Mathématiques : les leçons d'une crise

Michèle Artigue

Sciences et Vie Hors Série
N° 180 de Septembre 92, pages 46 – 59

Il y a vingt ans, le système scolaire fut bouleversé par l'irruption de la "modernité" mathématique en son sein. Beaucoup d'encres et quelques larmes ont coulé. Après cette violente crise d'adolescence, l'enseignement des mathématiques se dirige-t-il vers la maturité? …

La prolongation de la scolarité obligatoire (réforme Berthoin de 1959) donne une nouvelle finalité l'école: plus qu'elle ne doit préparer directement à la vie active, elle doit former les esprits, donner aux élèves les moyens d'acquérir des connaissances et de s'adapter à un monde en rapide évolution. Face à ces objectifs, les promoteurs de la réforme considèrent qu'une mathématique des structures est particulièrement bien adaptée :

> "*Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la construction constructiviste, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte "comme un gant", nous permettrons-nous de le dire, à la formation de la jeunesse de notre temps*" (Charte de Chambéry, janvier 1968[1])

Grâce à elle, il doit être possible de rendre l'abstraction mathématique accessible à tous et donc de réduire l'échec scolaire en mathématiques. Grâce à elle, il doit être possible également de mettre en évidence l'applicabilité universelle des mathématiques.

Les mathématiques dites "modernes" ont suscité bien des polémiques

Mais cette rénovation des contenus ne peut porter ses fruits que si elle se double d'une rénovation des méthodes pédagogiques. Priorité doit donc être donnée à l'action de l'élève: on s'appuie notamment sur la théorie constructiviste piagétienne, selon laquelle l'enfant construit ses connaissances en s'adaptant à son environnement par actions réelles ou actions intériorisées. C'est de l'action, de la manipulation que l'élève doit abstraire les structures mathématiques fondamentales, et ceci dès le début de l'école élémentaire.

Soutenue par ces principes et porteuse de ces espoirs, la réforme des mathématiques dites "modernes" se met en place au début des années soixante-dix, de l'école élémentaire au lycée. Soulignons qu'il ne s'agit pas d'une réforme improvisée: dès 1959, colloques internationaux et commissions nationales de réflexion s'étaient succédé pour aboutir à la rédaction de la Charte de Chambéry (1968) et à la constitution de la commission ministérielle Lichnérowicz (1967).

Chacun garde le souvenir des polémiques et passions que cette réforme a suscitées. Très vite le décalage entre les idées fondatrices et la réalité des classes, l'inadéquation des choix effectués devient patent. L'enseignement dérive vers un formalisme privé de sens. On passe beaucoup de temps à définir

[1] http://michel.delord.free.fr/chambery.html

précisément des notions, à introduire du vocabulaire, peu à réellement travailler ou faire fonctionner les notions introduites. Et ce d'autant plus que les enseignants, mal préparés, se raccrochent à ce qu'ils peuvent: les marques extérieures du changement, la forme, au détriment du fond.

On s'aperçoit alors de l'erreur commise : croire que l'outil fondamental du développement des mathématiques au XXe siècle, c'est-à-dire la mise en évidence de structures unifiantes, devait l'être aussi pour l'enseignement, quel que soit son niveau. Une erreur commise en confondant abusivement deux mondes: celui des mathématiques en création et celui de l'enseignement. On savait bien que pour concevoir l'intérêt d'une structure donnée, il ne suffit pas d'avoir rencontré deux ou trois situations qui peuvent lui être rattachées, mais qu'il faut que cette structure apparaisse comme permettant un gain: qu'elle organise, unifie, rende plus cohérentes et efficaces des connaissances déjà présentes, ou qu'elle autorise un regard nouveau et performant sur des situations en un sens déjà familières. A l'époque, on découvre que l'enseignement primaire et secondaire est loin de pouvoir faire vivre une pareille problématique. On découvre aussi que les structures les plus générales, les premières qui soient enseignées dans une perspective avançant logiquement du simple au complexe, sont rarement porteuses de problèmes à la fois mathématiquement intéressants et accessibles aux débutants.

La reforme initiée dans les années soixante-dix a manqué son objectif

Très vite, les militants de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), les enseignants travaillant dans les IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques), les promoteurs eux-mêmes de la réforme s'émeuvent des dérapages du système. Rapidement des aménagements de programmes sont mis en place pour essayer d'atténuer les effets les plus pervers de la réforme et contrer l'influence de manuels qui ont plutôt renforcé ses tendances formalistes. Mais la régulation du système lancé sur les rails de la réforme prendra du temps.

Menée au nom de principes généreux, la réforme des mathématiques modernes aura finalement manqué ses objectifs : dix ans après ses débuts, la société n'est pas réconciliée avec les mathématiques. Certes, elles auront pris une place centrale dans le système d'enseignement, mais comme instrument de sélection plus que de formation. Les jeunes se sentent obligés d'en faire, davantage pour s'assurer une réussite scolaire globale que par goût de la discipline.

L'enseignement de la décennie suivante est marqué par de nouvelles réformes qui entérinent le rejet sans appel des options épistémologiques sous-jacentes à la réforme des mathématiques modernes. Rejet de la conception structurelle des mathématiques, rejet de la vision des mathématiques comme un langage, fusse-t-il celui universel de la rationalité. La problématique se déplace sur le sens des mathématiques. Elle conduit mettre l'accent sur le caractère humain de l'activité mathématique, sur son historicité, et le rôle des problèmes dans la conceptualisation et la théorisation : problèmes issus d'autres secteurs scientifiques ou nés des nécessités du développement interne des mathématiques.

Privilégier l'initiative personnelle, l'expérimentation et la découverte

En revanche, comme dans les programmes précédents, on affiche la volonté de rendre les mathématiques plus accessibles aux élèves, de former en plus grand nombre des scientifiques. On persiste placer l'activité de l'élève au centre de l'apprentissage et l'on insiste sur le fait qu'accéder à la culture mathématique, ce n'est pas simplement apprendre des résultats et des techniques, c'est s'initier à une démarche. On met particulièrement en avant le caractère quasi expérimental de cette démarche faite d'explorations, d'élaboration de conjectures et de justifications, plus que son caractère logique et structuré. Ces extraits de programmes des collèges et des lycées (1985) témoignent de ces choix :

> "*Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations: il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes*" (Introduction aux programmes de mathématiques du collège).

> "*Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement; mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit il: sa tâche principale est d'entraîner les élèves à la réflexion et à l'initiative personnelle et l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes... En effet la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion sur tes démarches suivies et les résultats obtenus. C'est pourquoi aussi le cours doit être bref: son contenu doit se limiter aux notions et aux résultats essentiels. Sa conception ne doit pas s'identifier au déroulement d'une suite bien ordonnée de nations et de théorèmes; la présentation de contenus nouveaux doit être articulée avec l'étude de situations assez riches...*" (programme de seconde).

Séduction des textes... Mais que vivent les élèves dans la réalité des classes aujourd'hui ? Est-ce réellement cette initiation à la démarche mathématique, cette conceptualisation par le biais de problèmes porteurs des sens et des techniques d'un champ conceptuel donné ? Comment gère-t-on dans les classes l'articulation entre l'activité des élèves sur des problèmes riches et (institutionnalisation des connaissances exigibles qui sont, elles, plus réduites? Comment s'articulent les aspects conceptuels et les aspects plus techniques du travail mathématique ?A quelles difficultés se heurte l'enseignant qui veut faire vivre ces principes dans le quotidien de sa classe ? Les enseignants y sont-ils réellement préparés ? Est-on à l'abri des perversions ? Ne risque-t-on pas, par exemple, vu l'insistance mise sur l'exploration, l'expérimentation, de vair le jeu mathématique perdre son sens en dérivant vers un simple bricolage?

Aurions-nous posé ces questions il y a vingt ans, si ces mêmes principes avaient guidé la réforme des mathématiques modernes? Probablement pas... S'il semble naturel de les poser aujourd'hui, c'est en grande partie à elle que nous le devons :

-d'une part, par ses échecs, elle nous a « déniaisés ». Elle nous a montré les limites de la réflexion, fût-elle le fait de mathématiciens éminents, pour conduire les réformes. Elle nous a montré la nécessité, pour produire les changements souhaités, de mieux comprendre le fonctionnement de ce système complexe qu'est le système d'enseignement et ses acteurs : élèves et enseignants ;

-d'autre part, par l'intérêt soulevé dans son sillage pour les questions d'enseignement des mathématiques, par les structures qu'elle a permis de constituer, elle a favorisé le développement des recherches nécessaires à une gestion plus rationnelle du système.

Des instituts ont été créés pour développer la recherche en didactique

Les premiers IREM ont ainsi été créés en 1969 à Bordeaux, Lyon, Paris et Strasbourg. Le premier projet avait été publié par le bulletin de l'APMEP en 1967 : il s'agissait d'associer à chaque université une structure réunissant des enseignants de divers niveaux (à temps partiel et pour une durée limitée) et d'exploiter les échanges pour associer, dans un cadre universitaire, formation des enseignants et recherche didactique. La commission Lichnérowicz créée en 1967 reprend l'idée et aménage le projet.

Mais il faut attendre les bouleversements de mai 1968 pour obtenir du ministère la création des premiers instituts (parvenus en 1992 au nombre de 26 IREM). Leurs missions sont au nombre de quatre :

1-Participer à la formation initiale des enseignants,
2-Participer à la formation continue des enseignants,
3-Développer des recherches sur l'enseignement des mathématiques,
4-Produire et diffuser des documents pour l'enseignement.

En fait, au début, l'énergie des IREM est mobilisée par les activités de formation continue : il s'agit de préparer massivement les enseignants à l'application des nouveaux programmes. Les moyens pour ces "recyclages" sont importants et, en particulier, stagiaires et formateurs bénéficient les uns et les autres de décharges effectives ou d'heures supplémentaires. Puis, progressivement les IREM s'organisent, développent recherche et innovation, et complètent leur mission. Leurs travaux auront d'ailleurs une influence certaine sur les choix effectués dans les programmes suivant la réforme de 1970.
Cependant, la structure des IREM, tout à fait originale par le contact qu'elle organise, hors instance hiérarchique, entre enseignants de tous niveaux d'enseignement, est resté un point isolé dans le système éducatif français. Comme tout point isolé, elle est fragile, perçue comme un luxe offert aux mathématiques, et refusé aux autres disciplines. A partir de 1977, date à laquelle le ministre René Haby déclare que "*la tâche de recyclage confiée aux instituts est maintenant en grande partie accomplie*", les IREM luttent pour leur survie. De fait, cette lutte n'a pas eu que des effets négatifs pour ces instituts, obligés de rendre des comptes, de s'engager dans une politique de contrat avec le ministère de l'Éducation nationale. Ils y ont gagné en professionnalisme et en efficacité ; ils sont prêts en particulier à jouer aujourd'hui un rôle essentiel dans le cadre de la rénovation de la formation initiale des enseignants mise en place avec les IUFM (Instituts universitaires de formation des maîtres).
La réforme des mathématiques modernes fut aussi, indirectement, une cause essentielle du développement rapide de la **recherche en didactique** des mathématiques, en France comme à l'étranger : d'une part du fait de l'intérêt brutalement porté à l'enseignement de cette discipline, à la volonté affichée de la rendre accessible à tous, d'autre part du fait des déceptions engendrées par la réforme et des besoins de rationalité qu'elle a ainsi nourris.
Effectivement, au sein de l'INRP (Institut national de recherche pédagogique), des laboratoires de psychologie du CNRS, d'équipes universitaires et surtout des IREM, la recherche se développe rapidement et s'institutionnalise à partir des années soixante-dix. Se développant comme un champ autonome, elle tente néanmoins de conserver des contacts étroits avec sa discipline mère, les mathématiques. Elle puise par ailleurs largement dans les concepts, résultats et méthodes des disciplines qui lui sont naturellement reliées : épistémologie, psychologie cognitive, psychologie sociale, linguistique..., mais en façonnant le plus souvent concepts et méthodes pour les adaptera problématique propre.

Certains voient dans les didacticiens des « sous-mathématiciens »…

Au-delà de sa reconnaissance institutionnelle croissante, il s'agit cependant d'un champ scientifique jeune, toujours fragile, aux résultats encore mal assurés, suscitant animosités et méfiances. Animosité de ceux qui veulent considérer l'enseignement comme un art et refusent l'intrusion d'une quelconque rationalité dans cet art. Animosité de ceux qui voient dans la didactique une machinerie destinée à normaliser l'enseignement et robotiser les enseignants. Animosité de ceux qui restent persuadés, en dépit de toutes les évidences contraires, que pour bien enseigner les mathématiques, il suffit de les connaître (s'ils acceptent à la rigueur que l'on complète la formation disciplinaire d'un enseignant par quelques cours de pédagogie générale, ils voient d'un très mauvais oeil l'imbrication discipline/pédagogie qui est à la base de la didactique). Méfiance de ceux qui, habitués à naviguer dans le champ des sciences "dures", doutent que le domaine de l'enseignement soit accessible à une connaissance de type scientifique. Méfiance, enfin, de ceux qui, percevant les didacticiens comme de sous-mathématiciens qui se sont ainsi trouvé un refuge, craignent de voir cette "caste" inférieure prendre un quelconque pouvoir sur l'enseignement des mathématiques par le biais de prétendues recherches.

Mais ne rentrons pas plus avant dans cette polémique chère au "microcosme" mathématique, et tentons de faire le point sur la recherche didactique, ses acquis actuels et les problèmes auxquels elle se heurte.

Le didacticien s'intéresse aux rapports entre enseignement et apprentissage, qu'il considère comme non transparents. Identifier des phénomènes didactiques, les expliquer, pouvoir éventuellement les prévoir, voire les provoquer, construire les structures conceptuelles et théoriques qui permettent d'organiser et de capitaliser les résultats obtenus, c'est en quelque sorte le pain quotidien du chercheur "pur". Mais je n'ai jamais rencontré de didacticiens qui soient seulement des chercheurs "purs". Tous ont certes l'ambition d'améliorer directement l'enseignement des mathématiques, mais ils sont également persuadés que cette amélioration nécessite un détour, une distanciation par rapport à l'action : bref, un "pas de côté" par rapport à la position d'enseignant que, généralement, ils occupent par ailleurs.
La recherche a débuté à l'école élémentaire où les conditions expérimentales étaient plus faciles, s'intéressant en particulier aux apprentissages numériques avant d'élargir son champ d'action à d'autres domaines et d'autres niveaux (jusqu'aux premières années de l'enseignement supérieur). Sans prétendre à l'exhaustivité, je m'attarderai sur trois points majeurs : le long terme des apprentissages, le statut de l'erreur et la notion de contrat didactique. Sur chacun de ces points, les résultats obtenus sont importants sans qu'il soit cependant question d'y chercher ni le scoop du siècle, ni les remèdes miracles aux problèmes de l'enseignement.

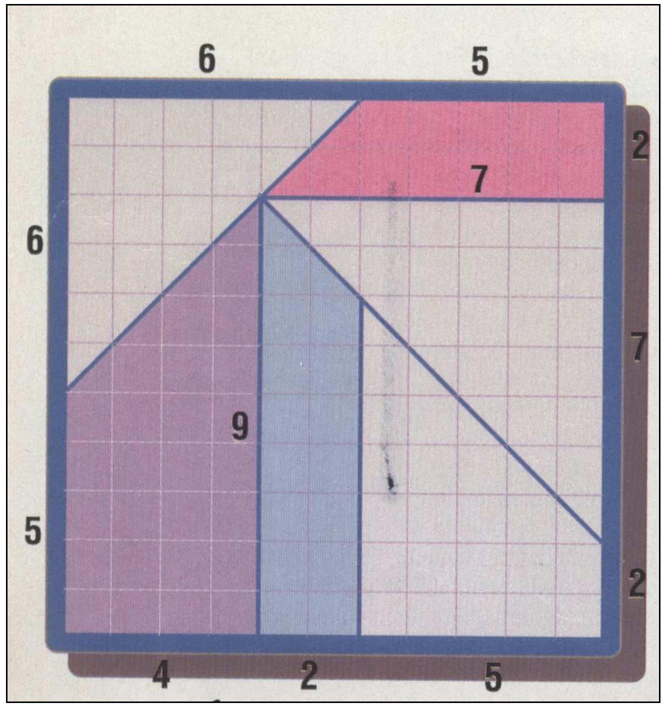
Le long terme des apprentissages

Les nombreux travaux effectués, en France comme à l'étranger, sur les structures additives et sur la proportionnalité nous serviront de support pour expliciter cette notion de "long terme". Ainsi, G. Vergnaud a par exemple mis en évidence qu'il pouvait exister plusieurs années de décalage dans la réussite face à des problèmes en apparence très voisins (relevant d'un même contexte et se ramenant à un même type d'égalité). Donnons-en quelques exemples associés aux deux égalités équivalentes mathématiquement : 9 + 7 =16 ou 16-9 = 7.

> Problème 1: *Pierre a 16 billes. Il joue une partie et perd 9 billes. Combien a-t-il de billes après la partie ?*
>
> Problème 2 : *Pierre joue une partie et perd 9 billes. A la fin de la partie il a 7 billes. Combien avait-il de billes au début de la partie ?*
>
> Problème 3 : *Pierre joue deux parties de billes. A la première, il gagne 16 billes, à la seconde, il perd 9 billes. Que s'est-il passé en tout ?*
>
> Problème 4 : *Pierre joue deux parties de billes. A la première il perd 9 billes. Après les deux parties-il fait ses comptes et s'aperçoit qu'il a gagné 7 billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie ?*

L'analyse fine de ces problèmes montre que des décalages temporels dans la réussite à résoudre ces problèmes n'ont en fait rien de surprenant. En ne "collapsant" pas tous ces problèmes sous une même écriture additive, on aperçoit petit à petit la diversité des comportements cognitifs sollicités, et leur degré de complexité sous-jacent.

L'étude de la proportionnalité, pour ne citer qu'un autre exemple, met en évidence des phénomènes analogues. Très tôt, avant même tout enseignement de la proportionnalité, les élèves savent traiter des situations de proportionnalité simples, doubler ou tripler par exemple les quantités nécessaires pour une recette de cuisine, s'il s'agit de nombres familiers. Ils développent un certain nombre de stratégies, les unes consistant à utiliser implicitement la linéarité de la proportionnalité soit : $f(a+b) = f(a) + f(b)$ et $f(ka) = kf(a)$ (si je connais les quantités nécessaires pour 5 et 4 personnes, je connais les quantités nécessaires pour 9 personnes, si je les connais pour 3, je les connais pour 6, 9...), les autres consistant à utiliser le coefficient de proportionnalité. Bien sûr, l'utilisation de telle ou telle stratégie dépend du contexte, des nombres en jeu et il n'y a en général pas passage facile d'un point de vue à l'autre. En revanche, même au collège, les élèves ne reconnaîtront pas nécessairement une situation de proportionnalité dans la situation d'agrandissement de puzzle due à G.Brousseau (voir dessin ci-contre).
Dans les problèmes de proportionnalité comme dans les problèmes additifs, des variables diverses commandent les traitements que l'élève est susceptible de faire de la situation et de sa difficulté réelle, plus ou moins grande : contexte, statut de ce qui est recherché, nature et taille des nombres en jeu, nature des grandeurs qu'ils servent à repérer, proportionnalité simple ou multiple....



0n demande aux élèves d'agrandir ce puzzle, de manière à ce "qu'une longueur de 5 cm dans le puzzle de départ corresponde à une longueur de 9 cm dans le puzzle agrandi. Et on les voit souvent mobiliser des modèles erronés, comme "ajouter 4 cm à toutes les dimensions", ou "multiplier par 2 et enlever 1 cm". Même au collège, la proportionnalité n'est pas immédiatement reconnue...

Dans ces deux cas, structures additives et proportionnalité, mais aussi dans bien d'autres, les recherches didactiques menées en France et à l'étranger ont permis d'identifier des régularités importantes dans les apprentissages, et de construire ainsi des repères pour l'enseignement. Elles ont permis aussi d'élaborer des situations où, en pilotant judicieusement les variables didactiques identifiées, on peut faire progresser l'élève tout en lui laissant une autonomie certaine dans son travail mathématique.

Ce long terme des apprentissages est à la fois connu et méconnu par l'enseignement. Le prendre en compte, c'est organiser reprises et progressions au fil de l'enseignement, ce qu'essaient de faire effectivement les programmes actuels. Mais dans le même temps, le discours enseignant fourmille de jugements péremptoires comme : "*La proportionnalité est acquise*", ou : "*L'élève n'a rien compris à la proportionnalité*", aussi faux les uns que les autres. C'est comme si, tout en reconnaissant cette caractéristique des apprentissages, l'enseignement devait en un sens la renier dans les évaluations qu'il porte, et extrapoler abusivement en fonction des comportements attendus par l'institution scolaire à un moment donné.

La cohérence cachée de l'élève et le statut des erreurs

L' erreur a rarement sa place dans le cadre de l'enseignement traditionnel

Un autre acquis de la didactique est sans aucun doute d'avoir conduit à repenser le statut de l'erreur. Dans l'enseignement traditionnel, l'erreur est quasiment considérée comme une faute. Si elle n'est pas qualifiée d'étourderie, elle est le témoignage d'un manque de connaissance, d'une lacune. Le bon enseignant est celui qui, expliquant bien, avançant très progressivement, parvient à prévenir, empêcher l'erreur. On a d'ailleurs longtemps quasiment interdit aux enseignants d'écrire au tableau des réponses fausses d'élèves, fut-ce pour les analyser. Seul le vrai y avait sa place.
La didactique des mathématiques, en s'appuyant en particulier sur les travaux d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, a été amenée à questionner ce point de vue, à rechercher les cohérences cachées dont les erreurs témoignent, et à étudier le rôle de l'erreur dans l'apprentissage. Notion essentielle, "l'obstacle épistémologique" fut introduite à l'origine par le philosophe G. Bachelard et importée en didactique par G. Brousseau dès 1976. Elle est associée à l'idée que le progrès de la connaissance scientifique n'est pas linéaire : il suppose des ruptures, des discontinuités. Des connaissances ou des principes, qui ont permis d'avancer à un moment donné, peuvent, à un autre moment, bloquer la progression, voire conduire à des erreurs. Erreurs et blocages sont ici d'autant plus résistants qu'ils sont associés à des connaissances qui ont fait leurs preuves.
Les mathématiques ont beau être perçues comme science de la rationalité idéale, leur développement n'échappe pas à ces obstacles. L'extension du champ des nombres des entiers aux décimaux et rationnels en fournit de nombreux exemples. Les enfants, à manipuler plusieurs années des nombres entiers, se construisent à leur propos un certain nombre de connaissances qu'ils ont tendance à généraliser abusivement lorsque ce champ s'étend. Il y a en fait une cohérence sous-jacente à certaines erreurs, particulièrement tenaces puisqu'on les retrouve jusqu'à la fin du collège, comme : $(0,3)^2 = 0,9$; ou : $4,60 > 3,60 > 3,8$; ou : entre 3,54 et 3,55, il n'y a aucun décimal ; ou : $x^2 > x$
Dans les deux premiers cas, le nombre décimal est vu comme association de deux entiers séparés par une virgule et on opère séparément sur chacun des entiers, avec des règles de priorité pour gérer les conflits (pour comparer deux nombres décimaux par exemple, on commence par comparer les entiers avant la virgule et ce n'est qu'en cas d'égalité qu'on regarde la suite). La troisième erreur peut s'expliquer ainsi : entre 54 et 55 il n'y a pas d'entier, on peut aussi la raccrocher à la vision classique des décimaux comme des entiers avec changement d'unité : 3,54 et 3,55 ne sont autres que les entiers 354 et 355 avec un changement d'unité et ces entiers sont consécutifs. La dernière erreur citée se rattache à une conviction très forte, héritée des entiers : le carré d'un nombre est plus grand que ce nombre. Ou, de façon plus générale: la multiplication, ça grandit et la division, ça diminue.

Les recherches didactiques montrent qu'il est vain de vouloir franchir en douceur de tels obstacles. Comme dans l'histoire, il faut accepter de les affronter. On s'aperçoit alors que l'enseignement, dans son souci d'avancer pas à pas, de façon continue, a souvent tendance a contrario à renforcer ces obstacles. Que ce soit par exemple, pour rassurer les élèves face à ces nouveaux nombres, en insistant sur le fait que ce sont presque des entiers, et qu'en déplaçant la virgule, on se ramène toujours à des opérations entre entiers ; ou encore, comme l'ont montré de nombreuses études de manuels, en proposant majoritairement des exercices pour lesquels les conceptions erronées conduisent à des réponses correctes.

Chercher la cohérence cachée derrière les difficultés de l'élève

Les recherches didactiques amènent ainsi à chercher derrière les difficultés résistantes, bien connues des enseignants, des cohérences cachées du fonctionnement de l'élève. Elles conduisent aussi à repenser la "remédiation", pour reprendre un terme à la mode. Si ces erreurs ne sont pas isolées mais témoignent de conceptions cohérentes, ce n'est sans doute pas isolément qu'il faut les traiter mais plus globalement : il faut alors concevoir les moyens de déstabiliser ces conceptions, d'amener l'élève à comprendre son propre fonctionnement dans ce qu'il a de positif et de négatif à la fois.

La notion de contrat didactique

Arrivée plus tard sur la scène didactique, au début des années quatre-vingt, elle en est devenue l'un des concepts clefs, lié à la notion de contrat pédagogique, introduite en sciences de l'éducation par J. Filloux. Si le contrat pédagogique est ce qui fixe explicitement, mais surtout implicitement, les attentes et devoirs respectifs de l'enseignant et des élèves dans une situation d'enseignement donnée, le contrat didactique est grossièrement la part de ce contrat qui concerne le contenu mathématique. Mais cette spécification par le contenu conduit à des interrogations et des travaux sensiblement différents de ceux menés en sciences de l'éducation.

La notion de contrat conduit à s'interroger sur le sens des comportements et réponses de l'élève. En quoi sont-ils conditionnés par les mathématiques en jeu dans la situation et par ses propres connaissances mathématiques ? En quoi sont-ils liés à d'autres facteurs ? Par exemple, sa perception, à travers divers indices, des attentes de l'enseignant, des us et coutumes mathématiques de la classe dans laquelle il se trouve ? Les interprétations purement cognitives que nous pourrions donner de ces mêmes comportements sont ainsi très relativisées.
Il faut une certaine sensibilité à ces questions pour repérer en quoi le contrat didactique conditionne le quotidien mathématique d'une classe. En revanche, les phénomènes de contrat deviennent brutalement visibles lorsque, pour une raison ou une autre, il y a transgression. C'est le cas par exemple dans les problèmes dits d'âge du capitaine.

Expliquons-nous. Dans la quasi-totalité des problèmes scolaires, d'une part toutes les données nécessaires à la résolution sont fournies, d'autre part toutes les données fournies sont utiles. Les élèves intègrent très vite cette donnée du contrat et l'exploitent au mieux, choisissant entre telle et telle solution, pour des raisons qui ne sont pas toujours les raisons mathématiques attendues. Parfois, des enseignants, énervés par ce fonctionnement, sèment la perturbation en introduisant subrepticement une donnée inutile.

On a volontairement posé des problèmes "idiots" aux élèves

Des animateurs de l'IREM de Grenoble, il y a une dizaine d'années, osèrent aller plus loin dans la rupture du contrat usuel, posant à des élèves de l'école élémentaire des problèmes idiots comme :

"Dans une classe, il y a 4 rangées de 8 places, quel âge a la maîtresse ? "
"Dans une classe, il y a 15 garçons et 14 filles, quel est l'âge de la maîtresse ?"
"Un berger a trois chiens et 120 moutons, quel est l'âge du berger?".

Et, scandale ! On s'aperçut que les élèves de l'école élémentaire s'appliquaient dans leur grande majorité, comme si de rien n'était, à résoudre ces problèmes, ne choisissant même pas au hasard les opérations : la maîtresse était créditée de 32 ans dans le premier cas, de 29 dans le second, le berger de 40 ans... Quitte, pour les plus âgés des élèves, à reconnaître que ces problèmes étaient effectivement un peu bizarres !Cette aventure, popularisée par la suite par Stella Baruk, est certes caricaturale, mais elle a le mérite de montrer jusqu'à quel point peut peser sur le fonctionnement cognitif de l'élève le poids du contrat didactique, et l'intérêt qu'il y a à être sensible au rôle qu'il joue explicitement, et surtout implicitement.
Les travaux sur le contrat didactique ont permis aussi de montrer que, s'il existe des caractéristiques du contrat relativement stables (l'âge du capitaine en est une pour les contrats usuels), un certain nombre sont en évolution permanente au cours de l'apprentissage. Cette évolution continue ou discontinue est d'ailleurs la marque de l'avancée de l'apprentissage. L'enseignant peut jouer sur les premières, en instituant dans sa classe, plus ou moins durablement, tel ou tel type de contrat associé à des pratiques de travail en groupe, de problème ouvert, de débat scientifique, par exemple, et les utiliser comme levier pour agir positivement sur le rapport aux mathématiques de ses élèves. En revanche, en ce qui concerne les secondes, il est contraint de faire avancer le contrat, de provoquer en permanence des micro-ruptures : chaque phase de l'apprentissage modifie en effet l'attente du maître vis-à-vis de l'élève.
Dans une perspective de l'apprentissage où l'on considérerait l'enseignement comme une simple transmission, le savoir passant d'un émetteur (l'enseignant) au récepteur (l'élève), ces considérations pourraient paraître absurdes. Là, les rôles sont clairement attribués : à l'enseignant de bien expliquer le contenu du cours, de donner les bons exercices, de montrer par ses corrections les productions attendues, à l'élève d'apprendre son cours, de faire les exercices demandés. Si chacun remplit bien son rôle et si l'élève n'est pas inapte aux mathématiques, il doit apprendre. Mais on le sait, les choses ne sont pas si simples.

Peut-on garantir que les connaissances anciennes vont nécessairement suffire à l'apprentissage des nouvelles ? De plus, l'élève interprète chaque situation qu'il vit en fonction de ses propres références, scolaires et autres. Ce ne sont pas celles de l'enseignant. Comment affirmer dans ces conditions que s'il apprend, il apprendra justement ce qu'il est censé apprendre ? L'enseignement, même lorsqu'il se veut simple transmission, n'est en fait pas dupe de l'irréalisme de cette position. G. Brousseau, dans plusieurs textes, a identifié certains paradoxes du contrat didactique : l'élève, censé avoir les moyens de produire une réponse, ne la produit pas et il faut pourtant, pour que la relation didactique perdure, arriver à ce qu'il la produise. Le plus simple de ces paradoxes est sans aucun doute ce qu'il a appelé l'effet Topaze", par analogie avec la dictée du texte de Marcel Pagnol.

Le maître dicte : "*Les moutons...*", l'élève ne met pas de "s" à moutons ; le maître essaie par diverses manœuvres de faire rajouter ce "s" à l'élève mais bien sûr, sans le lui dire explicitement. Il finira, pour aboutir au résultat attendu, par prononcer le "s" muet. Ce "s", rajouté ainsi par l'élève ne signifie sans doute pas grand-chose en termes d'apprentissage grammatical mais le maître fera comme s'il résultait vraiment d'une soudaine compréhension de l'élève... Soupçonne-t-on que l'enseignement des mathématiques fourmille d'effets Topaze ? Les programmes actuels se situent dans une perspective constructiviste de l'apprentissage et ont comme objectif explicite de faire accéder une majorité d'élèves à la culture mathématique. Ils ne peuvent faire semblant de se satisfaire d'un pareil partage des responsabilités. Ils exigent finalement beaucoup plus de l'enseignant. A lui d'élaborer et ensuite gérer les situations qui permettront à l'élève de découvrir l'intérêt de certaines notions mathématiques, d'avancer dans ses compétences techniques, de remettre en cause éventuellement des conceptions erronées... A lui de s'adapter à l'élève, à son fonctionnement réel pour l'aider à apprendre des mathématiques. A lui de provoquer l'activité mathématique des élèves, de déterminer ce qu'ils peuvent produire de façon autonome, de repérer les moments où ils doivent être aidés, de tirer parti de ce qui est produit et de le rattacher aux savoirs officiels. Ce faisant, il est clair qu'on accroît à la fois sa part de responsabilité et son niveau d'incertitude dans les situations d'enseignement. La recherche didactique peut-elle donc aider les enseignants à faire face à cette demande ? Et si oui, comment ?

Sans en exagérer les bénéfices, il me semble que la réponse est positive. D'une part, les acquis de la recherche didactique peuvent aider les enseignants à mieux cerner leurs responsabilités réelles. Par exemple, à faire la part entre des difficultés dues à des choix malencontreux de l'enseignement, et des difficultés incontournables parce que constitutives des processus d'apprentissage. D'autre part, si elle ne fournit pas de remède miracle, ni de situations clefs en main, elle fournit des repères qui peuvent aider à mieux situer les élèves, à comprendre les erreurs et à s'y attaquer plus efficacement.

Les travaux sur la transposition didactique initiés par Y. Chevallard permettent de mieux comprendre ce que sont les objets d'enseignement, à quelles contraintes ils obéissent, les influences qui les façonnent, les facteurs qui les font dériver, devenir obsolètes, mourir. De tels travaux peuvent sans aucun doute aider les enseignants à ne pas se sentir arbitrairement ballotés au fil des réformes successives, les aider à mieux lire et interpréter les programmes, en se situant plus au niveau du fond que de la lettre.

Au professeur de repérer et de s'adapter au fonctionnement de l'élève

Mais la recherche a sans doute aussi pour responsabilité de prévenir les interprétations abusives ou dogmatiques que l'on pourrait faire de ses théories et de ses résultats. Empêcher par exemple que l'importance accordée à juste titre au fonctionnement de l'élève, à son activité mathématique, ne soit mal interprétée. Il semble que, d'une perspective constructiviste mal comprise de l'apprentissage, naisse parfois l'illusion que l'élève en situation scolaire peut seul tout réinventer, pour peu qu'on lui propose des problèmes adéquats ; l'enseignant n'aurait qu'un rôle de metteur en scène, d'animateur à jouer. Ceci est à mes yeux le plus sûr moyen de multiplier les fausses découvertes dans une succession d'effets Topaze...
Sur un autre plan, "activité" est aujourd'hui le maître mot de l'enseignement des mathématiques, mais il ne faudrait pas pour autant confondre bricolage et activité mathématique, ni penser qu'un élève ne peut être à la fois physiquement inactif et mathématiquement actif. L'activité mathématique, même si elle s'appuie sur un travail matériel, est avant tout une activité intellectuelle, mettant en jeu des objets idéalisés, des "idéalités" pour reprendre le terme du philosophe Desanti. De plus, cette activité ne peut être analysée, comprise, si elle fait abstraction du sens du vrai, spécifique aux mathématiques, qui la façonne et lui donne son sens mathématique.■