et « *n et m sont des nombres entiers pairs* »

- une qui sort directement des cadres du programmes qui consiste, par exemple, en manipulant des petits cubes , à trouver la somme des nombres de 1 à 4, 1 à 5,1 à 6 puis vérifier la conjecture pour les nombres de 1 à 10, 1 à 20, 1 à 30 et donner la réponse sans manipulations pour 1 à 300. Dés la fin du XIXeme siècle, le mathématicien Claude Laisant, ancien président de la SMF et inspirateur de Francisco Ferrer, en a donné, dans *L'initiation mathématique* de multiples exemples en montrant que les mathématiques n'étaient pas seulement déductives mais inductives, ce qui est nié dans les caractéristiques données le plus souvent pour les mathématiques, qui, n'y voyant pas une activité expérimentale sur les objets de l'esprit ne voit dans celle-ci que des « *capacités déductives* » (qu'il n'est pas question de nier, bien sûr).

Cette problématique sur l'expérimentation <u>*pour le primaire*</u> permet de redonner aux leçons de physique et de sciences naturelles leur caractère de pures leçons de choses absolument indispensables mais qui ne peuvent pas donner plus que ce permet leurs domaines en termes d'expérimentation scientifique, au vrai sens du terme et effectuée de manière autonome par l'élève.

L'abstraction mathématique dans la méthode intuitive et les *maths modernes*

Une fois admis que l'enseignement des mathématiques vise pour partie la maîtrise par l'élève d'abstractions reliées logiquement, ce qui relève du truisme car toute pensée rationnelle est par définition abstraite, on peut se demander comment *passer à l'abstrait* en mathématique.

Sur cette question, il convient d'abord d'éclairer quelques contre-sens devenus courants depuis la réforme dite des « maths modernes ».

Le premier consiste à évacuer la difficulté du passage à l'abstrait en enseignant directement l'abstrait. Il est signalé de manière générale par Buisson et par Félix Klein[10] pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques

> Dans l'ancienne école, écrit l'un, ou, pour mieux dire, dans toutes les anciennes écoles, c'est par l'abstraction qu'on débutait invariablement, c'est de l'abstraction qu'on faisait le véhicule de l'enseignement à tous les degrés…Ainsi, dans ces diverses branches, telle a été la tendance primitive de la pédagogie ; et c'est celle de tous les maîtres au début de leur carrière : partir de l'idée générale de la science à enseigner, la décomposer logiquement en un certain nombre de notions abstraites, définir chacune de ces notions, faire apprendre aux élèves ces définitions, puis en déduire les règles ou formules, et continuer ainsi en construisant définition après définition, chapitre par chapitre, tout l'édifice théorique de la science, sauf à leur en faire faire ensuite les applications sous forme d'exercices, de problèmes, d'exemples. » (Article Abstraction)
>
> Et l'autre ironise :
>
> L'enseignement logique est pour les mathématiques ce qu'est le squelette pour un organisme animal qui ne saurait se tenir sans squelette ; mais ce serait une étrange zoologie que celle qui ne traiterait jamais que du squelette des animaux[11].

La réduction au logique est en effet un danger permanent pour le pédagogue. N'apprenant aux élèves que des formules vides, elle converge dans ses résultats avec les théories qui, refusant *a priori* l'abstraction, défendent un enseignement pratique dont le contenu se réduit également à des procédures vides de sens.

---

[10] Félix Klein (1849-1925) Mathématicien connu pour avoir ramené l'étude des différentes géométries à celle de leur groupe de symétrie, Félix Klein s'est également intéressé à l'enseignement de la culture mathématique avec une série d'ouvrages qui présentent de manière intuitive les mathématiques élémentaires « *à partir d'un point de vue avancé* ».

[11] Félix Klein, *Ueber angewandte Mathematik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen,* cité par *Ludovic Zoretti, in* Préface de *Leçons d'algèbre à l'usage des classes de mathématiques*, Deuxième édition, Vuibert , 1921.

Une autre erreur consiste à opposer de manière absolue **L**'abstrait et **Le** concret. Encore plus dans le cadre de l'apprentissage que dans celui de la compréhension des progrès de la pensée, on doit plutôt distinguer différents niveaux d'abstraction. En effet, l'abstraction n'est pas seulement un résultat mais un processus de simplification dans lequel chaque étape est en quelque sorte l'abstrait de la précédente et le concret de la suivante[12].

Le philosophe et mathématicien Ferdinand Gonseth[13] traite excellemment en 1935 la question dans *Les mathématiques et la réalité*[14], aussi bien à propos de la genèse de la notion de nombre que de celle de points et de droites.

Pour notre part, nous nous en tiendrons à genèse de la notion de nombre entier, point essentiel dès les premières années d'école et qui permet de mettre en lumière le caractère nécessairement progressif du passage à l'abstraction.

Certains ont pensé qu'il convient d'apprendre systématiquement aux enfants à compter en n'utilisant que des nombres purs. C'est tout à la fois sauter directement dans une abstraction trop élevée pour eux et sous estimer leur capacité d'abstraction. Car s'il est évident que la notion du nombre entier *10* est plus abstraite que la notion *10 pommes* et que la notion *10 kilomètres*, il n'est pas moins évident que *10 pommes* représente déjà un niveau d'abstraction : penser 10 pommes suppose en effet, comme il n'existe pas 10 pommes strictement identiques, que l'on soit capable de ne pas tenir compte de leur couleur, de leur taille (et que l'on veuille les compter). Et penser *10 kilomètres* est encore un peu plus abstrait que penser *10 pommes* puisqu'il s'agit d'une distance que l'on ne peut percevoir directement par les sens et dont la compréhension suppose, si ce n'est celle du système métrique (qui est un *système*, c'est-à-dire une conception théorique), au moins celle de la liaison du kilomètre avec le mètre. Initier les enfants au comptage avec des collections d'objets, leur apprendre les unités de mesure, ce n'est donc renoncer à l'abstraction que dans la perspective d'enseignement signalée plus haut qui réduit l'enseignement à l'enseignement direct de l'abstrait.

[12] Article *Abstraire* de l'Encyclopédie : «*ABSTRAIRE, v. act. c'est faire une* ***abstraction;*** *c'est ne considérer qu'un attribut ou une propriété de quelque être, sans faire attention aux autres attributs ou qualités* ».

[13] Ferdinand Gonseth, 1890-1975, mathématicien spécialiste de la philosophie des sciences et tout particulièrement des mathématiques. Cofondateur, avec G. Bachelard et P. Bernays, de la revue philosophique Dialectica (1947). Sa pensée eut un important impact dans le monde scientifique secoué par la crise des fondements déclenchée par les premières contradictions nées de la théorie des ensembles de Cantor. Il se lia d'amitié avec les plus grands mathématiciens et physiciens de l'époque : Lebesgue, Bernays, L. de Broglie, W. Heisenberg.

[14] Ferdinand Gonseth *Les Mathématiques et la réalité : Essai sur la méthode axiomatique*, 1936. (Réédition: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris,1974.) Extraits :
Chapitre IV : le double visage de l'abstrait http://michel.delord.free.fr/gonsethg.pdf
Chapitre VI : la nature du nombre entier http://michel.delord.free.fr/gonsethn.pdf

Notons au passage que la différence dans le degré d'abstraction entre 10 centimètres et 10 kilomètres justifiait la distinction, aujourd'hui perdue mais utilisée au début du XX^{e} par les auteurs de manuels qui en savaient la richesse, entre *unités fictives* et *unités effectives*. Ces dernières correspondant à une unité existant comme appareil matériel et que l'on « reporte » pour effectuer une mesure, par exemple un mètre ou un litre. Les premières, comme le km, n'existant pas sous forme matérielle et servant à obtenir une mesure par un calcul. Toutes les unités d'aire sont bien ainsi des mesures *fictives* puisque l'on n'évalue pas la surface d'un jardin rectangulaire en reportant un carré d'un mètre de côté sur sa surface mais en multipliant sa longueur par sa largeur.

Remarquons cependant qu'il ne faut pas interpréter l'importance de l'enseignement des nombres concrets et de la manipulation des grandeurs physiques comme un refus d'enseigner simultanément les nombres concrets et les nombres abstraits : pour s'en convaincre il suffit de lire les manuels de l'époque dans lesquels on apprend dés le début les tables d'addition qui sont bien des nombres abstraits ou de rapporter l'anecdote suivante comptée par Henri Canac, inspecteur général de l'enseignement primaire :

> Il y a quelques années, mon jeune ami Pierre (4 ans 3 mois, élevé seul dans sa famille), s'en allait au gré de son humeur à la découverte des premiers nombres. Déjà il connaissait 1 (tout seul), 2 et 3; il savait reconnaître 2 bols, 3 enfants ou même 3 coups frappés sur la table. Or, cette semaine-là il était en train de conquérir le nombre 4.
>
> - *Mais, dis-moi*, s'écria-t-il un jour ex abrupto, *2 et 2 c'est donc aussi 3 et 1 ?*
>
> Il jubilait, après cette glorieuse découverte. Je répondis affirmativement et, pour éprouver le contenu de cette Intuition, je pris 4 objets que je trouvai sous la main et j'en formai des schémas par 2 et 2, puis par 3 et 1; mais lui, ravi dans sa contemplation idéale, ne s'intéressait guère à ces manipulations vulgaires; et lorsque j'ajoutai, d'un ton finement pédagogique :
>
> - *Et bien! que ce soient des carottes ou des couteaux, toujours 2 et 2 c'est aussi 3 et 1.*
>
> Mon jeune mathématicien laissa tomber sur moi un regard lourd de dédain et me répondit :
>
> - *Mais bien sûr, du moment que 2 et 2 c'est aussi 3 et 1* (sous-entendu, en général et dans l'abstrait), *qu'est-ce que ça me fait, ces carottes et ces couteaux?*
>
> Je rentrai en moi-même et je compris que je venais, en niaisant inutilement, d'offenser en ce petit bonhomme la majesté même de l'esprit.
>
> Ne méprisons donc point tant l'enfant. Faible encore et balbutiant, il n'en est pas moins porteur d'esprit et parfaitement capable, dans son domaine limité, de s'élever à la joie de la découverte spéculative. Il suffit de ne pas excéder sa portée : et mon jeune ami, que les

propriétés mathématiques de 4 soulevaient d'une flamme d'enthousiasme, se trouvait parfaitement incapable à ce moment de former la notion de 5.[15]

En ce sens, bien que le texte ne soit pas clair – ce qui est déjà un défaut - et comporte des tendances clairement utilitaristes, il ne faut pas interpréter non plus au sens étroit la directive suivante des IO de 1945:

Au cours moyen seulement, on rencontrera des exemples de nombres abstraits et indépendants des unités dans l'étude des pourcentages et des fractions simples.

Pour que cette affirmation ne soit pas une erreur, elle ne peut s'interpréter que sous la forme suivante : si l'on considère les pourcentages et les fractions comme des opérateurs, ils ne peuvent être conçus que comme des nombres abstraits, puisque, les fractions peuvent être considérés comme des nombres concrets comme, par exemple, ¾ litre.

Cette parenthèse refermée, reprenons la description par Ferdinand Gonseth de la genèse de la notion de nombre entier.

Il distingue dans celle-ci trois époques :

On peut distinguer dans l'évolution du concept de nombre entier au moins trois époques assez distinctes : la première précède toute tentative consciente de systématisation ; la deuxième - l'époque spécifiquement arithmétique - se caractérise par une formulation explicite de la théorie des nombres entiers ; la troisième seulement aborde au plan du « logique ». Le passage d'une époque à l'autre s'accompagne d'une transformation profonde de l'essence même du nombre.

Sautons la première étape, celle de l'enfant qui sait seulement *dire les* nombres, ceux-ci n'étant encore pour lui que des mots[16], pour nous intéresser au passage du stade arithmétique, qui correspond à la connaissance du nombre entier chez un adulte qui sait compter, au stade logique de cette connaissance. Ce passage qui va nous amener à définir la notion d'unité et donc celle de nombre concret, c'est-à-dire de nombre suivi d'un nom d'unité nous permettra de voir comment une présentation purement logique et strictement justifiée dans une perspective axiomatique peut présenter de graves inconvénients du point de vue de l'enseignement.

Ainsi, pendant près d'un siècle, cette définition a été faite comme dans la page de manuel reproduite ci-contre. C'était là, nous a-t-on dit, une méthode non mathématique car non axiomatique. Et c'est vrai qu'on peut s'y prendre autrement, de la manière suivante.

[15] Henri Canac *in L'enfant et le nombre*, Didier, 1955. Page 14.

[16] Comme le fait remarquer Rudolf Bkouche, ils doivent être enseignés à cette étape comme noms et comme adjectifs numéraux.

Considérons donc l'ensemble des entiers naturels **N** : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,…n…} muni de ses deux lois de compositions + et × et l'ensemble des multiples de 2 , nommé **2N** : {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 …2×n…}.

Munissons l'ensemble **2N** de deux lois de compositions

- l'une notée + : (2×n) + (2×m) = 2×(n+m), ce qui correspond à l'addition que l'on connaît
- l'autre notée × : (2×n) × (2×m) = 2×(n×m), c'est-à-dire que pour multiplier deux nombres *rouges* par la multiplication *rouge*, on prend le double du produit de leurs moitiés : ainsi 6×8 vaut 2×(3×4) , c'est-à-dire 24.

Prenons deux éléments de N, 5 et 7 auxquels on fait correspondre, dans **2 N**, leurs doubles, soit 10 et 14 (par l'application *Double* : *f*(n)= 2× n de N dans **2N**)

Si l'on additionne 5 et 7, on trouve 12 et si l'on additionne leurs correspondants 10 et 14, on trouve 24 qui est bien le double de 12.

Si l'on multiplie 5 et 7, on trouve 35 et si l'on multiplie leurs correspondants 10 et 14, on trouve 70 qui est bien le double de 35.

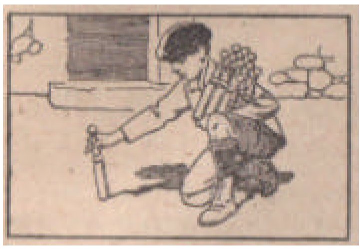
Ensemble		***Nombres de départ***			***Somme***	***Produit***
N		**5**	**7**		**12**	**35**
×2 ?						
2N		**10**	**14**		**12**	**70**

De plus, par exemple, 1 est l'élément neutre de la multiplication dans N puisque multiplier par 1 n'importe quel nombre redonne le même nombre. Le correspondant à 1 dans 2N est son double 2 qui joue exactement le même rôle d'élément neutre pour la multiplication rouge dans **2 N** : par exemple 2×8 vaut 8 et 2×12 vaut 12.

Autrement dit, l'ensemble des nombres entiers et celui des nombres pairs munis des opérations indiquées se comportent exactement de la même manière, ce que l'on exprime en disant que (**N, +,×**) et (**2N, + , ×**) ont des structures isomorphes. Et la structure logique - axiomatique - de N est ce qu'il y a de commun à N et 2N (mais aussi à 3N, 4N, 5N,….), qui

- M. Delfaud et A. Millet –
Arithmétique – Cours moyen et supérieur - Hachette - 1928

1ère LEÇON.
LES QUANTITÉS ET LES NOMBRES



J'ai un jeu de quilles....
Chaque quille est une ***unité***.
Le paquet de quilles est composé d'unités semblables et distinctes : c'est une ***grandeur*** ou une ***quantité***.

La laitière remplit un pot à lait en se servant d'un litre.
Le litre est une ***unité***.
Le pot à lait est une ***grandeur***, qui n'est pas composée d'unités distinctes.

1. Les grandeurs que l'on compte. — Je *compte* des quilles une à une : je forme ainsi des quantités de plus en plus grandes que je désigne par des *nombres* :
une quille... ***deux*** quilles... ***trois*** quilles... ***quatre*** quilles... etc...

2. Les grandeurs que l'on mesure. — La laitière a compté combien de litres elle a versés dans le pot à lait. Elle a fait une *mesure*. Le nombre obtenu, trois litres, est le résultat de cette mesure.

On compte les grandeurs composées d'unités séparées; on mesure les autres.

3. Nombres concrets. Nombres abstraits. — Un ***nombre concret*** est un nombre dont la nature des unités est indiquée.
Ex. : *dix* quilles, *cinq* boules, *neuf* mètres, *trois* litres.
Un ***nombre abstrait*** est un nombre dont la nature des unités n'est pas indiquée.
Ex. : *dix, cinq, neuf, trois.*

4. Définitions. — Une *grandeur* ou *quantité* est ce que l'on peut compter ou mesurer.
***L'unité* est l'un des objets qui composent la grandeur, ou ce qui sert à la mesurer.**
Le *nombre* exprime combien de fois la grandeur contient l'unité.

EXERCICES ORAUX

1. — Nommer cinq grandeurs que l'on compte, cinq grandeurs que l'on mesure, et l'unité choisie dans chaque cas.
2. — Énoncer cinq nombres concrets, cinq nombres abstraits.
3. — Comment reconnaît-on que deux grandeurs sont égales ? inégales?
4. — Quelle est la plus petite différence qui puisse exister entre deux grandeurs que l'on compte ? Donner deux exemples.

correspond bien à l'abstraction définie *supra* puisque l'on oublie dans ce cas ce que représentent 1 ou 2 par exemple pour ne garder que les liens logiques que les nombres entretiennent entre eux.

On pourrait présenter cet aspect logique sous la forme des axiomes suivants que respectent bien (**N, + , ×)** et tous les (***n*N, + , ×**) :

> ***Axiome 1*** *: A chaque nombre a succède un nombre entier a' différent de a*
>
> ***Axiome 2*** *: Seul le nombre 1 ne succède à aucun nombre*
>
> ***Axiome 3*** *: Tout nombre succède, directement ou par intermédiaire, à 1*
>
> Mais ceci ne suffit pas, car, si la suite 1,2,3,4,5,6….. convient bien, la suite 1,2,3,4,2,3,4,2,3,4… conviendrait aussi . On ajoute donc :
>
> ***Axiome 4*** *: La suite des nombres qui, de proche en proche, succèdent à un nombre a quelconque est isomorphe à la suite construite à partir de 1.*

Comme le fait remarquer F. Gonseth :

> Avec ces conventions, toutes les opérations arithmétiques effectuables dans la suite des entiers trouvent un équivalent dans la suite des entiers pairs et réciproquement. La suite de tous les entiers et la suite des entiers pairs seulement, considérées sous un certain angle, apparaissent donc comme identiques, bien que considérées sous un autre angle nous sachions parfaitement reconnaître en quoi elles diffèrent…
>
> Cette axiomatisation s'accompagne d'une analyse de la notion de nombre qui n'est pas sans valeur. Mais il ne faut pas en exagérer la portée. Dans tous les cas, les axiomes ne sont aucunement des décrets librement et arbitrairement formulés, avec l'intention et le pouvoir de conférer l'existence aux entités que sont les nombres.
>
> En particulier (qu'on veuille se souvenir à cette occasion de notre analyse du géométrique), il y a dans la notion de nombre tout un côté que les axiomes ne touchent pas : c'est justement celui qui, dans l'exercice de la pensée, nous importe le plus ; celui qui se rapporte à l'idée de grandeur et que, par analogie avec le côté spécifiquement géométrique des notions spatiales, nous pourrions nommer le côté spécifiquement arithmétique ou numérique.

L'aspect logique évoqué par Gonseth n'est effectivement pas *sans valeur* puisque c'est lui qui

> - à terme, a permis d'établir - évidence *pour celui qui le sait* mais conquête de l'esprit humain - que la même opération 5 × 3 permet de trouver que l'aire d'un rectangle de 3m sur 5m vaut 5m × 3m = 15m^2, de dire que 3×5 heures est égal à 15 heures.

- permet, dans la résolution des problèmes d'arithmétique, une fois que l'on a précisé le système d'unités dans lequel on calcule et que l'on a choisi les opérations à effectuer, de calculer *aveuglément*, c'est-à-dire en ignorant la nature des unités utilisées, en étant sûr de trouver le *bon résultat*
- a permis la création de tous les outils de calcul formel.

Mais, comme le dit aussi Gonseth, ***on y perd l'idée de grandeur*** ou de quantité. Dans ce cas, en effet, on assimile 1 et 2 puisque 2 joue le rôle d'unité dans **2N** alors que l'on sait très bien qu'ils représentent des quantités différentes. Et en perdant l'idée de grandeurs, on perd également le lien qui existe entre le calcul purement numérique et les raisons du choix ou non de telle opération pour résoudre un problème donné d'arithmétique. Si l'on doit calculer le prix de 5 kg de fruits à 7 € le kg, rien ne s'oppose strictement du point de vue numérique à ce que l'on calcule 5+7 = 12, mais, si l'on se place du point de vue du calcul sur les grandeurs (ou de l'analyse dimensionnelle) on sait alors que l'addition 5 kg + 7 € n'a pas de sens en tant que calcul sur les grandeurs puisque – si on l'a appris - on sait que l'on ne peut additionner que des unités de même nature et n'effectuer l'opération que si les deux nombres sont exprimés dans la même unité.

En quelque sorte, le fait que tout nombre ne soit pas conçu comme une grandeur vient fondamentalement du fait que l'***unité*** n'est plus conçue comme une grandeur, c'est-à-dire sous la forme d'un nombre concret.

On retrouve les multiples sens de 1 que l'on peut exprimer (certes pas en primaire et même pas dans le secondaire) sous la forme $1 = 1\times\mathbf{u}$, ou $\mathbf{u} = 1\times \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ étant l'unité physique, c'est-à-dire la dualité de 1 conçu simultanément

i) comme unité abstraite et comme premier nombre abstrait, c'est-à-dire comme unité et comme nombre d'unités. Cette difficulté n'a d'ailleurs été levée historiquement qu'en 1585 par Simon Stevin qui, dans la deuxième définition de son *Arithmétique*, affirme pour la première fois sous la forme euclidienne des demandes «*Que l'unité est nombre* », c'est-à-dire que l'on commence à compter à 1 et non pas à 2. Ceci correspond, si ***u*** est l'unité, à identifier 1 et ***u***.

ii) comme nombre abstrait et comme représentation abstraite de la grandeur unité.

Mais revenons à notre sujet qui est l'enseignement du nombre entier du nombre entier tel qu'on peut le conduire à l'école primaire. Gonseth aidant, on se sera aperçu que la définition purement logique, sans même parler de sa forme axiomatique, que nous venons de présenter n'est pas pensable dans les premiers degrés de l'enseignement pour la raison qu'elle fait perdre la notion de grandeurs qui doit être, à ce niveau, un des supports intuitifs de l'enseignement des nombres et du calcul. À ce titre, la maîtrise du calcul sur les grandeurs est une des clefs de l'enseignement mathématique. Elle suppose non seulement qu'il soit enseigné en tant que tel, *c'est-à-dire centralement en tant que calcul sur les différentes unités du Système International* mais aussi que les grandeurs soient enseignées systématiquement en tant qu'exercices pratiques de mesurage des poids, longueurs, aires, contenances et volumes.

Cette question, comme d'autres, avait été réfléchie à la fin du 19è par des mathématiciens pour qui l'enseignement primaire était une étape importante dans la formation des esprits. Ainsi *Charles-Ange Laisant*[17] (rédacteur de la revue *L'enseignement mathématique* en 1899), dans sa réponse à un parent qui lui demandait quel lycée choisir pour ses enfants, insiste sur la nécessité de ne pas réduire l'enseignement des unités, même à un degré supérieur à l'école primaire, aux différents calculs sur celles-ci.

> Avant même de le confier à un établissement quelconque, vous avez le droit et le devoir de vous enquérir de l'esprit de l'enseignement, des méthodes suivies, des conditions de travail, sans pour cela qu'il vous soit besoin d'être mathématicien vous-même.
>
> Et surtout, ne vous laissez pas intimider par le directeur, proviseur, principal, peut importe le titre, qui prétendrait que vous vous mêlez de ce qui ne vous regarde pas. Deux observations seulement vont vous donner une idée de la façon dont vous pouvez vous défendre. Pour enseigner le système métrique, il existe des lycées où il n'y a pas un instrument de mesure : mètre, litre, poids, etc. […]
>
> Si donc vous faites des démarches pour l'entrée de votre enfant au collège ou au lycée, par exemple, demandez à visiter le matériel d'enseignement des poids et mesures, les instruments d'arpentage, etc. Si on vous répond qu'il n'y a rien de tout cela dans la maison, sauvez-vous, et ne revenez jamais[18]

Or, précisément sur cette question, les programmes de mathématiques pour le Primaire adoptés en janvier 70, programmes dits des *mathématiques modernes*[19], marquent après une continuité de près d'un siècle une rupture dont les effets catastrophiques sur l'enseignement se prolongent jusque aujourd'hui. Ce qui n'est guère surprenant comme nous allons le montrer.

Mais avant d'en venir là, quelques remarques liminaires ne sont pas inutiles.

---

[17] Charles Ange Laisant (1841-1920), mathématicien français, rédacteur en chef de *L'enseignement mathématique*, première revue internationale de mathématiques, président de la *Société Mathématique de France*, vice-président de la *Société astronomique de France*, s'est beaucoup intéressé non seulement à l'éducation en général mais en particulier à l'enseignement primaire jusqu'à publier une sorte de livre du maître, appelé *L'initiation mathématique* dont on peut trouver des extraits à http://michel.delord.free.fr/lais-init1.pdf

[18] C-A Laisant, Initiation mathématique, Paris, 1910, dixième édition.

[19] BO du 2/01/1970 en grande partie consultable à http://michel.delord.free.fr/bo70.pdf

Rappelons d'abord que les *maths modernes* introduites aux USA dès les années 50, donc bien plus tôt qu'en France, y avaient rencontré l'opposition de l'élite des mathématiciens américains et étrangers présents dans ce pays. Lancée par dès 1962 par Morris Kline, la pétition *On The Mathematics Curriculum Of The High School* [20] fut signée de noms prestigieux mais n'empêcha la « réforme » de triompher.

Rappelons encore que de 1962 à 1970, il ne sera tenu aucun compte en France de cette pétition dont la première traduction française ne sera faite qu'en 2002.

Rappelons enfin qu'il convient de ne pas confondre, comme nous le verrons *infra*, les mathématiques modernes en tant que courant des mathématiques et les mathématiques modernes en tant que conception pédagogique de l'enseignement des mathématiques. La pétition de Morris Kline ne tombe pas dans ce travers. Dans le cas contraire, elle n'aurait pas certes pas été signée par l'un des membres du groupe Bourbaki, groupe présenté en France comme l'initiateur des mathématiques modernes, le grand mathématicien André Weil, frère de Simone Weil, qui enseignait en 1962 à l'*Institute of Adavanced Study*.

Ces précisions étant apportées, nous pouvons nous intéresser aux positions qui présidèrent en France, malgré le précédent américain, à l'adoption des programmes de 1970 pour le Primaire, dits des *mathématiques modernes*, et dont le texte fondateur, la Charte de Chambéry de janvier 1968, se réclame de « *la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques*[21] ».

Qu'est-ce que l'axiomatique ? C'est entre autres choses l'étude et la recherche du système d'axiomes minimum sur lesquels se fondent les mathématiques ou l'un de leurs domaines. C'est-à-dire ceux à partir desquels on peut déduire de manière exclusivement logique, *sans aucun recours à l'intuition et en ne faisant référence qu'à la structure interne des mathématiques*, tous les théorèmes du domaine considéré.

Pour ce qui est de l'enseignement, cette rupture délibérée avec la méthode intuitive fait surgir d'innombrables difficultés.

David Hilbert[22], dont se réclament les partisans des *maths modernes*, parlant *de la nature de son travail initiateur en axiomatique*, fait en effet observer que dans ce cadre les mots perdent leur sens commun et ne sont plus reliés les uns aux autres que par des liens

[20] Version anglaise : http://michel.delord.free.fr/kline62.html
Version française : http://michel.delord.free.fr/kline62fr.html

[21] Charte de Chambéry, *APMEP* (*Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)*, Janvier 1968. Consultable à http://michel.delord.free.fr/chambery.pdf

[22] *David Hilbert* (1862, 1943) est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XXe siècle, à l'égal de Poincaré. On lui doit des avancées dans de nombreux domaines dont l'axiomatisation de la géométrie euclidienne, les espaces de Hilbert , les fameux *23 problèmes de Hilbert* en 1900, qui selon lui devaient marquer les mathématiques du XXe siècle, ce qui se vérifia…

exclusivement logiques, sans aucun support intuitif. Il explique qu'ainsi dans l'axiomatisation de la géométrie, l'on peut remplacer les mots *point*, *droite* et *plan* par *table*, *chaise* et *verre à bière* sans aucun inconvénient ; comme nous l'avons vu plus haut avec la vision axiomatique des entiers où 1 peut jouer le même rôle que 2 ou 3 ou 4…Cependant, et ce point est décisif, Hilbert ne confond pas ce travail *sur* les mathématiques, qui présuppose une connaissance d'un niveau extrêmement élevé de la matière, avec les mathématiques elles-mêmes. Par exemple, dans *Geometry and Imagination,* il montre certes l'aspect logique indiscutable du travail des mathématiciens, mais il en décrit aussi « *la tendance à la* compréhension intuitive *qui favorise une appréhension plus immédiate des objets étudiés, pour ainsi dire un* rapport *vivant avec eux, qui met en valeur le sens concret de leurs relations* »[23]. De fait, il ne recommande nulle part d'aborder exclusivement du point de vue « axiomatique et formel » la recherche mathématique, et pas plus de suivre cette démarche pour l'enseignement et en particulier pour les débuts de l'enseignement. Car encore plus pour les débuts de l'enseignement, le danger est bien d'adopter le point de vue des mathématiques supérieures ou pire un point de vue logico-axiomatique. Cela n'a pas échappé à Buisson qui, comme nous l'avons vu, critique radicalement toute démarche pédagogique commençant par l'abstrait, et non plus à des mathématiciens comme Henri Poincaré[24] ou Félix Klein.

Commentant les travaux de Hilbert, Poincaré écrit :

> Cette préoccupation [axiomatique] peut sembler artificielle et puérile, et il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits, combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité. Mais, chez M. Hilbert, elle s'explique et se justifie si l'on se rappelle le but poursuivi. La liste des axiomes est-elle complète ou en avons-nous laissé échapper quelques-uns que nous appliquons inconsciemment ? Voilà ce qu'il faut savoir. [25]

Quant à Félix Klein, il est encore plus net :

> L'enseignant … ne réussira que s'il présente les choses dans une forme intuitivement compréhensible. Un abord plus abstrait ne sera possible que dans les niveaux les plus élevés de l'enseignement. Par exemple, il est impossible à un enfant de comprendre si on lui explique les nombres axiomatiquement comme des choses abstraites privées de sens, sur lesquelles on ne peut travailler qu'en suivant des règles formelles. Au contraire il associe les nombres avec des images concrètes. Il y a des nombres de noix, de pommes et d'autres bonnes

[23] David Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie,* Julius Springer, Berlin, 1932.
La préface anglaise: http://michel.delord.free.fr/geoim.pdf

[24] *Henri Poincaré* (1854-1912), mathématicien et physicien français. A apporté de très nombreuses contributions fondamentales dans différents domaines. Il a mis en équation avec Ludwig Lorenz la relativité restreinte et, *homme de l'ombre de la relativité générale*, a participé de près aux découvertes d'Einstein.

[25] Henri Poincaré, *Dernières pensées*, Paris, Flammarion, 1913, 258 pages. Page 110-111.

choses et au début elles peuvent et doivent être mises en face de lui seulement sous cette forme tangible [26]

On ne peut d'abord s'empêcher de faire observer que les partisans des *maths modernes* comme perspective d'enseignement « axiomatico-structurelle » dans le primaire se couvrent de l'autorité d'auteurs, en particulier Hilbert et Klein, qui soit n'ont jamais défendu ce type de conceptions, soit, dans le cas de Felix Klein[27], les ont même explicitement condamnées.

Mais cette observation, pour piquante qu'elle soit, ne saurait suffire à démontrer l'inanité de leurs thèses pédagogiques. Pour ce faire, il faut s'intéresser à l'axiomatique qui leur est sous-jacente. Pour le sujet qui nous intéresse, c'est essentiellement la théorie axiomatique des ensembles et en particulier l'axiomatique de construction de l'ensemble des entiers naturels. Celle-ci se présente sous la forme suivante :

> 0 est le cardinal de l'ensemble vide Ø
>
> 1 est le cardinal de l'ensemble {Ø} qui ne comprend que l'ensemble vide Ø comme élément
>
> 2 est le cardinal de l'ensemble {Ø, {Ø}}, ensemble à deux éléments Ø et {Ø}
>
> 3 est le cardinal de l'ensemble {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}, ensemble à trois éléments Ø, {Ø} et {Ø, {Ø}}
>
> … etc., processus dans lequel on réitère récursivement la même action.

En oubliant l'aridité de la notation (qui a son intérêt si l'on se place d'un point de vue axiomatique) et en simplifiant à l'extrême, cela revient à construire l'ensemble des nombres entiers <u>*exclusivement*</u> en partant de zéro et en ajoutant récursivement 1, défini lui-même à partir de 0.

C'est-à-dire à passer outre au conseil de F. Gonseth :

> « On voit combien la genèse d'une numération est un phénomène mental complexe ! Et combien nous sommes loin de la sèche et superficielle définition que voici : *Les nombres se déduisent tous de l'unité, par l'opération qui fait passer de tout nombre au nombre qui le suit immédiatement.* »[28]

Les auteurs des programmes de 1970 conseilleront pourtant aux instituteurs d'apprendre à compter aux élèves de CP en commençant par zéro, zéro étant défini, pour faire concret sans doute, comme le nombre d'éléments de l'ensemble des cochons volants…Puis sur cette base,

---

[26] Felix Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, 1908. Reprint Dover publications, NYC, pages 3-4.

[27] Guy Brousseau, l'un des plus importants théoriciens de ce mouvement puisqu'il fait partie des signataires de la Charte de Chambéry en 1968 qui défend explicitement cette approche axiomatique de l'enseignement, vient de recevoir en 2003 la première … ***Médaille Klein***, décernée par *l'International Commission on Mathematical Instruction* pour l'ensemble de son œuvre.

[28] Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la réalité : Essai sur la méthode axiomatique*, 1936.

de construire successivement toutes les mathématiques et dans l'ordre l'addition, la soustraction, la multiplication, la division puis les nombres décimaux et rationnels, puis les polynômes, les espaces vectoriels, les progressions d'enseignement mises en place devant suivre strictement cet ordre.

Le succès était garanti. Les maths modernes passèrent, laissant derrière elle un enseignement de l'arithmétique et de la géométrie en ruine.

Mais le plus drôle de l'affaire, si l'on peut dire, est que de cette expérience cuisante la leçon qui fut tirée ne fut pas du tout celle qu'on pouvait attendre, c'est-à-dire un rétablissement de la marche intuitive et graduelle vers l'abstraction : un facteur non négligeable de cette évolution fut que, au nom de la continuité du service public, ce furent ceux-là mêmes qui avaient conçu ou propagé la bonne parole de l'axiomatique qui furent les agents de la contre-réforme.

À défaut d'un examen critique de son erreur, qui aurait inévitablement conduit à une réévaluation des apports de la pédagogie buissonnienne, l'institution a d'abord instauré une conception des mathématiques prenant le contre-pied mécaniste de la période précédente. On imposait des démonstrations exclusivement logiques à un âge auquel un élève ne peut pas les comprendre, on en est arrivé à les dévaloriser à l'âge auquel elles sont compréhensibles et nécessaires :

> En effet la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion sur tes démarches suivies et les résultats obtenus.
>
> C'est pourquoi aussi le cours doit être bref: son contenu doit se limiter aux notions et aux résultats essentiels. Sa conception ne doit pas s'identifier au déroulement d'une suite bien ordonnée de nations et de théorèmes ; la présentation de contenus nouveaux doit être articulée avec l'étude de situations assez riches..." (Programme de seconde, 1985).

Dit en d'autres termes, la mise en place d'une dynamique de refus pur et simple de l'abstraction et la mise en avant de l'acquisition non pas de connaissances mais exclusivement de compétences, c'est-à-dire sur un retour aux rudiments qui ne dit pas son nom[29].

*

*   *

[29] Nous avons été sévères avec la réforme des mathématiques modernes : il faut cependant remarquer que les intentions de cette réforme tenaient de l'humanisme scientifique tandis que la réforme suivante, que Rudolf Bkouche qualifie d'activisme pédagogique, signifie bien un refus obscurantiste de toute abstraction.

Pour toutes les matières, l'enseignement conceptuel … des rudiments

La mise en place initiale des maths modernes s'est en fait traduite, pour le primaire et en grande partie pour le secondaire, par la mise en place de contenus universitaires[30] inaccessibles à l'élève au niveau où ils devaient être enseignés[31]. Un des effets non négligeables de la tentative d'imposer ainsi des progressions et des programmes inenseignables, dans la mesure où la critique de ces contenus d'enseignement n'a jamais été faite[32], fut la méfiance envers toute notion de progression, c'est-à-dire d'exposition logique des connaissances, assimilée immédiatement au formalisme qui avait précédemment prévalu. Il a donc bien fallu trouver une théorie pédagogique qui expliquait comment enseigner ce que l'on ne peut enseigner. Ce fut le rôle de la nouvelle didactique des mathématiques, qui trouve son origine chez les partisans des maths modernes, et en particulier de la notion de *Transposition didactique* chère à Guy Brousseau, Y. Chevallard et M. A. Joshua [33]. Sa force consiste en deux points :

- elle reconnaît la situation créée et ressentie par les enseignants, c'est-à-dire l'impossibilité d'enseigner, sous la forme de l'opposition entre le savoir universitaire appelé *savoir savant* - non enseignable mais gardant un statut scientifique - et le *savoir enseigné*, qui par définition même ne se trouve plus être un savoir, la *transposition didactique* étant le mystérieux processus permettant de passer de l'un à l'autre.
- elle donne ainsi une valeur théorique justificatrice à la négation de l'importance de la notion de progression qui est la notion même qui permet de comprendre comment l'on passe des notions enseignées au début de l'enseignement, progressivement, mais sans nier les discontinuités formatrices pour l'esprit, au savoir universitaire. En bref, au lieu d'opposer la notion de mesure de Lebesgue au fait de mesurer avec un double décimètre et de penser l'utilisation du double décimètre comme transposition didactique de la mesure de Lebesgue (Voir illustration) , la progression est justement ce qui permet de penser comment on va partir de l'utilisation du double décimètre en Cours préparatoire pour arriver à l'Université à la notion de mesure de Lebesgue à l'université.

---

[30] On peut remarquer le même phénomène en français, où des éléments de linguistique, matière dont la compréhension suppose un stade avancé des études sont placés au début de l'enseignement de la langue.

[31] La géométrie sans figures – voir la fameuse définition de la droite donnée dans les programmes de quatrième – fait partie de ceux-là.

[32] Nous avons cité *supra* la thèse du «manque de formation des enseignants» qui sert à blanchir les concepteurs des programmes et des progressions.

[33] Y. Chevallard et M.A. Joshua, *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985. Pour une critique de cette notion, lire Rudolf Bkouche, *De la transposition didactique*, Didactiques. Num. 3-4, IREM de Lorraine, 1999. http://michel.delord.free.fr/rb/rb-transpod.pdf

	Définition formelle de la mesure de Lebesgue Soit $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ l'espace mesurable $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée . sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes : 1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in B(\mathbb{R}), \lambda(a + A) = \lambda(A)$ (invariance par translation de la mesure de Lebesgue) 2. $\lambda([0; 1]) = 1$. Cette mesure est appelée **mesure de Lebesgue** sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut montrer qu'elle coïncide avec la notion de longueur sur les intervalles, c'est-à-dire que la mesure de Lebesgue d'un intervalle est égale à la longueur de cette intervalle : par exemple, $\lambda([1; 9]) = 9 - 1 = 8$. De la même manière, $\lambda(] - 4; 8]) = 8 - (-4) = 12$. *Remarque : si* $a \in \mathbb{R}$ *et* $A \subset \mathbb{R}$*, on a noté* $a + A$ *l'ensemble :* $\{a + x, x \in A\}$	
Le cauchemar de la transposition didactique : Comment transposer le texte-ci-dessus en un guide d'utilisation du double-décimètre en CP ?		

Mais la transposition didactique s'est autonomisée en deux sens par rapport aux conditions qui ont présidé à sa naissance :

- d'une part son champ d'application s'est étendu et la tranposition didactique est devenue la référence pédagogique par excellence dans toutes les matières. Il est cependant utile de noter que cela ne s'est pas réalisé sans mal : dans le livre de J. Develay *Epistémologie des savoirs scolaires* , on demande à divers spécialistes d'expliquer la transposition didactique pour leur propre discipline . Pour le Français, c'est Danièle Manesse, pleine de bonne volonté infantilisée qui avoue qu'elle ne trouve pas dans sa matière d'exemples de transposition didactique, n'en déduit pas qu'il s'agit d'une absurdité mais culpabilise de «ne pas avoir su faire » et se perçoit manifestement comme la mauvaise élève de la classe.

- d'autre part, en conséquence de la dégradation des contenus d'enseignement, plus aucun étudiant en IUFM n'étant capable de comprendre le niveau universitaire des années 60/70, le contenu supposé universitaire à transposer s'est réduit aux formalismes les plus sommaires au fur et à mesure que les véritables savoirs universitaires à transposer (comme l'axiomatique et la linguistique) n'étaient plus que le résultat de leurs passages au travers de diverses moulinettes sociologiques et psychopédagogiques.

On arrive donc à un double résultat spectaculaire :

- la transposition didactique garde toujours comme point de départ, comme à la belle époque des mathématiques modernes, le contenu universitaire en tant qu'abstrait considéré comme point de départ, cela revient bien à enseigner d'abord le concept et ensuite ses déterminations, enseigner l'abstrait puis le remplir[34]. C'est bien la tendance à commencer par le plus abstrait pour descendre ensuite logiquement au concret, aller en ce sens du simple au complexe, tendance que combat Buisson et qu'il décrit admirablement dans l'article *Abstraction* :

> Pourquoi ce mode d'exposition séduit-il toujours l'esprit des maîtres autant qu'il rebute celui des élèves ? C'est qu'il correspond à la marche *logique* et non pas à la marche *naturelle* de l'intelligence et que la première est celle des maîtres, la seconde celle des enfants. C'est que l'esprit adulte, en pleine possession de ses facultés d'attention, de comparaison et de raisonnement, prend plaisir à suivre l'enchaînement des idées : il lui semble que le meilleur moyen d'apprendre, comme la meilleure manière d'enseigner, est, suivant une formule célèbre, *d'aller du simple au composé*. Mais le simple, c'est l'abstrait. Dans la réalité, dans la nature, il n'existe pas de choses simples, il n'existe rien qui ne soit complexe, rien qui n'ait des aspects nombreux, des attributs divers.
>
> Le réel ou le concret n'est jamais simple. Plus une idée est simple, plus elle est générale et partant éloignée de ce qui tombe sous les sens. L'idée d'*être* est plus simple que l'idée d'*animal*, et celle-ci plus simple que l'idée de *mammifère*, et celle-ci encore plus simple que celle de *chien* ou de *chat* ; cependant l'enfant a bien plus vite l'idée nette de *chat* ou de *chien* que celle de mammifère, d'*animal* ou d'*être*.

- mais le contenu s'est complètement dégradé aussi bien quantitativement (Voir l'illustration *infra* montrant l'appauvrissement du programme de Cours moyen en arithmétique) aussi bien que qualitativement par la mise en avant des compétences dont l'étendue est d'autant plus réduite que la transformation des connaissances en compétences les rend plus difficiles à maîtriser.

Cette conception, véritable enseignement conceptuel qui ne cache qu'un enseignement mécanisé des rudiments, s'est pourtant généralisée, comme le note Pierre Kahn :

[34] L'histoire de l'enseignement du nombre est exemplaire de ce point de vue : jusqu'en 1970 on part simultanément de l'enseignement des nombres concrets, avec l'aide des instruments de mesure comme le décimètre, et des nombres abstraits ; en 70 , on part des nombres purs et on y reste car les nombres concrets ne sont pas mathématiques. Les dernières réformes sont bien un enseignement conceptuel puisque les débuts de l'enseignement de la numération se limitent aux nombres purs qui se complète ensuite (en gardant donc la démarche de l'abstrait vers le concret) par l'introduction des opérations sur les grandeurs mais seulement pour le collège. Cf dernière partie COMPTER-CALCULER : « LA CONNAISSANCE INTIME DU NOMBRE »

Les disciplines de l'école primaire sont - signe de l'unification de ce qu'on appelle aujourd'hui le « système éducatif » - désignées, dès la maternelle, de la même manière que dans le secondaire. De même qu'on ne fait plus au primaire du dessin ou de la gymnastique, mais des arts plastiques et de l'éducation physique et sportive, on ne fait plus non plus des sciences naturelles, encore moins de l'histoire naturelle, mais de la biologie. L'unification de l'école a fait voler en éclats le paradigme pédagogique d'une progression du simple au complexe. En vue de leur scolarité future anticipée, on fait entrer d'emblée les élèves dans la complexité des savoirs qu'ils doivent maîtriser dès leur plus jeune âge pour pouvoir les monnayer le mieux possible ensuite, à l'adolescence.

Exit le modèle de la leçon de choses conçue comme leçon d'observation. Dès l'école primaire, on n'apprend plus des « choses », mais des **concepts** : non plus le système digestif, mais la digestion ; non plus les fonctions principales de la vie, mais la construction du concept de vivant. Quant aux classifications descriptives des trois règnes de la nature, qui faisaient le corps du cours de sciences du Cours élémentaire au Cours supérieur, elles perdent à la fois leur légitimité pédagogique et leur légitimité épistémologique."[35]

Encore en effort, et le système généralisera l'enseignement de la philosophie en maternelle comme cache-sexe démagogique [36] de son incapacité à enseigner lire-écrire-compter-calculer à l'école primaire. D'ailleurs, c'est déjà un projet et le *Centre régional de la Documentation Pédagogique de Montpellier* publie un texte de M.*Oscar Brennifer*, professeur de philosophie, « consultant », intitulé le plus sérieusement du monde *La philosophie en maternelle* [37].

MD, mai 2006.

---

[35] Pierre Kahn, *De l'enseignement des sciences à l'école primaire; l'influence du positivisme,* Hatier Formation,1999
.

[36] Nouvelle forme de démagogie : En 70, on vous disait « Votre fils fait des vraies mathématiques en CP ! Vous n'en aviez pas fait à son âge ». En 2006 on va vous dire : « Votre fils fait de philo en maternelle ! On ne faisait pas ça de votre temps ».

[37] http://www.crdp-montpellier.fr/ressources/agora/ag07_004.htm

Programmes d'arithmétique Cours Moyen 2
(1887-1970) / 2003

Programme de CM de 1923/38 (très peu diffèrent de celui de 1882, applicable jusqu'en 1945, remplacé à cette date par un programme quasiment équivalent applicable jusqu'en 1970).

- En **SOULIGNÉ VERT MAJUSCULES**: questions **entièrement traitées** en 2002 en CM2

(il ne reste effectivement, de tous les intitulés du programme applicable de 1923 à 1970, que la surface du carré et la construction du cube – pas son volume- qui soient traitées intégralement en 2002 en CM2)

- En *italiques bleu* : questions **partiellement traitées** en 2002 en CM2,

- En ***italiques rouge gras*** : questions **entièrement supprimées** du programme en 2002

1.Calcul et arithmétique.

Application des 4 règles (= opérations) à des nombres plus élevés qu'au cours élémentaire.
Les nombres complexes : le temps (heures, minutes, secondes) ; ***la circonférence (degrés, minutes, secondes). Calcul de la longueur de la circonférence.***
Système de mesures légales à base 10, 100, ***1000****.*
Multiples et sous-multiples.
Calcul des surfaces : **CARRÉ**, *rectangle*, ***triangle, cercle.***
Calcul des volumes : prisme droit à base rectangulaire, cube, cylindre.
Nombres décimaux et fractions décimales. Idée générale des fractions ordinaires. Pratique des ***quatre opérations*** *sur les fractions ordinaires dans des cas numériques simples.*
Problèmes sur des données usuelles. ***Règle de trois simple. Règle d'intérêt simple.***
Suite et développement des exercices de calcul rapide et de calcul mental.

2. Géométrie.

Etude intuitive et représentation par le dessin des figures de géométrie plane.
Notions sommaires sur la représentation des longueurs, sur les plans et cartes à une échelle donnée.

Notions pratiques sur les solides géométriques simples (**CUBES**, ***prismes droits)****.* ***Notions sommaires sur leur représentation géométrique (croquis coté).***
Cercle. Sa division en degrés.
Carré, hexagone régulier, triangle régulier inscrits dans le cercle. "

[Source : P-H Gay, O. Mortreux, *Programmes officiels des écoles primaires 1923-1938*, Librairie Hachette, Brodard et Taupin, Coulommiers(France), 27753 - XIV – 8391. Pages 301 à 330.]

***

Remarque En fait une bonne partie des élèves de CM2 suivaient le programme du Cours Supérieur - "*cours moyen pour les élèves forts*" disent les IO de 1945- soit que le CM2 et le CS fassent partie de la même division, soit que l'instituteur "*complète de lui-même le programme*". Ce qui fait qu'ont aussi été supprimés des connaissances enseignées à une majorité d'élèves de CM ***le principe d'Archimède*** *(actuellement au programme de Terminale S!!!),* ***les notions de carré et de racine carrée d'un nombre, le calcul de la longueur d'un arc de cercle en fonction du rayon et de l'angle au centre, l'aire du trapèze, le volume du cône et de la pyramide, les calculs d'escompte et de rente, les notions de densité, de masse volumique…***