Opérations arithmétiques et algèbre des polynômes
ou
Apprend-on seulement les opérations pour trouver le résultat ?

Lorsque l'on écrit 3021, c'est-à-dire en suivant les normes de la numération de position, cette écriture signifie en fait 3000+20+1, c'est-à-dire $3*10^3+0*10^2+2*10^1+1$. Elle entretient un rapport étroit avec l'écriture du polynôme

$f(X) = 3X^3+2X^1+1 = 3X^3+0X^2+2X^1+1$, illustrée par le fait que, si l'on remplace X par 10, f(10) = 3021.

En ce sens le nombre entier 3021 et le polynôme $f(X) = 3X^3+2X^1+1$ peuvent être représentés par la suite (1 , 2 , 0 , 3 ,…). On peut donc considérer qu'il y a une ressemblance et une parenté entre l'écriture d'un entier en base 10 et l'écriture d'un polynôme ou, pour parler plus mathématiquement que la notion de polynôme est une extension de la notion de nombre: les petits points signifient pour l'écriture d'un entier qu'on peut écrire des nombres ayant autant de chiffres qu'on le veut et ils signifient pour la notion de polynôme formel que l'on peut avoir un degré aussi grand que l'on veut (le degré d 'un polynôme étant le degré de son terme de plus haut degré), un polynôme formel étant défini par la suite de ses coefficients qui sont "non tous nuls", ce qui signifie qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non égaux à zéro. Il y a bien sûr des différences puisque les coefficients du polynôme ne sont pas seulement les 10 premiers nombres entiers (de 0 à 9), et qu'il n'y a donc pas de retenues dans les opérations sur les polynômes, mais elles ont peu d'importance pour la suite[1].

Ce que l'on a dit pour 3021 reste bien évidemment valable pour $201 = 2*10^2+0*10^1+1$ qui correspond au polynôme $g(X) = 2X^2+0X^1+1 = 2X^2+1$, les deux pouvant être représentes par la suite (1 , 0 , 2 ,…).

Considérons maintenant l'addition et la multiplication d'un coté des nombres 3021 et 201 et de l'autre des polynômes f(X) et g(X) :

[1] Une conséquence en est cependant qu'il n'y a pas pour l'addition arithmétique de propriété équivalente à la suivante pour la multiplication des polynômes : " *Le degré de la somme de plusieurs polynômes est au plus égal au plus haut degré des polynômes à additionner*".

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	3	0	2	1
+		2	0	1
	3	2	2	2

X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	3	0	2	1
+		2	0	1
	3	2	2	2

On a donc :

a) 3021 + 201 = 3222

b) $f(X)+g(X) = (3X^3+2X^1+1) + (2X^2+1) = 3X^3+2X^2+2X^1+2$

Ce qui signifie que la ressemblance entre l'écriture du nombre entier et celle du polynôme s'étend aussi à l'algorithme de l'addition des nombres entiers et des polynômes , c'est-à-dire que (1 , 2 , 0 , 3 ,…) + (1 , 0 , 2 ,…) = (2 , 2 , 2 , 3 ,…) en reprenant les notations précédentes.

Mais cette ressemblance s'étend à la multiplication :

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
		3	0	2	1
	*		2	0	1
		3	0	2	1
	0	0	0	0	
6	0	4	2		
6	0	7	2	2	1

X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
		3	0	2	1
	*		2	0	1
		3	0	2	1
	0	0	0	0	
6	0	4	2		
6	0	7	2	2	1

On a donc :

a) 3021 * 201 = 607 221

b) $f(X)*g(X) = (3X^3+2X^1+1) * (2X^2+1) = 6X^5+7X^3+2X^2+2X+1$ et l'on voit que les deux lignes 604200 et 3021 correspondent au calcul du produit des polynômes que l'on fait en développant $(2X^2+1) * (3X^3+2X^1+1)$.

En effet, $(2X^2+1)*(3X^3+2X^1+1) = (6X^5+4X^3+2X^2)+ (3X^3+2X^1+1)$ $=6X^5+7X^3+2X^2+2X+1$

Ce qui signifie que la ressemblance entre l'écriture du nombre entier et celle du polynôme s'étend aussi à l'algorithme de la multiplication des nombres entiers et des polynômes, c'est-à-dire que (1 , 2 , 0 , 3 ,…) * (1 , 0 , 2 ,…) = (1 , 2 , 2 , 7 , 0 , 6,…) en reprenant encore les notations précédentes.

Si l'on connaît l'algorithme de la multiplication des nombres entiers, on peut directement poser l'opération entre polynômes .

		$3X^3$	0	$+2X$	$+1$
	*		$2X^2$	0	$+1$
		$3X^3$	0	$+2X$	$+1$
$6X^5$	0	$+4X^3$	$+2X^2$	0	
$6X^5$	0	$+7X^3$	$+2X^2$	$+2X$	$+1$

Mais elle s'étend aussi à la division car la division de $6X^5+7X^3+2X^2+2X+1$ par $2X^2+1$ s'effectue de la même manière que celle de 607 221 par 201.

Voici la division de 607 221 par 201

	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^3	10^2	10^1	10^0
	6	0	7	2	2	1		2	0	1
-	6	0	3				3	0	2	1
			4	2	2					
		-	4	0	2					
				2	0	1				
				0	0	0				

Et celle de $6X^5+7X^3+2X^2+2X+1$ par $2X^2+1$:

	$6X^5$	0	$+7X^3$	$+2X^2$	$+2X$	$+1$		$2X^2$	0	$+1$
-	$6X^5$	0	$+3X^3$				$3X^3$	0	$+2X$	$+1$
			$4X^3$	$+2X^2$	$+2X$					

-	$4X^3$		$+2X$	
		$2X^2$	0	$+1$
		0	0	0

Ce qui permet d'écrire aussi $\frac{607221}{201} = 3021$ ou $\frac{6X^5+7X^3+2X^2+2X+1}{2X^2+1} = 3X^3+2X+1$

Elle s'étendrait même au cas où il y a un reste, par exemple pour la division de 607 242 par 201

	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^3	10^2	10^1	10^0
	6	0	7	2	4	2		2	0	1
-	6	0	3				3	0	2	1
			4	2	4					
		-	4	0	2					
				2	2	2				
				0	2	2				

La division correspondante, c'est-à-dire celle de $6X^5+7X^3+2X^2+4X+2$ par $2X^2+1$:

	$6X^5$	0	$+7X^3$	$+2X^2$	$+4X$	$+2$		$2X^2$	0	$+1$
-	$6X^5$	0	$+3X^3$				$3X^3$	0	$+2X$	$+1$
			$4X^3$	$+2X^2$	$+4X$					
		-	$4X^3$		$+2X$					
				$2X^2$	$+2X$	$+2$				
				0	$2X$	$+2$				

On peut donc écrire $\frac{607242}{201} = 3021 + \frac{22}{201}$ aussi bien que :

$$\frac{6X^5+7X^3+2X^2+4X+2}{2X^2+1} = 3X^3 + 2X + 1 + \frac{2X+2}{2X^2+1}.$$

Ceci pour montrer que la similitude que nous avons trouvé à l'origine entre l'écriture des nombres entiers et celle des polynômes s'étend aussi à une similitude entre les fractions numériques et l'ensemble des fractions rationnelles qui sont au polynômes ce que les fractions sont aux nombres entiers . Et comme les nombres décimaux ne sont que des cas particuliers de fractions qui peuvent avoir une écriture de position, il est également naturel que la similitude s'étende aux nombres décimaux et aux opérations sur ceux-ci. Comme 0,1 est égal à $\frac{1}{10}$, 0,01 est égal à $\frac{1}{100}$ et 0,001 est égal à $\frac{1}{1000}$, on peut considérer les fractions correspondantes qui seront respectivement $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{X^2}$, $\frac{1}{X^3}$.

Dans ce cadre 2,1 est associé à la fraction rationnelle $2 + \frac{1}{X}$ et 20,03 est associé à $2X + \frac{3}{X^2}$. Si la ressemblance que nous avons montré persiste , il suffit de calculer 2,1 * 20,03, de traduire ensuite le résultat en fraction rationnelle et de vérifier si l'on trouve bien le même résultat en effectuant directement la multiplication $(2 + \frac{1}{X}) * (2X + \frac{3}{X^2})$.

10^2	10^1	10^0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$
	2	0	0	3	
*		2	1		
		2	0	0	3
	4	0	0	6	
	4	2	0	6	3

X^2	X^1	1	$\frac{1}{X}$	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X^3}$
	2	0	0	3	
*		2	1		
		2	0	0	3
	4	0	0	6	
	4	2	0	6	3

En effet , 2,1 * 20,03 = 42,063 soit $42 + \frac{6}{10^2} + \frac{3}{10^3}$

Et $(2 + \frac{1}{X}) * (2X + \frac{3}{X^2}) = 4X + 2 + \frac{6}{X^2} + \frac{3}{X^3}$, ce que l'on peut retrouver en effectuant le développement de $(2 + \frac{1}{X}) * (2X + \frac{3}{X^2})$.

En effet,

$$(2 + \frac{1}{X}) * (2X + \frac{3}{X^2}) =$$

$$2 * 2X + 2 * \frac{3}{X^2} + \frac{1}{X} * 2X + \frac{1}{X} * \frac{3}{X^2} =$$

$$4X + \frac{6}{X^2} + 2 + \frac{3}{X^3} = 4X + 2 + \frac{6}{X^2} + \frac{3}{X^3}$$

Si je me suis étendu assez longuement sur les différents rapports que peuvent entretenir les différentes écritures des nombres (numération de position entière ou décimale et écriture fractionnaire) et les structures algébriques que sont les polynômes et les fractions rationnelles , c'est pour bien montrer que la non maîtrise des opérations arithmétiques est un handicap pour la maîtrise de l'algèbre. Mais il peut être utile de faire quelques remarques complémentaires :

i) l'apprentissage du calcul polynomial au niveau du collège[2] utilisant directement la connaissance de la multiplication arithmétique permet :

- d'obtenir une compréhension bien meilleure à la fois de la cohérence globale des opérations et de leur sens, notamment pour les élèves rencontrant des difficultés car il intègre directement de manière mécanique les propriétés de la multiplication des puissances et permet, *a posteriori*, une meilleure compréhension de ces propriétés.

- l'introduction facilitée de la notion de polynôme, qui est tout à fait accessible à ce niveau bien qu'elle ne soit plus au programme depuis plus de vingt ans

- l'introduction des prémisses de la notion de polynôme formel dans sa différence avec la fonction polynôme : le secret de l'affaire tient en ce que la notion de polynôme formel est tout à fait comparable avec celle de nombre entier écrit dans une numération de position puisque tous les deux sont basés sur la notion de suite infinie n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

[2] Pour ceux qui sont intéressés, lire :
Michel Delord, *Introduction au calcul polynomial en collège* :
http://casemath.free.fr/divers/tribune/mult.pdf

ii) les remarques précédentes n'ont aucun sens pour les programmes actuels puisque les polynômes ne sont plus au programme ni du collège ni du lycée : au lycée , on ne rencontre que les fonctions polynômes présentées d'une manière assez hasardeuse et mal définie. Il est difficile ici de dire si c'est l'abandon de l'apprentissage des opérations arithmétiques qui a entraîné l'abandon de la notion de polynôme ou si c'est le désintérêt pour une mathématique ayant un minimum de cohérence et de "mathématiques" qui fait que l'on ne perçoit plus les rapports entre arithmétique et algèbre. On peut considérer qu'en France l'introduction du calcul polynomial s'appuyant sur les opérations arithmétiques a disparu au cours des années 60 : un des derniers exemples figure dans le *Monge et Guinchan* de 1965[3]qui présente comme "disposition pratique" de la multiplication des polynômes la disposition de la multiplication arithmétique. Aux USA , on le trouve encore en 1974 dans un des meilleurs livres d'algèbre , l'*Algebra One* de Dolciani , Wooton and Beckenbach[4].

iii) les méthodes d'investigation des sciences de l'éducation et de la didactique ont depuis longtemps oublié d'avoir une vision cohérente du cursus "de la maternelle à l'université" et se concentrent sur les études de cas : il est bien évident qu'elles ne peuvent même pas appréhender, malgré ou à cause de tout l'appareillage statistique utilisé comme écran, le fait que l'enseignement des opérations arithmétiques en primaire entretient un lien avec l'algèbre des polynômes formels. Ce n'est pas en étudiant une cohorte d'élèves même sur quatre ans du CE1 au CM2 – ce qui est extrêmement rare et même n'existe plus à ma connaissance – que ces liens pourront être mis en évidence… dans un curriculum où ce lien n'est pas enseigné.

Cabanac, le 14 Novembre 2003

Michel Delord

---

[3] In M.Monge et M. Guinchan, *Mathématiques, classe 4ᵉ*, Librairie classique Eugène Belin, Paris ,1965. Conforme au programme unifié, Arrêté du 26 Octobre 1964. Page 205.

[4] In Mary Dolciani, William Wooton, Edwin Beckenbach, *Algebra 1*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1974.. Page 300.